Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 35-42

TULLIA NORANDO (*)

# Sulla regolarità uniforme delle iterate che definiscono la soluzione di una disequazione quasi variazionale (**)

## 1 - Introduzione

L'idea fondamentale di questo lavoro è nata da alcune considerazioni maturate nella esecuzione di [2].

In tale pubblicazione ci si è imbattuti in una questione di regolarità per la soluzione di una disequazione quasi-variazionale ellittica del tipo connesso a problemi di controllo stocastico.

In generale se si vuol dimostrare la regolarità holderiana, si può ricorrere ai metodi di approssimazione mediante iterate [4], $[7]_1$. Nel caso di un operatore ellittico a coefficienti costanti è ben noto [6] che, con termine noto $L^p$, $p > N$, dove $N$ è la dimensione dello spazio ambiente, le iterate sono uniformemente limitate in $W^{2,p}$. Questo fatto implica l'uniforme limitatezza in $C^{1,\alpha}$.

I metodi di [6] non sono tuttavia applicabili al caso di coefficienti variabili.

D'altra parte è noto [4] che, con coefficienti $C^1$, la soluzione della disequazione quasi-variazionale è ancora lipschitziana, per cui si è pensato di provare l'uniforme limitatezza delle iterate in $W^{1,\infty}$. Per la dimostrazione si utilizza il metodo di Caffarelli-Friedmann.

## 2 - Descrizione del problema

Sia $\Omega$ un aperto limitato di $R^N$, di frontiera regolare. Sia $a(u, v)$ una forma

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica del Politecnico, Via Bonardi 9, 20123 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-VII-1982.

bilineare continua definita in $[H_0^1(\Omega)]^2$, tale che

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx , \qquad \alpha|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \beta|\xi|^2$$

$$\text{q.o. } x \in \Omega , \quad \forall \xi \in R^N , \quad \alpha > 0 , \quad \beta > 0 , \quad a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}) . \tag{2.1}$$

Per ogni $\varphi: \Omega \to R$, inferiormente limitata, si definisce

$$(M\varphi)(x) = \inf_{\substack{\xi \geqslant 0 \\ x+\xi \in \Omega}} \varphi(x + \xi) . \tag{2.2}$$

Si definisce inoltre

$$K^{1+M\varphi} = \{v/v \in H_0^1(\Omega), v \leqslant 1 + M\varphi \text{ q.o. in } \Omega\} , \tag{2.3}$$

$K^{1+M\varphi}$ è un sottinsieme convesso chiuso di $H_0^1(\Omega)$, non vuoto sse $\varphi \geqslant -1$ q.o. in $\Omega$.

$$\text{Sia } \quad f \in L^p(\Omega) , \quad p > N . \tag{2.4}$$

Sia $A$ l'operatore lineare continuo associato alla forma $a(\cdot,\cdot)$; si consideri la disequazione quasi-variazionale

$$\langle Au, v - u\rangle \geqslant \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K^{1+Mu} , \quad u \in K^{1+Mu} . \tag{2.5}$$

È ben noto che (2.5) ha un'unica soluzione limitata $u$, la quale inoltre risulta in $W^{2,p}(\Omega)$ [4]. Sia ora $\bar{u}$ la soluzione del problema

$$A\bar{u} = f \quad \text{in } \Omega , \qquad \bar{u} \in H_0^1(\Omega) . \tag{2.6}$$

È noto [**5**] che $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1 - N/p$, ed inoltre $\|\bar{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}$, $|\bar{u}|_{1,\alpha,\Omega}$ sono superiormente limitate da una costante $C = C(N, p, \alpha, |\partial a_{ij}/\partial x_i|_{L^\infty}, \|\bar{u}\|_{L^2}, \Omega)$.

Per iterazione, posto $u^0 = \bar{u}$, si definisce $u^k$, $k \in N$, come l'unica soluzione continua della disequazione variazionale

$$\begin{aligned} & u^k \in H_0^1(\Omega) , \quad u^k \leqslant 1 + Mu^{k-1} \quad \text{q.o. in } \Omega , \\ & \langle Au^k, v - u^k\rangle \geqslant \langle f, v - u^k\rangle \\ & \forall v \in H_0^1(\Omega) , \quad v \leqslant 1 + Mu^{k-1} \quad \text{q.o. in } \Omega . \end{aligned} \tag{2.7$_k$}$$

La successione $\{u^k\}_{k\in N}$ è monotona non crescente e, per $k \to \infty$, converge uniformemente alla soluzione continua $u$ di (2.5).

Si vuol dimostrare che, nelle ipotesi (2.1), ..., (2.4), la successione $\{u^k\}_{k\in N}$ è uniformemente limitata in $W^{1,\infty}(\Omega)$.

La dimostrazione del teorema si articola in due parti.

Nella prima parte, argomento di **3**, si esamina il caso in cui la soluzione $u$ di (2.5) è discosta dall'ostacolo in un intorno di un punto $x_0$ di $\Omega$. In tal caso è facile dimostrare che $u$ e le sue approssimanti $u^k$ non toccano i corrispondenti ostacoli, almeno definitivamente, nel medesimo intorno di $x_0$. Quindi si riesce a stimare superiormente $\|u^k\|_{W^{1,\infty}}$, uniformemente per $k$ abbastanza grande, in tale intorno.

Nella seconda parte, argomento di **4**, si esamina il caso in cui $u$ in $x_0$ non è discosta dall'ostacolo.

Si applica allora il metodo di Caffarelli-Friedmann, dimostrando che $\{Mu^k\}_{k\geqslant\tilde{k}}$ è uniformemente limitata in $W^{1,\infty}$ relativamente ad un intorno di $x_0$, il cui diametro non dipende nè da $k$ nè dalla scelta di $x_0$.

## 3 - Dimostrazione del teorema (parte 1)

Sia $u$ l'unica soluzione in $W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ di (2.5). Sia $x_0$ un punto qualunque di $\Omega$, possono darsi due casi

$$(1) \qquad u(x_0) < \tfrac{1}{2} + Mu(x_0)\,, \qquad (2) \qquad \tfrac{1}{2} + Mu(x_0) \leqslant u(x_0) \leqslant 1 + Mu(x_0)\,.$$

Si esamini il caso (1). Poichè $u, Mu \in C(\bar{\Omega})$, esiste un intorno $V(\delta, x_0)$ con centro $x_0$ e raggio $\delta$, tale che

$$u(x) < 3/4 + Mu(x) \qquad \forall x \in V(\delta, x_0)\,. \tag{3.1}$$

La successione $\{u^k\}_{k\in N}$ è uniformemente convergente ad $u$, per cui per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un indice $\bar{k}$, dipendente solo da $\varepsilon$, tale che

$$\begin{gathered} u^k(x) - u(x) < \varepsilon\,, \qquad u^{k-1}(x+\zeta) - u(x+\zeta) < \varepsilon \\ \forall k \geqslant \bar{k} + 1\,, \qquad \forall x \in \Omega\,, \qquad \forall \zeta \geqslant 0 \quad \text{t.c. } x + \zeta \in \bar{\Omega}\,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Tenendo conto di (3.1), (3.2), si ha in particolare per $\forall x \in V(\delta, x_0)$ e $\forall k \geqslant \bar{k} + 1$

$$u^k(x) - Mu^{k-1}(x) \leqslant [u^k(x) - u(x)] + [u(x) - Mu(x)] + [Mu(x) - Mu^{k-1}(x)] \leqslant 2\varepsilon + 3/4 . \tag{3.3}$$

Assumendo in (3.3) $\varepsilon = 1/16$, risulta

$$u^k(x) \leqslant 7/8 + Mu^{k-1}(x) \qquad \forall x \in V(\delta, x_0) , \quad \forall k \geqslant k(1/16) + 1 . \tag{3.4}$$

Per (3.1), (3.4), esiste un intorno $V(\delta, x_0)$ tale che

$$\begin{gathered} u(x) < 1 + Mu(x) , \qquad u^k(x) < 1 + Mu^{k-1}(x) \\ \forall x \in V(\delta, x_0) , \qquad \forall k \geqslant k(1/16) + 1 . \end{gathered} \tag{3.5}$$

Si osservi, in particolare, che (3.5) assicura che $u^k \in W^{1,\infty}(V(\delta, x_0))$ per $\forall k \geqslant k(1/16) + 1$. Pertanto $\{u^k\}_{k \in N}$ è una successione di funzioni uniformemente limitate in $W^{1,\infty}(V(\delta, x_0))$ per $k \geqslant k(1/16) + 1$. Si osservi inoltre che il raggio dell'intorno $V(\delta, x_0)$, determinato da (3.1), non dipende da $x_0$, essendo $u$ e $Mu \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

## 4 - **Dimostrazione del teorema** (parte 2)

Si esamini il caso (2). Si definisca il sottinsieme compatto $W(x)$ di $\bar{\Omega}$ nel seguente modo

$$W(x) = \{x + \zeta / x \in \bar{\Omega}, \zeta \geqslant 0, x + \zeta \in \bar{\Omega}\} . \tag{4.1}$$

Sia inoltre

$$\Sigma(x_0) = \{y \in W(x_0), u(y) = \min_{z \in W(x_0)} u(z)\} . \tag{4.2}$$

Poichè $u \in C(\bar{\Omega})$, $\Sigma(x_0)$ è un sottinsieme chiuso e non vuoto di $W(x_0)$. L'applicazione $M\varphi \colon \bar{\Omega} \to R$ è non decrescente, per ogni $\varphi$ ammissibile, per cui

$$\forall y \in \Sigma(x_0) \colon \quad Mu(y) \leqslant u(y) = Mu(x_0) \leqslant Mu(y) . \tag{4.3}$$

Da (4.3) segue $\forall y \in \Sigma(x_0)$: $u(y) = Mu(y)$. Esiste allora un intorno $I_1(\Sigma(x_0))$ tale che

$$u(z) < 1/2 + Mu(z) \qquad \forall z \in I_1(\Sigma(x_0)) . \tag{4.4}$$

Con lo stesso procedimento usato nella parte (1) per passare da (3.1) a (3.4), da (4.4) si deduce

$$u^k(z) < 3/4 + Mu^{k-1}(z) \qquad \forall z \in I_1(\Sigma(x_0)) , \quad \forall k \geqslant k(1/8) + 1 . \tag{4.5}$$

Poichè $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare $\delta > 0$, dipendente solo da $\varepsilon$, tale che

$$|u(x + \zeta) - u(x_0 + \zeta)| < \varepsilon \qquad \forall x \in V(\delta, x_0) , \quad \forall \zeta \in R^N . \tag{4.6}$$

Comunque prefissato un numero positivo $\eta$, $\eta < 3/4$, sia $I_2(\Sigma(x_0))$ un intorno di $\Sigma(x_0)$ tale che

$$\begin{aligned} &\Sigma(x_0) \subset I_2(\Sigma(x_0)) \subset\subset I_1(\Sigma(x_0)) , \quad \inf_{\zeta \in K} u(x_0 + \zeta) \geqslant Mu(x_0) + \eta , \\ &K = \{\zeta / x_0 + \zeta \in W(x_0), x_0 + \zeta \notin I_2(\Sigma(x_0))\} . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tale intorno $I_2(\Sigma(x_0))$ è non vuoto per la continuità di $u$, tenendo conto di (4.3). Per ogni $x \in V(\delta_1, x_0)$, $0 < \delta_1 \leqslant \delta$, si ha da (4.6), (4.7)

$$\inf_{\zeta \in K} u(x + \zeta) \geqslant \inf_{\zeta \in K} u(x_0 + \zeta) - \varepsilon \geqslant Mu(x_0) + \eta - \varepsilon \geqslant Mu(x) + \eta - 2\varepsilon . \tag{4.8}$$

Assumendo in (4.8) $\varepsilon = \eta/4$, risulta

$$\inf_{\zeta \in K} u(x + \zeta) \geqslant Mu(x) + \eta/2 \qquad \forall x \in V(\delta(\eta/4), x_0) . \tag{4.9}$$

Si definisca ora il sottoinsieme di $\bar{\Omega}$ $I_3(\eta)$

$$I_3(\eta) = \{x + \zeta / x \in V(\delta(\eta/4), x_0), \zeta \geqslant 0, x_0 + \zeta \in I_2(\Sigma(x_0))\} , \tag{4.10}$$

e si scelga $\eta$ in modo che

$$\Sigma(x_0) \subset\subset I_2(\Sigma(x_0)) \subset\subset I_3(\eta) \subset\subset I_1(\Sigma(x_0)) . \tag{4.11}$$

Sia $\bar{\eta}$ uno di tali $\eta$; da (4.9)

$$u(x + \zeta) \geqslant Mu(x) + \bar{\eta}/2 \qquad \forall x \in V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0) , \quad \forall \zeta \in K . \tag{4.12}$$

Per la definizione (4.10), si ha, tenendo conto di (4.12), che la relazione $u(x+\zeta) = Mu(x)$ non può essere verificata esternamente a $I_3(\bar\eta) \cap W(x)$, per $x \in V(\delta(\bar\eta/4), x_0)$.

Per (4.11), (4.4), [4], si ha inoltre

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &u(z) < 3/4 + Mu(z)\,, \qquad u^k(z) < 3/4 + Mu^{k-1}(z) \\ &\forall z \in I_3(\bar\eta)\,, \qquad \forall k \geqslant k(1/8) + 1\,. \end{aligned}$$

Da (4.12), segue

$$\inf_{\zeta\in K} u^k(x+\zeta) \geqslant \inf_{\zeta\in K} u(x+\zeta) \geqslant Mu(x) + \bar\eta/2 \qquad \forall x \in V\big(\delta(\bar\eta/4), x_0\big)\,,$$

da cui, per l'uniforme convergenza di $\{Mu^{k-1}\}_{k\geqslant 1}$ a $Mu$,

$$(4.14)\qquad \inf_{\zeta\in K} u^k(x+\zeta) \geqslant Mu^{k-1}(x) + \bar\eta/4 \qquad \forall x \in V\big(\delta(\bar\eta/4), x_0\big)\,, \quad \forall k \geqslant k(\bar\eta/4) + 1\,.$$

Da (4.14) si deduce che, per $k \geqslant k(\bar\eta/4) + 1$, la relazione $u^k(x+\zeta) = Mu^{k-1}(x)$ non può essere verificata esternamente a $I_3(\bar\eta) \cap W(x)$ per $x \in V\big(\delta(\bar\eta/4), x_0\big)$.

Da tale argomentazione si deduce perciò una proprietà dei sottinsiemi chiusi non vuoti $\Sigma^k(x_0)$ di $W(x_0)$ così definiti

$$\Sigma^k(x_0) = \{y/y \in W(x_0),\ u^k(y) = \min_{z\in W(x_0)} u^{k-1}(z)\} \qquad (k \in N)\,;$$

precisamente, definitivamente $\Sigma^k(x_0) \subset I_3(\bar\eta) \subset\subset I_1\big(\Sigma(x_0)\big)$.

Si ponga ora $\tilde k = \max\{k(1/8), k(\bar\eta/4)\}$. Si considerino le disequazioni (2.5), $(2.7)_k$ $(k \geqslant \tilde k + 1)$ relativamente all'ostacolo così definito

$$(4.15)\qquad (\Psi\varphi)(x) = 1 + \inf_{\zeta\in H} \varphi(x+\zeta) \qquad \varphi \in C(\bar\Omega)\,,$$

dove $H = \{\zeta/\zeta \geqslant 0;\ x_0 + \zeta \in I_2\big(\Sigma(x_0)\big)\}$.

Per quanto precedentemente esposto si ha

$$(4.16)\qquad \begin{aligned} &\Psi u(x) = 1 + Mu(x)\,, \qquad \Psi u^{k-1}(x) = 1 + Mu^{k-1}(x) \\ &\forall x \in V\big(\delta(\bar\eta/4), x_0\big)\,, \qquad \forall k \geqslant \tilde k + 1\,. \end{aligned}$$

Sia ora $\theta \in C^\infty(R^N)$, così definita

$$0 \leqslant \theta \leqslant 1 , \qquad \theta = 1 \quad \text{in } I_3(\bar{\eta}) , \qquad \theta = 0 \quad \text{fuori } I_1(\Sigma(x_0)) .$$

Si considerino ora $\theta u$ e $\theta u^{k-1}$ $(k \geqslant \tilde{k} + 1)$. Per (4.5) $u$ e $u^{k-1} \in W^{1,\infty}(I_1(\Sigma(x_0)))$, da cui $\theta u$, $\theta u^{k-1}$, $\Psi(\theta u)$, $\Psi(\theta u^{k-1}) \in W^{1,\infty}(R^N)$.

Per $x \in V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0)$: $\Psi(\theta u) = \Psi u$ e $\Psi(\theta u^{k-1}) = \Psi u^{k-1}$. Pertanto, per (4.16),

$$Mu, \; Mu^{k-1} \in W^{1,\infty}(V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0)).$$

Osservando che $Mu \leqslant Mu^{k-1} \leqslant M\bar{u} \leqslant \Psi \bar{u} - 1$ in $V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0)$, $\{Mu^{k-1}\}_{k\geqslant 1}$ è contenuta in un sottinsieme limitato di $W^{1,\infty}(V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0))$. Applicando allora a $V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0)$ la stima [**1**]$_{1,2}$, [**4**], segue che $\{u^{k-1}\}_{k\geqslant 1}$ è limitata, uniformemente rispetto a $k$, in $W^{1,\infty}(V(\delta(\bar{\eta}/4), x_0))$, almeno per $k \geqslant \tilde{k} + 1$.

Si osservi che il diametro di $I_1(\sum(x_0))$, definito in (4.4), dipende solo dalla costante di Lipschitz di $u$ e perciò, al variare di $x_0$ nel sottinsieme dei punti di $\Omega$ per cui vale (2), è possibile limitarlo inferiormente con una costante positiva.

La stessa cosa si può affermare per $I_2(\Sigma(x_0))$, tenendo conto del fatto che anche la scelta di $\bar{\eta}$ dipende solo dalla medesima costante. Quindi $\delta(\bar{\eta}/4)$, che non dipende da $k$, non dipende dalla scelta di $x_0$. Riassumento i casi (1) e (2), si ha che esiste, comunque prefissato $x_0 \in \Omega$, un intorno $V(\delta, x_0)$ di raggio indipendente da $x_0$ e da $k$, tale che $\{u^k\}_{k\in N}$ è uniformemente limitata in $W^{1,\infty}(V(\delta, x_0))$, almeno definitivamente. Per la compattezza di $\bar{\Omega}$ segue la tesi.

## Bibliografia


[1] M. Biroli: [ • ]$_1$ *G-convergence for elliptic variational and quasi variational inequalities*, Recent methods in nonlinear Analysis, Roma, maggio 1978; [ • ]$_2$ *An estimate on convergence of approximation by iteration*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **122** (1979), 83-101.

[2] M. Biroli, S. Marchi and T. Norando, *Homogenization estimates for quasi variational inequalities*, Boll. Un. Mat. Ital (5) **17** A (1981), 266-274.

[3] L. Caffarelli and A. Friedman, [ • ]$_1$ *Regularity of the solution of the quasi variational inequality*, I Comm. in P.D.E. (3) (1978), 745-753; [ • ]$_2$ *Regularity of the solution of the quasi variational inequality*, II Comm. in P.D.E. (4) (1979), 279-293.

[4] J. Frehse et U. Mosco, *Sur la régularité de certaines inequations variationelles et quasi variationelles*, C. R. Accad. Sci. A **288** (1979), 627-630.

[5] O. A. LADYZHENSKAJA and N. N. URAL'TSEVA, *Linear and quasi linear elliptic equations*, Accademic Press 1968.

[6] J. L. JOLY, U. MOSCO and G. M. TROIANELLO, *On the regular solution...*, J. Math. Anal. Appl. **61** (1977), 357-369.

[7] U. MOSCO: $[\cdot]_1$ *Implicit variational problems and quasi variational inequalities*, L.N.M. **543** (1975), 83-156; $[\cdot]_2$ *On some nonlinear quasi variational inequalities*, Erice 1978, Quad. 8 Ist. Mat. « G. Castelnuovo » Roma 1978.

## Summary

*In this paper we prove that the approximating function by iteration of the continuous solution of an elliptic quasi variational inequality (see* [**4**], [**7**]$_1$) *are uniformly bounded in* $W^{1,\infty}$, *in the case in wich the coefficients are* $C^1$.

* * *