Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 71-77

PIA BONANSINGA (*)

Omomorfismi polidromi tra gruppi ciclici finiti (**)

1 - In [**1**] si sono trovati criteri per la costruzione di omomorfismi polidromi fra ipergruppi commutativi (in particolare fra gruppi abeliani) a partire da omomorfismi monodromi. Se $f\colon G_1 \to G_2$ è un omomorfismo monodromo ed S è una 0-parte di G_2, cioè tale che $S \subset S + S$, allora le funzioni multivoche $\varphi\colon \varphi(x) = f(x) \cup S$, $\psi\colon \psi(x) = f(x) + S$, sono omomorfismi polidromi. Si poneva il problema di sapere se esistessero esempi non banali di omomorfismi polidromi che non fossero dei tipi suddetti. Si sono costruiti in questo lavoro omomorfismi polidromi soddisfacenti a questa condizione tra Z_q e Z_{q+s}; gli elementi di Z_q sono stati denotati con $[k]$, k intero, $0 \leqslant k \leqslant q-1$; gli elementi di Z_{q+s} li denotiamo con $[k]'$, k intero $0 \leqslant k \leqslant q+s-1$. Per gli omomorfismi f costruiti si ha $\forall r$ $f([r]) = \{[i]' \mid i \in J_r\}$, J_r soddisfa le condizioni:

(1) $J_0 = \{0\}$.

(2) Se $\{i, j\} \subset J_r$, se $r \leqslant i$, $i < k < j$ allora $k \in J_r$. Se $\{i, j\} \subset J_r$ ed $r \leqslant i$, $j < r$, $k < j$ allora $k \in J_r$. Se $\{i, j\} \subset J_r$ et $r \leqslant i$, $j < r$, $i < k$ allora $k \in J_r$.

(3) $r < s \leqslant q-1$ implica $|J_r| \leqslant |J_s|$.

(4) $r < s \leqslant q-1$ implica $|J_r| < s$, per $s \neq 1$; per $s = 2|J_r| \leqslant s$.

(5) $|J_{q-1}| = s + 1$.

Def. 1. Date due funzioni polidrome f_1 e f_2, tra insiemi A e B, diciamo che f_2 *contiene* f_1 se $\forall x \in A$ $f_1(x) \subseteq f_2(x)$.

(*) Indirizzo: 1416 via Panoramica dello Stretto Pal. 15, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).— Ricevuto: 2-VIII-1982.

2 – Esaminiamo prima gli omomorfismi da Z_q a Z_{q+r} con $r = 1, 2, 3$.

Teorema. *Sia* $f: Z_q \to Z_{q+1}$ *con* $q \geqslant 2$, *la funzione multivoca definita dalle* $f([0]) = [0]'$; $f([p]) = \{[p]', [p+1]\}$ $\forall p$ $1 \leqslant p \leqslant q-1$, *allora* f *è un omomorfismo polidromo.*

Dim. Certamente $f([0] + [p]) = f([0]) + f([p])$ $\forall p \in Z_p$. Inoltre $f([q-s] + [q-t]) \subseteq f([q-s]) + f([q-t])$ $\forall([q-s], [q-t]) \in (Zq - \{[0]\})^2$. Se $2q - (s+t) < q$ allora il primo membro è $\{[2q-(s+t)]', [2q-(s+t)+1]'\}$ ed è dunque incluso nel secondo. Se $2q - (s+t) \geqslant q$ allora $0 \leqslant q - (s+t) < q$; $q - (s+t) = 0$ implica $q = s + t$ dunque $|f([q-(s+t)])| = 1$, cioè $f([q-(s+t)]) = \{[0]'\}$, d'altra parte $f([q-s]) = \{[q-s+i]', i = 1, 2\}$; analogamente $f([q-t]) = \{[q-t+i]', \ i = 1, 2\}$ dunque il secondo membro è $\{[k]''$ con $k = 0, 1, q\}$.

Se $|f([q-(s+t)])| = 2$, allora $f([q-(s+t)]) = \{[q-(s+t)+i]', i = 0, 1\}$; ma $q - (s+t) < q - s$ dunque $|f([q-s])| = 2$; analogamente per $f([q-t])$, cioè $f([q-s]) + f([q-t]) = \{[q-(s+t)+j]', j = 0, 1, -1\}$.

3 – Sia: $\bar{f}: Z_q \to Z_{q+2}$ con $q \geqslant 4$ la funzione multivoca definita dalle $\bar{f}([0]) = \{[0]'\}$; $f([p]) = \{[p]', [p+1]'\}$ $\forall p$ $1 \leqslant p \leqslant q-2$; $\bar{f}([q-1]) = \{[q+i]', i = 1, 0, -1\}$. Poniamo inoltre $\delta(q) = (q-1)/2$ se q è dispari, $\delta(q) = (q-2)/2$ se q è pari, sussite il seguente

Teorema. *Esiste un omomorfismo polidromo* $f: Z_q \to Z_{q+2}$ *che contiene* $\bar{f}$ *e verifica le condizioni* (1), (2), ..., (5).

Dim. Poniamo $f([p]) = \bar{f}([p])$ per $p = 0, 1, 2, q-1$; per $3 \leqslant q - t \leqslant q - 2$ poniamo $f([p]) = \bar{f}([p])$ se $3 \leqslant p \leqslant q - \delta(q)$, $f([p]) = \bar{f}([p]) \cup \{[p+2]'\}$ per $q - \delta(q) \leqslant p \leqslant p - 2$. Dalla definizione segue $f([0] + [p]) = f([0]) + f([p])$ $\forall p$, $0 \leqslant p \leqslant q - 1$. Dimostriamo che $f([q-s) + [q-t]) \subseteq f([q-s]) + f([q-t])$ $\forall([q-s], [q-t]) \in (Z_q - \{[0]\})^2$.

Supponiamo $0 \leqslant 2q - (s+t) < q$, allora $f([q-s] + [q-t]) \subset \{[2q-(s+t)+k]', k = 0, 1, 2\}$. Se $|f([q-s])| = |f([q-t])| = 2$, allora $f([q-s]) + f([q-t]) = \{[q-s+j]', j = 0, 1\} + \{[q-t+h]', h = 0, 1\} = \{[2q-(s+t)+k]', k = 0, 1, 2\}$, dunque la tesi. Se è $2q - (s+t) \geqslant q$ allora $0 \leqslant q - (s+t) < q$.

(I) $q = s + t$ implica $|f([q-(s+t)])| = 1$ allora $f([q-(s+t)]) = \{[0]'\}$, ma $\{q-s, q-t\} \cap \{0\} = \emptyset$ dunque $|f([q-s])| \geqslant 2 \leqslant |f([q-t])|$ perciò $f([q-s]) \supset \{[q-s+k]', k = 0, 1\} = A$, $f([q-t]) \supset \{[q-t+h]', h = 0, 1\} = B$, ma nelle nostre ipotesi, $2q - (s+t) = q + 2$, dunque $f([q-s]) + f([q-t]) \supset A + B \supset \{[0]'\}$.

(II) $q-(s+t)>0$; se $|f([q-(s+t)])|=2$ allora $f([q-(s+t)]) = \{[q-(s+t)+h]', h=0,1\}$; questo implica $\{|f([q-s])|, |f([q-t])|\} \cap \{3\} \neq \emptyset$. Supponiamo infatti che $|f([q-s])| = 2 = |f([q-t])|$, allora poichè $\delta(q) = \max\{m \,|\, f(q-m)|\} = 3$, si ha per q dispari $s > \delta(q)$ dunque $q-s < q-\delta(q) = (q+1)/2$, analogamente $q-t<(q+1)/2$ perciò $2q-(s+t) < q+1$ ovvero $q-(s+t)<1$, assurdo nell'ipotesi che $|f([q-(s+t)])| = 2$.

Per q pari si ha $q-s<(q+2)/2$ e $q-t<(q+2)/2$, dunque $2q-(s+t) \leqslant q$, cioè $q-(s+t) \leqslant 0$ perciò $q-(s+t)=0$, assurdo. In entrambi i casi ne segue la tesi.

Se $|f([q-(s+t)])| = 3$ allora $f([q-(s+t)]) = \{[q-(s+t)+k]' \; k=0,1,2\}$, inoltre $q-(s+t)<q-s$, perciò $|f([q-(s+t)])| \leqslant |f([q-s])|$; analogamente $|f([q-(s+t)])| \leqslant f([q-t])|$ perciò $|f([q-s])| = 3 = |f([q-t])|$, cioè $f([q-s]) + f([q-t]) = \{[q-s+k]', k=0,1,2\} + \{[q-t+i]', i=0$ $1,2\} \supset \{[q-(s+t)+k]', k=0,1,2\}$.

4 – Sia $\bar{f}\colon Z_q \to Z_{q+3}$ con $q \geqslant 6$ la funzione multivoca definita dalle $\bar{f}([0]) = \{[0]'\}$; $\bar{f}([1]) = \{[1]', [2]'\}$; $\bar{f}([2]) = \{[2]', [3]'\}$; inoltre $\bar{f}([p]) = \{[p+k]', k=0,1,2\}$ $\forall p \;\; 3 \leqslant p \leqslant q-2$ ed $\bar{f}([q-1]) = \{[q+k]', k=-1,0,1,2\}$; sia inoltre $\delta(q) = (q-3)/2$ se q è dispari, $\delta(q) = (q-4)/2$ se q è pari, sussiste allora il seguente

Teorema. *Esiste un omomorfismo polidromo* $f\colon Z_q \to Z_{q+3}$ *che contiene* $\bar{f}$ *e verifica le condizioni* (1), (2), ..., (5).

Dim. Il teorema si dimostra usando un procedimento non molto difforme ai precedenti.

5 – Sia $\bar{f}\colon Z_q \to Z_{q+4}$ con $q \geqslant 6$, la funzione multivoca definita dalle $\bar{f}([0]) = \{[0]'\}$; $\bar{f}([1]) = \{[1]', [2]'\}$; $f([2]) = \{[2]', [3]', [4]'\}$; $\bar{f}([3]) = \{[3]', [4]', [5]'\}$, $\bar{f}([p]) = \{[p+k]', k=0,1,2,3\}$ $\forall p \;\; 4 \leqslant p \leqslant q-2$; $\bar{f}([q-1]) = \{[q+k]', k$ intero $-1 \leqslant k \leqslant 3\}$. Sia inoltre $\delta(q) = (q-4)/2$ se q è pari, $\delta(q) = (q-5)/2$ se q è dispari, sussiste il seguente

Teorema. *Esiste un omomorfismo polidromo* $f\colon Z_q \to Z_{q+4}$ *che contiene* $\bar{f}$ *e verifica le condizioni* (1), (2), ..., (5).

Dim. Per $p = 0,1,2,3,4,q-1$ poniamo $f([p]) = \bar{f}([p])$; per $5 \leqslant q-t \leqslant q-2$, se $q-t<q-\delta(q)$ poniamo $f([q-t]) = \bar{f}([q-t])$, se $q-\delta(q) \leqslant q-t \leqslant q-2$ sia $f([q-t]) = \bar{f}\subseteq([q-t]) \cup \{[q+4-t]'\}$.

Evidentemente $\forall p \;\; 0 \leqslant p \leqslant q-1$ risulta $f([0]+[p]) = f([0]) + f([p])$; dimostriamo che $f([1]+[p]) \subset f([1]) + f([p])$, per $1 \leqslant p \leqslant 3$ segue immediatamente dalla definizione di f, inoltre se $|f([1]+[p])| = 1$, allora $f([1]+[p]) = \{[0]'\}$ ed $[p] = [q-1]$, ma per come sono stati definiti, la somma di $f([1])$ ed $f([q-1])$ contiene $\{[0]'\}$. Se $|f([1]+[p])| = 2$ oppure $|f([1]+[p])| = 3$, ritroviamo casi già esaminati. Se $|f([1]+[p])| = 4$, allora è $p \geqslant 3$, per $p > 3$ $f([p]) \supset \{[p+k]', k$ intero $0 \leqslant k \leqslant 3\}$, dunque $f([1]) + f([p]) \supset \{[p+k]', k$ intero $1 \leqslant k \leqslant 5\}$, ne segue quanto si voleva. Osserviamo che $p + 5 < q + 4$ essendo $p \neq q - 1$ e $p < q - 1$.

$|f([1]+[p])| = 5$ implica $p \geqslant 4$ e, come nel caso precedente, segue la tesi. Si ha anche $f([2]+[p]) \subset f([2]) + f([p])$ con $0 \leqslant p \leqslant q-1$: abbiamo $2 + p \leqslant q + 1$ da cui $2 + p = q + 1$ se e solo se $p = q - 1$ e $2 + p = q$ se e solo se $p = q - 2$, negli altri casi è $2 + p < q$; $f([2] + [q-1]) = f([1]) \subset f([2]) + f([q-1])$, segue dalla definizione, analogamente $f([2] + [q-2]) = f([0]) \subset f([2]) + f([q-2])$.

Se $|f([2]+[p])| = 3$ allora $p = 0$ oppure $p = 1$ e questi casi sono già stati considerati.

$|f([2]+[p])| = 4$ implica $p \geqslant 2$ dunque $f([p]) \supset \{[p+k]', k = 0, 1, 2\}$, dunque $f([2]+[p]) = \{[p+s]', s$ intero $2 \leqslant s \leqslant 5\} \subset f([2]) + f([p])$.

Se $|f([2]+[p])| = 5$, allora è $p \geqslant 3$ dunque $f([p]) \supset \{[p+k]', k$ intero $0 \leqslant k \leqslant 2\}$ ed $f([2]+[p]) = \{[p+j]', j$ intero $2 \leqslant j \leqslant 6\} \subset f([2]) + f([p])$.

Mostriamo che per $0 \leqslant p \leqslant q-1$ $f([3]+[p]) \subset f([3]) + f([p])$, si ha $p + 3 \leqslant q + 2$, ma $p + 3 = q + 2$ se e solo se $p = q - 1$, e $p + 3 = q + 1$ se e solo se $p = q - 2$, $p + 3 = q$ se e solo se $p = q - 3$, in tutti gli altri casi è $p + 3 < q$. $f([3] + [q-1]) = f([2]) = \{[k]', k = 2, 3, 4\}$, mentre $f([3]) + f([q-1]) = \{[k]', k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, q+3, q+2\}$. Se $p = q - 2$ allora $p > 3$ dunque $|f([p])| \geqslant 4$, consideriamo $f([3]+[q-2]) = f([1]) = \{[k]', k = 1, 2\}$, ma $f([q-2]) + f([3]) \supset \{[q+k]', k$ intero $1 \leqslant k \leqslant 3\} \cup \{[h]', h$ intero $0 \leqslant h \leqslant 2\}$, da cui segue quanto si voleva. Se $q = p + 3$ allora $p > 2$ perciò $|f([p])| \geqslant 3$, cioè $f([q-3]) \supset \{[q-k]', k = 1, 2, 3\}$, ma $f([3] + [q-3]) = f([0]) = \{[0]'\}$; $f([3]) + f([q-3]) \supset \{[q-k]', k = 1, 2, 3\} + \{[h]', h = 3, 4, 5\}$ e questa somma manifestamente contiene $\{[0]'\}$.

Per $p + 3 < q$ se $|f([p]+[3])| = 3$, ritroviamo casi già esaminati. Se $|f([p]+[3])| = 4$ segue $p + 3 \geqslant 4$ cioè $p \geqslant 1$, il caso $p = 1$ è stato considerato, per $p \geqslant 2$ $f([p]) \supset \{[p+k]'\ k = 0, 1, 2\}$ cioè $f([p]) + f([3]) \supset \{[p+j]', j$ intero $3 \leqslant j \leqslant 7\} \supset f([3]+[p]) = \{[p+l]'\ l$ intero $3 \leqslant l \leqslant 6\}$. Se $|f([3]+[p])| = 5$ allora $p + 3 > 4$, dunque $p \geqslant 2$; per $p = 2$ è già stato provato; consideriamo dunque $p \geqslant 3$, si ha $f([p]) \supset \{[p+k]', k = 0, 1, 2\}$, d'altra parte $f([p]+[3]) = \{[p+s]', s$ intero $3 \leqslant s \leqslant 7\} \subset f([3]) + f([p])$.

Dimostriamo ora che $f([q-s]+[q-t]) \subset f([q-s]) + f([q-t])$ $\forall([q-s], [q-t]) \in (Z_q - \{[0]', [1]', [2]', [3]'\})^2$: supponiamo $2q - (s+t) < q$ allora $f([2q - (s+t)]') \subset \{[2q - (s+t) + k]', k$ intero $0 \leqslant k \leqslant 4\} = A$, inoltre risulta $|f([q-s])| \geqslant 4 \leqslant |f([q-t])|$, dunque $f([q-s]) + f([q-t]) \supset \{[q-s+h]', h$ intero $h = 0, 1, 2, 3\} + \{[q-s+r]', r$ intero $0 \leqslant r \leqslant 3\} \supset A \supset f([2q-(s+t)])$. Supponiamo ora che sia $2q - (s+t) \geqslant q$ allora $0 < 2q - (s+t) < q$, esaminiamo i vari casi possibili.

(I) $q = s + t$ cioè $f([q - (s + t)]) = \{[0]'\}$, ma $\{q - s, q - t\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \emptyset$ ne segue $|f([q - s])| \geqslant 4 \leqslant |f([q - t])|$ allora $f([q - s]) + f([q - t]) \supset \{[q - s + k]', k \text{ intero } 0 \leqslant k \leqslant 3\} + \{[q - t + h]', h \text{ intero } 0 \leqslant h \leqslant 3\} \supset \{[0]'\}$.

(II) $q - (s + t) > 0$.

Se $|f([q - (s + t)])| = 2$ segue che $f([q - (s + t)]) = \{[q - (s + t) + p]', p = 0, 1\}$, ma $f([q - s]) + f([q - t]) \supset \{[q - s + h]', h \text{ intero } 0 \leqslant h \leqslant 3\} + \{[q - t + k]', k \text{ intero } 0 \leqslant k \leqslant 3\}$, e nelle nostre ipotesi questa somma contiene $f([q - (s + t)])$. Per $|f([q - (s + t)])| = 3$ si dimostra come nel caso precedente.

Se $|f([q - (s + t)])| = 4$, allora $f([q - (s + t)]) = \{[q - (s + t) + k]', k \text{ intero } 0 \leqslant k \leqslant 3\}$, ma $|f([q - s)])| \geqslant 4 \leqslant |f([q - t])|$, dimostriamo che non possono essere entrambe uguali a quattro, supponendo per assurdo che lo siano, allora poichè $\delta(q) = \max\{m_{|}\, |f([q - m])| = 5\}$, si ha per q dispari $s > \delta(q)$, cioè $q - s < q - \delta(q) = (q + 5)/2$, ovvero $q - s \leqslant (q + 5)/2 - 1$ analogamente $q - t \leqslant (q + 5)/2 - 1$, da cui segue $q - (s + t) \leqslant 3$, assurdo.

Per q pari si ha $q - s < (q + 4)/2$ e $q - t < (q + 4)/2$, cioè $2q - (s + t) < q + 4$, ovvero $q - (s + t) < 4$, assurdo; dunque $|f([q - (s + t)])| = 4$ implica $|f([q - s])| = 5$, oppure $|f([q - t])| = 5$, da cui segue facilmente la tesi.

Se $|f([q - (s + t)])| = 5$, allora, essendo $q - s > q - (s + t)$ e $q - t > q - (s + t)$, $|f([q - s])| = 5 = |f([q - t])|$ dunque $f([q - (s + t)]) = \{[q - (s + t) + k]', k \text{ intero } 0 \leqslant k \leqslant 4\} \subset \{[q - s + l]', l \text{ intero } 0 \leqslant l \leqslant 4\} + \{[q - t + j]', j \text{ intero } 0 \leqslant j \leqslant 4\}$.

6 – Sono stati costruiti omomorfismi polidromi del tipo precedente, da $Zq \to Zq + s$ per q opportuno e $4 < s \leqslant 15$, per la definizione di tali omomorfismi, si procede nella maniera seguente:

$$\text{poniamo } \lambda(s) = \begin{cases} s/2 & \text{per } s \text{ pari} \\ (s+1)/2 & \text{per } s \text{ dispari}. \end{cases} \quad \text{con } s \geqslant 4$$

(Il caso esaminato nel precedente Teorema di **5** rientra in questo più generale). Sia inoltre $\delta(q) = (q - s)/2$ per $q - s$ pari, $\delta(q) = (q - (s + 1)/2$ per $q - s$ dispari; definiamo quindi $f\colon Z_q \to Z_{q+s}$ in modo che siano verificate le condizioni (1), (2), ..., (5) e sia $|f([i])| = i + 1$ per $i \leqslant \lambda(s)$; $|f([j])| = j$ per $\lambda(s) < j < s$; $|f([q - t])| = s$ per $s \leqslant q - t < q - \delta(q)$; $|f([q - t])| = s + 1$ per $q - \delta(q) \leqslant q - t \leqslant q - 1$. La linea di dimostrazione è quella vista nel caso precedente, è però possibile generalizzarne una parte nel modo che illustreremo. Sia $f\colon Z_q \to Z_{q+s}$ la funzione definita in **6**, supponiamo di aver visto, omettiamo le dimostrazioni, che $f([i] + [p]) \subset f([i]) + f([p])$ per $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ e $0 \leqslant p \leqslant q-1$, la parte che si può generalizzare è quella che segue.

Mostriamo che $f([q-v] + [q-t]) \subset f([q-v]) + f([q-t])\ \forall([q-v], [q-t]) \in (Z_q - \{[0]', [1]', \ldots, [s-1]'\})^2$. Supponiamo $0 \leqslant 2q-(v+t) < q$, allora $f([q-v] + [q-t]) = f([2q-(v+t)]) \subset \{[2q-(v+t)]+k]'$ intero $0 \leqslant k \leqslant s\}$, ma $|f([q-v])| \geqslant s \leqslant |f([q-t])|$, allora $f([q-v]) + f([q-t]) \supset \{[q-t+h]',\ h$ intero $0 \leqslant h \leqslant s-1\} + \{[q-v+r]',\ r$ intero $0 \leqslant r \leqslant s-1\} \supset f([2q-(t+v)])$ in quanto è $2s-2 > s$ essendo $s \geqslant 4$.

Supponiamo ora $2q-(v+t) \geqslant q$, allora $0 \leqslant q-(v+t) < q$.

(I) $q = v+t$ allora $f([q-(v+t)]) = \{[0]'\}$, ma $\{q-v, q-t\} \cap \{0, 1, \ldots, s-1\} = \emptyset$, dunque $|f([q-t])| \geqslant s \leqslant |f([q-v])|$, perciò $f([q-t]) + f([q-v]) \supset \{[q-t+k]',\ k$ intero $0 \leqslant k \leqslant s-1\} + \{[q-v+h]',\ h$ intero $0 \leqslant h \leqslant s-1\}$ ed avendosi ancora $2s-2 > s$, questa somma manifestamente contiene $\{[0]'\}$.

(II) $q-(v+t) > 0$, allora $|f([q-(v+t)])| > 1$.

(a) Sia $1 < |f([q-(v+t)]| \leqslant s-1$, poichè $|f([q-v])| \leqslant s \leqslant |f([q-t])|$ si ha $f([q-(v+t]) \subset \{[q-(v+t)+k]',\ k$ intero $0 \leqslant k \leqslant s-2\}$ ed $f([q-v]) + f([q-t]) \supset \{[q-v+l]',\ l$ intero $0 \leqslant l \leqslant s-1\} + \{[q-t+j]',\ j$ intero $0 \leqslant j \leqslant s-1$ e questa somma come nel caso precedente contiene $f([q-(v+t)])$.

(b) $|f([q-(v+t)])| = s$, allora $|f([q-v])| \geqslant s \leqslant |f([q-t])|$, ma almeno una di queste cardinalità è $s+1$. Supponiamo per assurdo che siano entrambe uguali ad s, allora poichè $\delta(q) = \max\{m \mid |f([q-m])| = s+1\}$ segue per $q+s \in 2N$ $q-v < q-\delta(q) = (q+s)/2$ e $q-t < (q+s)/2$ cioè $q-(v+t) < s$, da cui segue $|f([q-(v+t)])| < s$, assurdo $(s = \min\{t \mid |f([t])| = s\})$. Analogamente per $q+s+1 \in 2N$ si ha $q-v < (q+s+1)/2$ e $q-t < (q+s+1)/2$, da cui segue $q-v \leqslant (q+s+1)/2 - 1$, analogamente per $q-t$, in definitiva otteniamo $q-(v+t) \leqslant s-1$, assurdo; possiamo dunque concludere che $|f([q-v])| = s+1$ oppure che $|f([q-t])| = s+1$ e da questo segue la tesi.

(c) $f([q-(v+t)])| = s+1$ allora $|f([q-v])| = s+1 = |f([q-t])|$ da cui segue la tesi.

Osservazione. Poichè la definizione di $\lambda(s)$, non dipende da alcuna limitazione superiore, avanziamo la congettura che sia possibile costruire omomorfismi polidromi da Z_q a Z_{q+s}, del tipo considerato $\forall s,\ s \geqslant 4$ e q opportuno, definendo $\lambda(s)$ e $\delta(q)$ allo stesso modo.

Bibliografia

[1] P. Corsini, *Sur les homomorphismes polydròmes*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) **21** (1975), 131-146.

Summary

One proves that the multivalued (polydrom) homomorphisms of the kinds $\varphi(x) = f(x) + S$, $\psi(x) = f(x) \cup S$, *where* f *is a singlevalued (monodrom) homomorphism and* S *is a* 0*-part* (i.e. $S \subset S + S$), *don't exhaust the class of all polydrom homomorphisms. One arrives to this result building polydrom homomorphisms between cyclic finite groups, which aren't associated to* 0*-parts in the above way.*

* * *