Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 43-55

RODOLFO SALVI (*)

Disequazioni variazionali per fluidi viscosi incomprimibili non omogenei in presenza di diffusione (**)

1 - Introduzione

In [**1**] è stato proposto un modello per descrivere il moto di un fluido a due componenti prendendo in considerazione la diffusione tra le sue parti. Questo modello è derivato dal sistema completo di equazioni di un mezzo a due componenti in cui il processo di diffusione obbedisce alla legge di Fick con la condizione che il coefficiente di diffusione sia piccolo. Si studia, ivi, tale modello in un dominio limitato in R^n ($n = 2, 3$) con viscosità $\mu > \lambda/2$ osc. ϱ_0, ove λ è il coefficiente di diffusione e ϱ_0 è la densità iniziale presa strettamente positiva.

In questo lavoro si studia una disequazione variazionale associata a tale modello e relativa ad un generico convesso K indipendente dal tempo.

In **2** si precisa il quadro funzionale e si dà la nozione di soluzione debole della disequazione variazionale.

In **3** con una approssimazione del tipo Gelerkin, si dimostra l'esistenza di una soluzione debole della disequazione variazionale.

2 - Formulazione della disequazione variazionale

Sia Ω un insieme aperto limitato di R^3 con contorno Γ. Nel cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$ le equazioni che regolano il moto di un fluido a due componenti

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Ricevuto: 23-VII-1982.

con diffusione ricavate in [1] sono

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u\right)-\mu\Delta u-\lambda(u\cdot\nabla\nabla\varrho+\nabla\varrho\cdot\nabla u)=-\nabla P+\varrho f\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+u\cdot\nabla\varrho=\lambda\Delta\varrho \qquad \text{(equazione di diffusione)}\,, \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot u=0\,, \tag{2.3}$$

ove $u=u(x,t)=\big(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t)\big)$ è il vettore velocità, $P=p-\lambda\partial\varrho/\partial t+4/3\mu\Delta\log\varrho$ con p la pressione nella soluzione, $\varrho=\varrho(x,t)$ la densità media della soluzione; inoltre il tensore degli sforzi è espresso in accordo alla legge di Stokes e la viscosità μ ed il coefficiente di diffusione λ sono costanti.

In (2.1)

$$u\cdot\nabla u=\sum u_j\frac{\partial u}{\partial x_j};\qquad u\cdot\nabla\nabla\varrho=\sum u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla\varrho;\qquad \nabla\varrho\cdot\nabla u=\sum\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Si introducono i seguenti spazi funzionali

$$D(\Omega)=\{v\,|\,v\in(C_0^\infty(\Omega))^3,\nabla\cdot v=0\}\,,\qquad V=\{\text{chiusura in }(H^1(\Omega))^3\text{ di }D(\Omega)\},$$

$$H=\{\text{chiusura in }(L^2(\Omega))^3\text{ di }D(\Omega)\}\,,\quad W=\{\varphi\,|\,\varphi\in H^2(\Omega);$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Gamma=0\quad(n\text{ normale esterna a }\Omega)\}$$

($H^s(\Omega)$ è lo spazio di Sobolev di ordine s su $L^2(\Omega)$). Si pone inoltre

$$(u,v)=\int_\Omega u_iv_i\,dx,\qquad |u|=(u,u);\qquad ((u,v))=\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx\,,$$

$$\|u\|=((u,u)),\quad a(u,v)=((u,v))\qquad\text{(si usa la convenzione degli indici ripetuti).}$$

Si indica con Φ lo spazio vettoriale $\Phi=\{v\,|\,v\in H^1(0,T;V);v(T)=0\}$, e con K un convesso chiuso in H con $0\in K$ e, per comodità, con int. $K\neq\emptyset$.

Consideriamo il seguente sistema

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + \int \varrho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,dx - \lambda \int u_j \frac{\partial(\nabla\varrho)_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,dx \tag{2.4}$$

$$-\lambda \int \frac{\partial \varrho}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,dx + \mu a(u, v-u) \geq (\varrho f, v-u)\,,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\cdot\nabla\varrho = \lambda\Delta\varrho\,, \qquad v\in K\,, \tag{2.5}$$

con le condizioni iniziali

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \tag{2.6}$$ $$\varrho(x,0) = \varrho_0(x)\,, \quad 0 \leq \varrho_0(x) \leq M, \tag{2.7}$$

e le condizioni al contorno

$$\frac{\partial \varrho}{\partial n} = 0\,, \qquad u = 0 \qquad \text{su } \Sigma = \Gamma\times(0,T)\,. \tag{2.8}$$

Diamo la nozione di soluzione debole: si dice che (u, ϱ) *è soluzione debole del sistema* (2.4), ..., (2.8) se verifica le seguenti relazioni

$$\int_0^T \Big\{\Big(\varrho\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\Big) + \int \varrho u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,dx + \mu a(u, v-u) \tag{2.9}$$

$$-\lambda\int \frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,dx - \lambda\int \varrho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial(v-u)_j}{\partial x_i}\,dx - (\varrho f, v-u)\Big\}\,dt$$

$$\geq |\sqrt{\varrho(0)}\,(v(0)-u(0))|^2\,,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\cdot\nabla\varrho = \lambda\Delta\varrho, \tag{2.10}$$

$u \in L^2(0,T;V)$, $u\in K$, $\varrho \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L(0,T;W) \cap W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$,

$$p\in[4/3,2]\,,\quad q\in[1,2]\,,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{2q}\geq 1\,,$$

(l'equazione di diffusione è soddisfatta quasi ovunque).

La disequazione (2.9) si deduce dalla (2.4) (formalmente) nel seguente modo. Moltiplichiamo per $u(v-u)$ l'equazione di diffusione (2.10) integriamo in x e t

e sommiamo il risultato alla (2.4), così si ottiene

$$(2.11)\qquad \int_0^T\Big\{\Big(\frac{\partial \varrho u}{\partial t}, v-u\Big)-\int \varrho u_j u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(v-u)_i\,\mathrm{d}x+\mu a(u, v-u)$$

$$-\lambda\int u_i(v-u)_j\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\varrho)_j\,\mathrm{d}x-\lambda\int\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,\mathrm{d}x-\lambda\int\Delta\varrho u_i(v-u)_i\,\mathrm{d}x$$

$$-(\varrho f, v-u)\Big\}\,\mathrm{d}t\geqslant 0\,.$$

Aggiungendo e togliendo alla (2.11) $\int_0^T(\partial\varrho v/\partial t, v-u)\,\mathrm{d}t$ si ha

$$\int_0^T\Big\{\Big(\frac{\partial\varrho v}{\partial t}, v-u\Big)-\int\varrho u_j u_i\frac{\partial}{\partial x_j}(v-u)_i\,\mathrm{d}x+\mu a(u, v-u)+\lambda\int u_i\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(v-u)_j\,\mathrm{d}x$$

$$-\lambda\int\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_i\,\mathrm{d}x-\lambda\int\Delta\varrho u_i v_i\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int\Delta\varrho u_i u_i\,\mathrm{d}x-(\varrho f, v-u)\Big\}\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_0^T\Big(\frac{\partial\varrho(v-u)}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora
$$\int_0^T\Big(\partial\,\frac{\varrho(v-u)}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\Big(\varrho\frac{\partial(v-u)}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\Big((v-u)\frac{\partial\varrho}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\Big((v-u)\frac{\partial\varrho}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Dalla equazione di diffusione si ha

$$\int_0^T\Big(v\frac{\partial\varrho}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t=-\int_0^T\Big\{\int v_j\frac{\partial\varrho v_i}{\partial x_j}(v-u)_i\,\mathrm{d}x+\lambda\int\Delta\varrho v_i(v-u)_i\,\mathrm{d}x\Big\}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^T\Big((v-u)\frac{\partial\varrho}{\partial t}, v-u\Big)\,\mathrm{d}t=-\int_0^T\Big\{\int\frac{\partial(\varrho u)_j}{\partial x_j}(v-u)_i(v-u)_i\,\mathrm{d}x+\lambda\int\Delta\varrho(v-u)_i(v-u)_i\,\mathrm{d}x\Big\}\mathrm{d}t,$$

per cui la (2.11) diviene la (2.9) (per i dettagli cfr. [**2**]).

3 - Esistenza di una soluzione del problema (2.4), ..., (2.8)

Dimostriamo il seguente

Teorema. *Si assume che*

$$f \in L^2(0, T; H), \quad u_0 \in K, \quad \varrho_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega), \quad 0 \leqslant \varrho_0 \leqslant M,$$

$$\mu > \lambda M \quad (M = \text{costante}).$$

Allora esistono funzioni u, ϱ *tali che*

$$u \in L^2(0, T; V), \quad u \in K,$$

$$\varrho \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; W) \cap W^{1,p}(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^\infty(Q),$$

$$p \in [4/3, 2], \quad q \in [1, 2], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{2q} \geqslant 1,$$

soddisfacenti (2.4), ..., (2.8) $\forall v \in \Phi$.

Sia P_K l'operatore di proiezione su K e si pone

(3.1) $$\beta(v) = v - P_K v.$$

L'operatore β è monotono ed emicontinuo; inoltre valgono le relazioni

(3.2) $$(v - P_K v, P_K v) \geqslant 0, \quad (v - P_K v, P_K v - h) \geqslant 0 \quad \forall h \in K.$$

Si considera una famiglia di approssimazioni interne V_m di V. Si assume che

(3.3) V_m *è un sottospazio di* V *di dimensione* m;

(3.4) $\forall v \in V$ *esiste una successione* $v_m \in V_m$ *tale che* $v_m \to v$ *in* V;

(3.5) *tutte le componenti delle funzioni* v *in* V_m *appartengono a* $C^1(\Omega)$.

Poichè V è denso in H ed $u_0 \in H$, è possibile trovare $u_{0m} \in V_m$ tale che $u_{0m} \to u_0$ in H per $m \to \infty$.

Sia $w_1, w_2, \dots, w_m$ una base di V_m; consideriamo il seguente sistema

$$(3.6)\qquad (\varrho_m \frac{\partial u_m}{\partial t}, w_K) + \int \varrho_m u_{jm} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} w_{iK}\, dx + \mu a(u_m, w_K) - \lambda \int u_{im} \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j}) w_{jk}\, dx$$
$$- \lambda \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} w_{iK}\, dx + m(\beta(u_m), w_K) = (\varrho_m f, w_K)\,,$$

$$(3.7)\qquad \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} + u_{jm} \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} = \lambda \Delta \varrho_m\,,$$

$$(3.8)\qquad u_m(0) = u_{0m} \quad \text{ove} \quad u_{0m} \in V_m\,, \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{in } H\,,$$

$$(3.9)\qquad \varrho_m(0) = \varrho_{0m} \quad \text{ove} \quad \varrho_{0m} \in C^1(\Omega)\,,$$

$$(3.10)\qquad \frac{1}{m} \leqslant \varrho_{0m} \leqslant M; \qquad \varrho_{0m} \to \varrho_0 \qquad \text{in } L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)\,.$$

Il sistema (3.6), ..., (3.10) ammette soluzione (u_m, ϱ_m) almeno in un intervallo $(0, t_m)$ sufficientemente piccolo.

Con stime a priori standard si mostra l'esistenza della soluzione in $(0, T)$. Dapprima osserviamo che (cfr. [**1**]) valgono le relazioni

$$\|\varrho_m\|_{L^2(0,T;\, H^1(\Omega))} \leqslant c_1\,, \quad \max |\nabla \varrho| + \|\varrho\|_{L^2(0,T;\, W)} \leqslant c_2\,, \quad \frac{1}{m} \leqslant \varrho_m \leqslant M\,.$$

Ora, posto
$$\boldsymbol{u}_m = \sum_{1}^{m}{}_k\, c_{Km}(t) \boldsymbol{w}_K\,,$$

moltiplichiamo (3.6) per $c_{Km}(t)$ e sommando per k da 1 ad m si ottiene (si usa la notazione $(u)^2 = u \cdot u$)

$$(3.11)\qquad \frac{1}{2} \int \varrho_m \frac{\partial (\boldsymbol{u}_m)^2}{\partial t}\, dx + \int \varrho_m u_{jm} \frac{\partial (\boldsymbol{u}_m)^2}{\partial x_j}\, dx + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m)$$
$$- \lambda \int u_{im} \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j}) u_{jm}\, dx - \lambda \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i\, dx + m(\beta(\boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{u}_m) = (\varrho_m f, u_m)\,.$$

Moltiplichiamo (3.7) per $(u_m)^2/2$ ed integriamo su Ω si ottiene

$$(3.12)\qquad \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} \frac{(u_m)^2}{2}\, dx + \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} u_{jm} \frac{(u_m)^2}{2}\, dx = \lambda \int \Delta \varrho_m \frac{(u_m)^2}{2}\, dx\,.$$

Aggiungendo la (3.12) alla (3.11) si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \varrho_m \frac{(u_m)^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\varrho_m\, u_{jm}\frac{(u_m)^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x + \mu a(u_m, u_m) \tag{3.13}$$

$$+ m(u_m - P_K u_m, u_m - P_K u_m) + m(u_m - P_K u_m, P_K u_m)$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int \Delta\varrho_m (u_m)^2\,\mathrm{d}x - \lambda\int u_{im}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}\Big)u_{jm}\,\mathrm{d}x - \lambda\int\frac{\partial\varrho_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}u_{im}\,\mathrm{d}x = (\varrho_m f, u_m)\,.$$

Ora, dato che

$$\int u_{im}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\varrho}{\partial x_j}u_{jm}\,\mathrm{d}x = \int\varrho_m\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int\varrho_m\Big(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i}\Big)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\varrho_m\Big(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i}\Big)^2\mathrm{d}x\,,$$

ed integrando rispetto a t la (3.13), si ha

$$\|\sqrt{\varrho_m}\,\boldsymbol{u}_m\|_{L^\infty(0,T;\,H)} \leqslant c_1\,, \qquad \int_0^T\|\boldsymbol{u}_m\|^2\,\mathrm{d}t \leqslant c_2\,,$$

$$m\int_0^T|\boldsymbol{u}_m - P_K\boldsymbol{u}_m|^2\,\mathrm{d}t \leqslant c_3\,, \qquad m\int_0^T(\boldsymbol{u}_m - P_K\boldsymbol{u}_m\;\; P_K\boldsymbol{u}_m)\,\mathrm{d}t \leqslant c_4\,,$$

con $\mu > \lambda M$ e c_1, c_2, c_3, c_4 costanti indipendenti da m; da cui

$$\lim_{m\to\infty} u_m \underset{L^2(0,T;\,V)}{=} u \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{3.14}$$

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m\boldsymbol{u}_m \underset{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}{=} \gamma \qquad \text{nella topologia debole}\,^*, \tag{3.15}$$

$$\lim_{m\to\infty} u_m - P_K u_m \underset{L^2(Q)}{=} 0 \qquad \text{nella topologia forte}\,. \tag{3.16}$$

Dalla (3.16) si ha $u - P_K u = 0$ ovvero $u \in K$.

Dalle stime sopra ottenute si deduce

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m u_m \underset{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}{=} \gamma \qquad \text{nella topologia debole}\,^*,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m u_{im} u_{jm} \underset{L^2(0,T;\,L^{3/2}(\Omega))}{=} \eta_{ij} \qquad \text{nella topologia debole}\,.$$

Mostriamo, ora, che

$$(3.17) \qquad \gamma = \varrho u\,, \qquad\qquad (3.18) \qquad \eta_{ij} = \varrho u_i u_j\,.$$

Dalla (3.7) si ottiene che $\partial\varrho_m/\partial t$ appartiene ad un insieme limitato di $L^r(Q)$ con $r > 1$ per cui

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m \underset{L^r(Q)}{=} \varrho \qquad \text{nella topologia forte}\,.$$

Allora (3.14) implica (3.17). Mostriamo la (3.18). A tale scopo diamo l'enunciato di un teorema di compattezza dimostrato in [**3**].

« Siano $B_0 \subset B \subset B_1$ tre spazi di Banach (le immersioni sono continue) e B_0, B_1 riflessivi e l'immersione $B_0 \to B_1$ è compatta sia inoltre δ una funzione da R^+ a R^+ tale che $\delta(h) \to 0$ per $h \to 0$. Si pone $(p > 1)$

$$X = \Big\{v\,|\,v \in L^p(0, T; B_0);\ \sup_{0<h<T} \operatorname{ess} \frac{1}{\delta(h)}\, \|v_h(t) - v(t)\|_{L^p(0,T-h;\,B_1)} < \infty\Big\}\,,$$

ove $v_h(t) = v(t + h)$ e si munisce X della sua norma naturale; allora l'immersione di X in $L^p(0, T; B)$ è compatta ».

Mostriamo, dapprima, che esiste una costante c tale che

$$(3.19) \qquad \int_0^T |\sqrt{\varrho_m(t+h)}\big(\boldsymbol{u}_m(t+h) - \boldsymbol{u}_m(t)\big)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant ch$$

$\forall h > 0$ con $0 < h < T$ e c indipendente da m, h. Sia

$$u_{hm} = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} u_m(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dalla (3.6) si ottiene

$$(3.20) \qquad \int_h^T \Big\{\Big(\varrho_m \frac{\partial \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{u}_{hm}\Big) + \int \varrho_m u_{jm} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}\, u_{ihm}\,\mathrm{d}x + \mu a(\boldsymbol{u}_m, u_{hm}) + m(\boldsymbol{u}_m - P_K u_m, \boldsymbol{u}_{hm})$$

$$- \lambda \int u_{im} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j}\Big)\, u_{jhm}\,\mathrm{d}x - \lambda \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}\, u_{ihm}\,\mathrm{d}x - (\varrho_m f, u_{hm})\Big\}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Valutiamo singolarmente i termini della (3.20).

Ora

$$\int_0^T \Big(\frac{\partial(\varrho_m u_m)}{\partial t}, \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} u_m(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t = \Big(\varrho_m(T)\,u_m(T), \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} u_m(s)\,\mathrm{d}s\Big) \tag{3.21}$$

$$-\Big(\varrho_m(h)\,u_m(h), \frac{1}{h}\int_0^h u_m(s)\,\mathrm{d}s\Big) - \frac{1}{h}\int_h^T \big(\varrho_m u_m, u_m(t) - u_m(t-h)\big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c\,\frac{1}{\sqrt{h}}\Big(\int_0^T |u_m|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12} - \frac{1}{h}\int_h^T \big(\varrho_m(t)u_m(t), u_m(t) - u_m(t-h)\big)\,\mathrm{d}t$$

(per i dettagli cfr. [**2**]).

Il primo termine della (3.21) è minore di $c_1/\sqrt{h}$ (tutte le costanti c_K sono indipendenti da m ed h). Consideriamo il secondo termine della (3.21)

$$-\frac{1}{h}\int_h^T \big(\varrho_m(t)\,u_m(t), u_m(t) - u_m(t-h)\big)\,\mathrm{d}t \tag{3.22}$$

$$= -\frac{1}{h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\,u_m(t)\,u_m(t-h)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t-h)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t-h) - u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aggiungendo e togliendo alla (3.22) $1/h\int_h^T\int \varrho_m(t-h)\big(u_m(t-h)\big)^2\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}t$, si ha che (3.22) è uguale a

$$\frac{1}{2h}\int_h^T \int \varrho_m(t-h)\big(u_m(t-h)\big)^2\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \tag{3.23}$$

$$+\frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \big(\varrho_m(t) - \varrho_m(t-h)\big)\big(u_m(t-h)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t-h) - u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

I primi due termini della (3.23) verificano la seguente relazione

$$\frac{1}{2h}\int_0^{T-h} \int \varrho_m(t)\big(u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int \varrho_m(t)\big(u_m(t)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant c_2\,.$$

Dalla equazione di diffusione, dopo averla integrata in t da $t-h$ a t e moltiplicata per $(u(t-h))^2$ si ottiene

$$\int_h^T \left(\int (\varrho_m(t)-\varrho_m(t-h))(u_m(t-h))^2\,dx\right)dt = 2\int_h^T \left(\int \left(\int_{t-h}^t u_m(s)\varrho_m(s)\,ds\right)_j u_{im}(t-h)\right.$$

$$\left.\cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u_{im}(t-h)\right)dx\Big)\,dt + \lambda\int_h^T\left(\int\left(\int_{t-h}^t \Delta\varrho_m u_m(t-h)\right)dx\right)dt$$

ed applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\left|\int_h^T \int(\varrho_m(t)-\varrho_m(t-h))(u_m(t)-u_m(t-h))^2\,dx)\,dt\right|$$

$$\leqslant c_3\int_h^T \left(\|u_m\|^2 \left\|\int_t^{t-h}\varrho_m(s)u_m(s)\right\|ds\,\|_{L^4(\Omega)}\,dt + \lambda\int_h^T(\|u_m(t)\|\;\left|\int_{t-h}^t \Delta\varrho_m\,ds\right|\,dt\right.$$

$$\leqslant c_3\int_h^T \|u_m\|^2\cdot\sqrt{h}\left[\left(\int_0^T\|u_m(t)\|^2\,dt\right)^{\frac12} + \left(\int_0^h|\Delta\varrho_m|^2\,ds\right)^{\frac12}\right]dt\,,$$

e finalmente

$$\int_0^T\left(\frac{\partial\varrho_m(t)u_m(t)}{\partial t},\,u_{hm}(t)\right)dt \leqslant c_1+\frac{c_4}{\sqrt{h}}-\frac1h\int_h^T\left|\sqrt{\varrho_m(t)}\,(u_m(t-h)-u_m(t))\right|^2 dt. \tag{3.24}$$

Con lo stesso procedimento usato in [**2**] si ottiene

$$\int_h^T\left|\int\varrho_m u_{jm}u_{im}\frac{\partial}{\partial x_j}u_{ihm}\,dx\right|dt\leqslant c_5/\sqrt{h},\qquad \int_h^T a(u_m,u_{hm})\,dt\leqslant c_6/\sqrt{h},$$

$$m\int_h^T(\beta(u_m),u_{hm})\,dt\leqslant c_7+c_8/\sqrt{h}\,,\qquad \left|\int_h^T(\varrho_m f,u_{hm})\,dt\right|\leqslant c_9/\sqrt{h}\,. \tag{3.25}$$

Osserviamo inoltre che

$$\left|\lambda\int_h^T\left(\int u_{im}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_m}{\partial x_j}u_{ihm}\,dx\right)dt\leqslant\left|\int_h^T\left(\int\varrho_m\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jhm}}{\partial x_i}\,dx\right)dt\right|\leqslant c_{10}\frac{\lambda}{\sqrt{h}}\right.\,,$$

$$\left|\lambda\int_h^T\left(\int\frac{\partial\varrho_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_{ihm}\,dx\right)dt\right|\leqslant\lambda\frac{c_{11}}{\sqrt{h}}\,. \tag{3.26}$$

Dalle (3.24), ..., (3.26) si ha

$$\frac{c}{\sqrt{h}}-\frac1h\int_h^T\sqrt{\varrho_m(t)}\,(u_m(t)-u_m(t-h))^2\,dt\geqslant 0\,,\qquad \text{da cui}$$

$$\int_0^{T-h}\left|\sqrt{\varrho_m(t+h)}\,(u_m(t+h)-u_m(t))\right|^2 dt< c\sqrt{h}\,,$$

e la (3.19) è dimostrata. Dato che $\varrho_m(t)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^\infty(Q)$ indipendente da m, si ha

$$\int_0^{T-h} |\varrho_m(t+h)(u_m(t+h) - u_m(t)|^2 \, dt \leq c\sqrt{h} \,. \tag{3.27}$$

Siccome $\partial\varrho_m/\partial t$ appartiene ad un insieme limitato di $L^r(Q)$ $(r > 1)$ indipendente da m, si ottiene

$$\|\varrho_m(t+h) - \varrho_m(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq ch \,. \tag{3.28}$$

Poichè il prodotto $\varrho_m(t)u_m(t)$ è continuo da $L^r(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$, sommando (3.27) e (3.28) si ottiene

$$\|\varrho_m(t+h)u_m(t+h) - \varrho_m(t)u_m(t)\|_{L^2(0,T-h;\, H^{-1}(\Omega))} \leq c\sqrt{h} \,.$$

Dato che $\varrho_m(t)u_m(t)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ indipendente da m, dal teorema di compattezza sopra citato si ha che $\varrho_m(t)u_m(t)$ appartiene ad un insieme relativamente compatto in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ per cui

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m(t)u_m(t) =_{L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))} \varrho(t)u(t) \qquad \text{nella topologia forte}$$

e di conseguenza è verificata la (3.18).

Mostriamo, ora, che le funzioni u, ϱ date dalle (3.14), (3.15) sono soluzioni del sistema. Sia $v(t)$ un generico vettore di Φ tale che $v \in \operatorname{int} K$ e sia v_m la sua proiezione in V_m. Poichè $v_m \to v$ fortemente in $L^2(\Omega)$ si ha che definitivamente $v_m \in K$, cioè esiste un m_0 tale che $\forall m > m_0$, $v_m \in K$.

Ora, scelto $m > \overline{m} > m_0$, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\{\Big(\frac{\partial\varrho_m u_m}{\partial t}, v_{\overline{m}} - u_m\Big) + \int \varrho_m u \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}(v_{\overline{m}} - u_m)_i \, dx + \mu a(u_m, v_{\overline{m}} - u_m) \\ + m(\beta(u_m), v_{\overline{m}} - u_m) - \lambda \int u_{im} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial\varrho_m}{\partial x_j}\Big)(v_{\overline{m}} - u_m)_j \, dx - \lambda \int \frac{\partial\varrho_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}(v_{\overline{m}} - u_m)_i \, dx \\ - (\varrho_m f, v_{\overline{m}} - u_m)\Big\} \, dt = 0 \,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dato che $$m\int_0^T (\beta(u_m), v_{\overline{m}} - u_m) \, dt \leq 0 \,,$$

ripetendo lo stesso procedimento usato per ottenere (2.9), si ha

$$
(3.30)\qquad \int_0^T \Big\{ (\varrho_m \frac{\partial v_{\bar m}}{\partial t}, v_{\bar m} - u_m) + \int \varrho_m u_{jm} \frac{\partial v_{im}}{\partial x_j} (v_{\bar m} - u_m)_i \, dx
$$

$$
+ \mu a(u_m, v_{\bar m} - \boldsymbol{u}_m) - \lambda \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \frac{\partial v_{i\bar m}}{\partial x_j} (v_{\bar m} - u_m)_i \, dx + \lambda \int u_{im} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{\bar m} - u_m)_j \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \, dx
$$

$$
- (\varrho_m f, v_{\bar m} - u_m) \Big\} \, dt \geqslant - \left| \sqrt{\varrho_m(0)}\, (v_{\bar m}(0) - u_m(0)) \right|^2 . \quad \text{Ora}
$$

$$
\int_0^T \Big\{ \mu a(u_m, u_m) + \lambda \int u_{im} \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \, dx \Big\} \, dt
$$

$$
= \int_0^T \Big\{ \mu a(u_m - u, u_m - u) - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i} \, dx + \mu a(u, u_m - u) + \mu\, \boldsymbol{a}(u_m, u) \Big\} \, dt
$$

$$
= \int_0^T \Big\{ (\mu - \lambda M) a(u_m - u, u_m - u) + \lambda M a(u_m - u, u_m - u) - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial (u_m - u)_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} \, dx
$$

$$
- \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, dx - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} \, dx + \mu a(u, u_m - u) + \mu a(u_m, u) \Big\} \, dt
$$

$$
\geqslant \lambda \int_0^T \Big\{ \int \varrho_m \Big(\frac{\partial (u_m - u)_i}{\partial x_j} \Big)^2 dx - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial (u_m - u)_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} \, dx + \mu a(u, u_m - u)
$$

$$
+ \mu a(u_m, u) - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, dx - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} \, dx \Big\} \, dt
$$

$$
\geqslant \frac{\lambda}{2} \int_0^T \Big\{ \int \varrho_m \Big(\frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_m - u)_i}{\partial x_j} \Big)^2 dx + \mu a(u, u_m - u) + \mu a(u_m, u)
$$

$$
- \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, dx - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_j}{\partial x_i} \, dx \Big\} \, dt .
$$

Allora (3.30) diventa

$$
(3.31)\qquad \int_0^T \Big\{ (\varrho_m \frac{\partial v_{\bar m}}{\partial t}, v_{\bar m} - u_m) + \int \varrho_m u_{jm} \frac{\partial v_{i\bar m}}{\partial x_j} (v_{\bar m} - u_m)_i \, dx + \mu a(u_m, v_{\bar m})
$$

$$
- \lambda \int \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\bar m}}{\partial x_j} (v_{\bar m} - u_m) \, dx + \lambda \int u_{im} \frac{\partial v_{jm}}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} \, dx \Big\} \, dt
$$

$$
\geqslant \int_0^T \Big\{ \mu a(u, u_m - u) + \mu a(u_m, u) - \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, dx
$$

$$
+ \lambda \int \varrho_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial (u_m - u)_i}{\partial x_i} \, dx \Big\} \, dt - \left| \sqrt{\varrho_m(0)}\, (v_m(0) - u_m(0) \right|^2 .
$$

Passando al limite per $m \to \infty$ in (3.31) si ottiene l'asserto.

Bibliografia

[1] A. V. KAZHIKHOV and SH. SMAGULOV, *The correctness of boundary-value problems in a diffusion model of an inhomogeneous liquid*, Sov. Phys. Dokl. (5) **22** (1977), 249-250.

[2] R. SALVI, *Disequazioni variazionali per i fluidi viscosi incomprimibili non-omogenei*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 453-466.

[3] J. SIMON, *Ecoulement d'un fluide non-homogene avec densité initiale s'annullant*, C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978), 1009-1012.

Summary

We prove the existence of a solution of a variational inequality connected with viscous incompressible non homogeneous fluids with diffusion process.

* * *