Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 7-26

F. DAL FABBRO e A. FURIOLI MARTINOLLI (*)

Sul prolungamento analitico delle soluzioni di sistemi ed equazioni lineari a derivate parziali (**)

1 - Introduzione

In precedenti lavori ([**1**]$_{1,2,3}$, [**2**]$_2$) si sono studiati sistemi ed equazioni lineari in campo analitico, ottenendo teoremi di rappresentazione, di prolungamento analitico delle soluzioni nell'intorno delle singolarità dei coefficienti e termini noti e teoremi di esistenza di soluzioni per problemi singolari di Cauchy.

Questo lavoro completa e stabilisce un collegamento tra i precedenti.

Più precisamente, nella prima parte del lavoro, **2**, si riprende in esame il sistema lineare del vettore incognito complesso $z(x, y) = [\zeta_i(x, y)]$ $(x = x_1 + ix_2,$ $y = y_1 + iy_2;\ i = 1, \dots, N)$

$$z_y = x^n A(y) z_x + B(x, y) z + f(x, y) \qquad (n \geqslant 1, \text{ intero}), \tag{1}$$

studiato in [**1**]$_3$ nelle ipotesi che la matrice dei coefficienti $A(y) = [a_{ij}(y)]$ $(i, j = 1, \dots, N)$ sia analitica in un *aperto Ω connesso di ordine di connessione (finito) qualsiasi*, la matrice $B(x, y) = [b_{ij}(x, y)]$ e il termine noto $f(x, y)$ $= [f_i(x, y)]$ siano analitici in $R_\alpha \times \Omega$, dove R_α rappresenta il disco $\{x\colon |x| < \alpha\}$ $(0 < \alpha \leqslant +\infty)$. (Segnaliamo che, parlando di funzioni analitiche, facciamo riferimento alla definizione di Weierstrass; pertanto *coefficienti e termini noti possono presentare singolarità di tipo qualsiasi e quindi anche polidromie*).

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Facoltà di Ingegneria, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 9-IX-1981.

In [1]$_3$ si è studiato il comportamento delle soluzioni del sistema (1) nell'intorno della retta complessa singolare $x = 0$, ottenendo che tale sistema gode della seguente proprietà: considerata una qualsiasi soluzione, ad ogni aperto limitato Ω', con $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, è possibile associare un intorno di $x = 0$, $R_{\alpha(\Omega')}$, tale che essa sia analitica in $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Nel presente lavoro si ottiene che, *se la matrice $A(y)$ è analitica in un aperto $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$, ferma restando per $B(x, y)$ ed $f(x, y)$ l'ipotesi di analiticità in $R_\alpha \times \Omega$, è possibile associare un tale intorno $R_{\alpha(\Omega')}$ anche ad ogni aperto limitato $\Omega' \subseteq \Omega$ (anzichè $\bar{\Omega}' \subset \Omega$)*, purchè il contorno $\partial\Omega'$, privato al più di punti isolati, sia di classe C^1.

Questa ipotesi sul contorno di Ω' si riesce a ridurre se $A(y) = A$ costante; in questo caso infatti basta che $\partial\Omega'$ sia l'unione di una linea generalmente regolare e di punti isolati.

Se $A(y) = A$ costante è inoltre possibile dare una valutazione del raggio $\alpha(\Omega')$. In ogni caso, se $n > 1$ oppure $0 < \alpha < +\infty$, si ha $\alpha(\Omega') < \alpha$; solo per $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$ si ha $\alpha(\Omega') = \alpha = +\infty$.

Da questo risultato di prolungamento segue pertanto che, *se la matrice $B(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ sono singolari su rette complesse $\{(x, y_l^*): x \in R_\alpha\}$ $(l = 1, \ldots, L)$, mentre $A(y)$ è olomorfa in y_l^*, considerata una qualsiasi soluzione e fissato arbitrariamente un intorno limitato Ω^* dei punti y_l^* (con $\bar{\Omega}^*$ che escluda le eventuali singolarità di $A(y)$), è possibile determinare un intorno di $x = 0$, R_{α^*}* (in generale strettamente contenuto in R_α) *tale che nel campo $R_{\alpha^*} \times \Omega^*$ la soluzione non presenti singolarità diverse da quelle di $B(x, y)$ ed $f(x, y)$.*

Questa proprietà non vale invece nell'intorno di singolarità di $A(y)$, come mostra il comportamento delle soluzioni di una semplice equazione lineare del primo ordine.

Si osserva quindi che *le singolarità di $A(y)$ limitano il campo di analiticità delle soluzioni in modo più forte delle singolarità* (*del tipo sopra precisato*) *di $B(x, y)$ ed $f(x, y)$*; ciò si giustifica ricordando che la possibilità di effettuare il prolungamento analitico delle soluzioni è legata alla natura delle caratteristiche e quindi, in definitiva, ai coefficienti delle derivate parziali.

Se la matrice $B(x, y)$ e il vettore $f(x, y)$ sono singolari su una linea complessa $\{(x, \gamma(x))\}$, si studia il sistema (1) in campi di analiticità per i coefficienti e i termini noti del tipo $R_\alpha \times \Omega$ (con $\Omega \subseteq \gamma\{|x| > \alpha\}$).

Dai risultati ottenuti segue che *considerati i punti singolari $\{(x, \gamma(x)): |x| = \alpha\}$, che si trovano sul contorno, anche se la matrice $A(y)$ è olomorfa in $\gamma(x)$, $\forall |x| = \alpha$, non è possibile prolungare una generica soluzione in un campo $\subseteq R_\alpha \times \Omega$ a distanza arbitrariamente piccola da tali singolarità* (a differenza di quanto avviene nel caso delle rette singolari sopra esaminate).

Un semplice esempio di un'equazione lineare del primo ordine mostra che questo risultato, relativo al prolungamento analitico delle soluzioni in campi del tipo precisato, non è ulteriormente migliorabile.

Nella seconda parte del lavoro, **3**, si considera la seguente equazione lineare di ordine m nell'incognita complessa $\zeta(x, y)$

$$\frac{\partial^m \zeta}{\partial y^m} = x^{m.n} a_1(y) \frac{\partial^m \zeta}{\partial x^m} + x^{(m-1).n} a_2(y) \frac{\partial^m \zeta}{\partial x^{m-1} \partial y} + \ldots + x^n a_m(y) \frac{\partial^m \zeta}{\partial x \partial y^{m-1}} \tag{2}$$

$$+ b_1(x, y) \frac{\partial^{m-1} \zeta}{\partial y^{m-1}} + x^{(m-1).n} b_2(x, y) \frac{\partial^{m-1} \zeta}{\partial x^{m-1}} + \ldots + x^n b_m(x, y) \frac{\partial^{m-1} \zeta}{\partial x \partial y^{m-2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ b_{\sigma(m)-2}(x, y) \zeta_y + x^n b_{\sigma(m)-1}(x, y) \zeta_x + b_{\sigma(m)}(x, y) \zeta + g(x, y) ,$$

dove m, n sono interi $\geqslant 1$ e si è posto per brevità $\sigma(m) = 1 + 2 + \ldots + m$. Tale equazione è caratterizzata dalla proprietà di avere i coefficienti delle derivate parziali di ordine l rispetto ad x $(l = 0, 1, \ldots, m)$ del tipo $x^{l.n} c(x, y)$, dove le funzioni $c(x, y)$ sono arbitrarie, ma dipendono dalla sola y per le derivate di ordine massimo.

Si suppone che le funzioni $a_i(y)$ $(i = 1, \ldots, m)$ siano analitiche (nel senso di Weierstrass) in Ω, le funzioni $b_j(x, y)$ $\big(j = 1, \ldots, \sigma(m)\big)$ e $g(x, y)$ siano analitiche in $R_\alpha \times \Omega$, con il significato dei simboli sopra precisato.

Facciamo notare che l'equazione (2), con $n = 1$, comprende, come casi particolari, due equazioni del secondo ordine studiate in precedenti lavori, precisamente *l'equazione del tipo di Fuchs*

$$y^2 \zeta_{yy} + y\zeta_y + \zeta = x^2 y \zeta_{xx} , \tag{3}$$

studiata in $[\mathbf{1}]_1$, e *l'equazione del tipo ipergeometrico*

$$y(y-1)\zeta_{yy} + [(\alpha + \beta + 1)y - \gamma]\zeta_y + \alpha\beta\zeta = \lambda x^2 \zeta_{xx} + \mu x \zeta_x + \nu\zeta , \tag{4}$$

studiata in $[\mathbf{1}]_2$.

Per tali equazioni si sono ivi ottenute formule di struttura delle soluzioni e da queste sono stati dedotti in particolare teoremi di prolungamento analitico delle soluzioni nell'intorno delle singolarità dei coefficienti e teoremi di esistenza di soluzioni per problemi singolari di Cauchy.

Questi risultati vengono ora estesi all'equazione (2), osservando che mediante la sostituzione

$$
\begin{gathered}
\zeta_1(x, y) = \zeta(x, y)\,, \qquad \zeta_2(x, y) = x^n\zeta_x\,, \qquad \zeta_3(x, y) = \zeta_y\,, \\
\zeta_4(x, y) = x^{2n}\zeta_{xx}\,, \qquad \zeta_5(x, y) = x^n\zeta_{xy}\,, \qquad \zeta_6(x, y) = \zeta_{yy}\,, \dots, \\
\zeta_{\sigma(m-1)}(x, y) = \frac{\partial^{(m-2)}\zeta}{\partial y^{(m-2)}}\,, \quad \zeta_{\sigma(m-1)+1}(x, y) = x^{(m-1).n}\frac{\partial^{(m-1)}\zeta}{\partial x^{(m-1)}}\,, \\
\zeta_{\sigma(m-1)+2}(x, y) = x^{(m-2).n}\frac{\partial^{(m-1)}\zeta}{\partial x^{(m-2)}\,\partial y}\,, \dots, \zeta_{\sigma(m)-1}(x, y) = x^n\frac{\partial^{(m-1)}\zeta}{\partial x\,\partial y^{(m-2)}} \\
\zeta_{\sigma(m)}(x, y) = \frac{\partial^{(m-1)}\zeta}{\partial y^{(m-1)}}\,,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

la (2) viene trasformata nel seguente sistema lineare di ordine $\sigma(m)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta_1}{\partial y} = \zeta_3\,, && \frac{\partial\zeta_2}{\partial y} = x^n\frac{\partial\zeta_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial\zeta_3}{\partial y} = \zeta_6\,, \\
&\frac{\partial\zeta_4}{\partial y} = x^n\frac{\partial\zeta_5}{\partial x} - nx^{n-1}\zeta_5\,, && \frac{\partial\zeta_5}{\partial y} = x^n\frac{\partial\zeta_6}{\partial x},\ \frac{\partial\zeta_6}{\partial y} = \zeta_{10}, \dots, \\
&\frac{\partial\zeta_{\sigma(m-1)}}{\partial y} = \zeta_{\sigma(m)}, \dots, && \frac{\partial\zeta_{\sigma(m)-1}}{\partial y} = x^n\frac{\partial\zeta_{\sigma(m)}}{\partial x}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta_{\sigma(m)}}{\partial y} = {} & x^n\left[a_1(y)\frac{\partial\zeta_{\sigma(m-1)+1}}{\partial x} + a_2(y)\frac{\partial\zeta_{\sigma(m-1)+2}}{\partial x} + \dots + a_m(y)\frac{\partial\zeta_{\sigma(m)}}{\partial x}\right] \\
& + b_1(x, y)\zeta_{\sigma(m)} + [b_2(x, y) - (m-1)nx^{n-1}a_1(y)]\zeta_{\sigma(m-1)+1} \\
& + \dots + [b_m(x, y) - nx^{n-1}a_{m-1}(y)]\zeta_{\sigma(m)-1} + \dots + b_{\sigma(m)-2}(x, y)\zeta_3 \\
& + b_{\sigma(m)-1}(x, y)\zeta_2 + b_{\sigma(m)}(x, y)\zeta_1 + g(x, y)\,.
\end{aligned}
$$

Tale sistema, introdotto il vettore $z(x, y) = \begin{bmatrix} \zeta_1(x,y) \\ \vdots \\ \zeta_{\sigma(m)}(x, y) \end{bmatrix}$, assume la forma vettoriale (1), dove $A(y)$ e $B(x, y)$ sono opportune matrici costruite rispettivamente con i soli coefficienti $a_i(y)$ e con i coefficienti $a_i(y)$, $b_j(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ è il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(x, y) \end{bmatrix}$.

Ne segue che dai teoremi di prolungamento e di esistenza di soluzioni per un problema singolare di Cauchy enunciati in [**1**]$_3$, [**2**]$_2$ e in **2** di questo lavoro si possono dedurre analoghi risultati per l'equazione (2) (risultati che in particolare per le equazioni (3) e (4) erano già stati ottenuti in [**1**]$_1$ e in [**1**]$_2$ direttamente dalla rappresentazione delle soluzioni).

Per l'equazione (2), con $m = 2$, si studia inoltre il seguente *problema di Darboux, singolare* perchè una condizione è assegnata su $x = 0$,

$$\zeta_{yy} = x^{2n} a_1(y)\zeta_{xx} + x^n a_2(y)\zeta_{xy} + b_1(x, y)\zeta_y + x^n b_2(x, y)\zeta_x + b_3(x, y)\zeta + g(x, y) \tag{6}$$

$$\zeta(x, \bar{y}) = \varphi(x)\,, \qquad \zeta(0, y) = \psi(y) \qquad (\bar{y} \in \Omega;\ \varphi(0) = \psi(\bar{y}))\,,$$

dove $\varphi(x)$ è un'arbitraria funzione analitica in R_α.

Si ottiene una condizione sul dato $\psi(y)$ necessaria per l'esistenza di soluzioni; se tale condizione è soddisfatta, si dimostra che il problema (6) ammette infinite soluzioni.

Notiamo che questi risultati si applicano in particolare alle equazioni (3) e (4).

Problemi analoghi sono stati precedentemente studiati in campo reale (v. [**2**]$_1$) e in campo analitico (v. [**3**]). In questi lavori le rette portanti i dati sono entrambe singolari; pertanto i dati non possono essere assegnati ad arbitrio ma sono soggetti entrambi a condizioni, necessarie per l'esistenza di soluzioni. Si danno inoltre condizioni sufficienti per l'esistenza di un'unica soluzione, analitica in [**3**], lipschitziana ed appartenente ad un opportuno spazio funzionale in [**2**]$_1$.

Per l'equazione (2) si dimostra infine un *teorema di rappresentazione delle soluzioni*, dal quale, conoscendo i coefficienti ed il termine noto, è possibile dedurre anche il comportamento delle soluzioni nell'intorno delle singolarità, in modo analogo a quanto ottenuto in [**1**]$_1$ e in [**1**]$_2$ per le equazioni (3) e (4).

2 – Teorema 1 (di prolungamento). *Sia dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} z_y = x^n A(y) z_x + B(x, y) z + f(x, y) \\ z(x, \bar{y}) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (n \geq 1,\ \textit{intero};\ \bar{y} \in \Omega) \tag{7}$$

nell'ipotesi che la matrice $B(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ siano analitici in $R_\alpha \times \Omega$, la matrice $A(y)$ sia analitica in $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ e infine il dato $\varphi(x) = [\varphi_i(x)]$ $(i = 1, \ldots, N)$ sia analitico in R_α.

Per ogni aperto limitato $\Omega' \subseteq \Omega$, avente il contorno $\partial\Omega'$, privato al più di punti isolati, di classe C^1 esiste un numero positivo $\alpha(\Omega')$ tale che la soluzione del problema (7) *sia analitica (in generale polidroma) in $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.*

Se $n > 1$ *oppure* $0 < \alpha < +\infty$, *risulta* $\alpha(\Omega') < \alpha$; *solo nel caso* $n = 1$ *ed* $\alpha = +\infty$ *si ha* $\alpha(\Omega') = \alpha = +\infty$.

Teorema 2. *Siano verificate le ipotesi del Teorema* 1 *per* $B(x, y)$, $f(x, y)$ *e per il dato* $\varphi(x)$; *sia inoltre* $A(y) = A = [a_{ij}]$ *costante. La soluzione del problema* (7) *è allora analitica (in generale polidroma) in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$, *dove* Ω' *è un qualsiasi aperto limitato* $\subseteq \Omega$, *con contorno* $\partial\Omega'$ *costituito da una linea generalmente regolare e da punti isolati. Il raggio* $\alpha(\Omega')$ *si può così valutare*

$$\alpha(\Omega') = \alpha \exp[-2NM(\sigma(\Omega') + \lambda(\Omega'))] \qquad se\ n = 1, \tag{8}$$

$$\alpha(\Omega') = \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 2NM(n-1)(\sigma(\Omega') + \lambda(\Omega'))]^{1/n-1}} \qquad se\ n > 1, \tag{9}$$

dove $M = \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \ldots, N\}$, $\sigma(\Omega') = \sup\{|y - \bar{y}| : y \in \Omega'\}$ *e* $\lambda(\Omega')$ *rappresenta la lunghezza della parte di contorno di* Ω' *che non coincide con il contorno dell'inviluppo convesso di* Ω'.

Osservazione 1. Dai teoremi 1 e 2 segue in particolare che, *se la matrice* $B(x, y)$ *e il termine noto* $f(x, y)$ *sono singolari sulla retta complessa* $\{(x, 0) : x \in R_\alpha\}$, *mentre la matrice* $A(y)$ *è olomorfa in* $y = 0$, *la soluzione del problema* (7) *è analitica in ogni campo del tipo* $R_{\alpha(\beta)} \times S_{0,\beta}(0)$, *dove* $S_{0,\beta}(0) = \{y : 0 < |y| < \beta < +\infty\}$ *è un qualsiasi disco forato* $\subseteq \Omega$ (con $\beta > |\bar{y}|$) *e* $\alpha(\beta)$ *è un conveniente numero positivo o* $\alpha(\beta) = +\infty$.

Se in particolare $A(y) = A$ *costante, risulta*

$$\alpha(\beta) = \alpha \exp[-4NM\beta] \qquad per\ n = 1,$$

$$\alpha(\beta) = \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 4NM(n-1)\beta]^{1/n-1}} \qquad per\ n > 1$$

(si è posto $M = \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \ldots, N\}$).

Se anche la matrice $A(y)$ *è singolare in* $y = 0$, *in generale si può solo affermare* (v. **[1]**$_3$) *che la soluzione del problema* (7) *è analitica in campi del tipo* $R_{\alpha(\gamma,\delta)} \times S_{\gamma,\delta}(0)$, *dove* $S_{\gamma,\delta}(0) = \{y : 0 < \gamma < |y| < \delta < +\infty\}$ *è una qualsiasi corona circolare* (*con* $\gamma < |\bar{y}| < \delta$) *tale che* $\overline{S_{\gamma,\delta}(0)} \subset \Omega$ *e* $\alpha(\gamma, \delta)$ *è un conveniente numero positivo.* Un semplice controesempio è fornito dall'equazione del primo ordine considerata nel Teorema 4 in **[1]**$_3$

$$\zeta_y = \frac{x^n}{y}\zeta_x + b(x, y)\zeta + g(x, y) \qquad (n > 1,\ \text{intero}),$$

dove $b(x, y)$ e $g(x, y)$ sono arbitrarie funzioni analitiche $\forall(x, y)$, con $y \neq 0$. Nella successiva Osservazione 5 si vede infatti che, per le soluzioni $\zeta(x, y)$ ottenute partendo da dati $\zeta(x, \bar{y})$ (con $\bar{y} \neq 0$) trascendenti intere, risulta

$$\alpha(\gamma, \delta) = \frac{1}{[(n-1)(\mu^2(\gamma, \delta) + \pi^2)^{\frac{1}{2}}]^{1/n-1}}\,, \quad \text{dove } \mu(\gamma, \delta) = \max\left\{\log^* \frac{|\bar{y}|}{\gamma}, \log^* \frac{\delta}{|\bar{y}|}\right\}$$

e quindi
$$\lim_{\gamma \to 0} \alpha(\gamma, \delta) = 0\,.$$

Osservazione 2. Consideriamo ora un semplice esempio di un'equazione lineare del primo ordine che permette di chiarire i risultati di prolungamento ottenuti nel caso in cui i coefficienti e i termini noti siano singolari su una linea complessa $\{(x, \gamma(x))\}$.

Sia dato il problema di Cauchy

$$\zeta_y = Mx\zeta_x - \frac{Mx+1}{y-x}\zeta + \frac{1}{(y-x)(x-\alpha)}\,, \quad \zeta(x, \bar{y}) = \varphi(x) \quad (\bar{y} \in S_{\alpha,+\infty}(0))\,,$$

con $\varphi(x)$ analitica in R_α. Dai teoremi 1 e 2 segue che, *considerata una qualsiasi corona circolare* $S_{\alpha,\beta}(0)$ (*con* $\alpha < |\bar{y}| < \beta < +\infty$), *la soluzione* $\zeta(x, y)$ *è analitica in un campo* $R_{\alpha(\beta)} \times S_{\alpha,\beta}(0)$, *con* $\alpha(\beta) < \alpha$ *conveniente.*

Ci si chiede se questo risultato sia migliorabile, nel senso che si possa ulteriormente prolungare $\zeta(x, y)$ in tutto il campo $R_\alpha \times S_{\alpha,\beta}(0)$, fino cioè ai punti singolari (x, x), con $|x| = \alpha$. La risposta è negativa, osservato che la soluzione

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{y-x}\left\{(\bar{y} - x\exp[-M(\bar{y}-y)])\,\varphi(x\exp[-M(\bar{y}-y)]) + \frac{\bar{y}-y}{\alpha} + \frac{1}{M\alpha}\log\frac{x\exp[-M(\bar{y}-y)]-\alpha}{x-\alpha}\right\}$$

è analitica in $R_{\alpha(\beta)} \times S_{\alpha,\beta}(0)$, dove $\alpha(\beta) = \alpha\exp[M(Re\bar{y} - \beta)] < \alpha$.

Si vede quindi che *ai punti singolari* (x, x), *con* $|x| = \alpha$, *non è possibile avvicinarsi indefinitamente con campi di analiticità del tipo considerato.*

3 – I prossimi quattro enunciati, relativi all'equazione (2), sono strettamente legati, tramite la sostituzione (5), a risultati ottenuti in **[1]**$_3$, **[2]**$_2$ e in **2** di questo lavoro; ne omettiamo pertanto la dimostrazione.

Teorema 3 (di prolungamento). *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\text{(10)} \qquad \textit{equazione (2)}, \qquad \frac{\partial^{(i-1)}\zeta}{\partial y^{(i-1)}}(x, \bar{y}) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \bar{y} \in \Omega)\,,$$

nell'ipotesi che i coefficienti $a_i(y)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *siano analitici in* Ω, *i coefficienti* $b_j(x, y)$ $(j = 1, \ldots, \sigma(m))$ *e il termine noto* $g(x, y)$ *siano analitici in* $R_\alpha \times \Omega$ *e infine i dati* $\varphi_i(x)$ *siano analitici in* R_α.

Per ogni aperto limitato Ω', *con* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, *esiste un numero positivo* $\alpha(\Omega')$ *tale che la soluzione sia analitica (in generale polidroma) in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Teorema 4 (di prolungamento). *Se* $n = 1$ *ed* $\alpha = +\infty$ *la soluzione del problema* (10) *è analitica (in generale polidroma) in tutto il campo* $R_\infty \times \Omega$.

Teorema 5 (di prolungamento). *Siano verificate le ipotesi del Teorema* 3 *ed inoltre i coefficienti* $a_i(y)$ $(i=1, \ldots, m)$ *siano analitici in un aperto* $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$.

La soluzione del problema (10) *è allora analitica (in generale polidroma) in ogni campo* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$, *dove* Ω' *è un qualsiasi aperto limitato* $\subseteq \Omega$ *(anzichè* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$*), con contorno* $\partial\Omega'$ *del tipo precisato nel Teorema* 1, *e* $\alpha(\Omega')$ *è conveniente.*

Se in particolare i coefficienti a_i *sono costanti, la precedente affermazione vale per aperti limitati* $\Omega' \subseteq \Omega$ *con contorno* $\partial\Omega'$ *del tipo precisato nel Teorema* 2; *inoltre il raggio* $\alpha(\Omega')$ *può essere valutato, rispettivamente nel caso* $n=1$ *o* $n>1$, *mediante la* (8) *o la* (9) *in cui si ponga* $N = \sigma(m)$ *e* $M = \max\{1, |a_i| : i = 1, \ldots, m\}$.

Teorema 6 (di esistenza). *Si consideri il problema singolare di Cauchy*

$$\text{(11)} \qquad \textit{equazione (2)}, \qquad \frac{\partial^{(i-1)}\zeta}{\partial x^{(i-1)}}(0, y) = \psi_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, m)\,,$$

nelle stesse ipotesi del Teorema 3 *per i coefficienti e il termine noto della* (2).

Il problema (11) *non ammette soluzione se le funzioni* $\psi_i(y)$ *non soddisfano le equazioni lineari ordinarie di ordine* m *che si ottengono la prima dall'equazione* (2) *in cui si ponga* $x = 0$, *le successive derivando* $(m - 1)$ *volte la* (2) *rispetto ad* x *e sostituendo* $x = 0$.

Se $\psi_i(y)$ *sono integrali di tali equazioni, è possibile assegnare i dati iniziali* $(\partial^{(i-1)}\zeta/\partial y^{(i-1)})(x, \bar{y}) = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m;\ \bar{y} \in \Omega)$, *analitici in* R_α, *in modo largamente arbitrario, in quanto essi devono soddisfare le sole condizioni*

$$\frac{\mathrm{d}^{(l-1)}\varphi_i}{\mathrm{d}x^{(l-1)}}(0) = \frac{\mathrm{d}^{(i-1)}\psi_l}{\mathrm{d}y^{(i-1)}}(\bar{y}) \qquad (i, l = 1, \ldots, m)\,.$$

Si ottengono in corrispondenza infinite soluzioni il cui campo di analiticità viene precisato dai teoremi 3, 4 *e* 5.

I risultati che seguono, a differenza dei precedenti esposti in questo paragrafo, sono ottenuti *direttamente dall'equazione* (2); essi sono relativi al problema singolare di Darboux (6) ed alla rappresentazione delle soluzioni della (2).

Enunciamo e dimostriamo per semplicità il teorema di rappresentazione nel caso $m = 2$ ed $n = 1$, caso che generalizza le equazioni (3) e (4). L'estensione ad m ed n qualsiasi non comporta infatti nessuna difficoltà ma soltanto pesantezza formale.

Teorema 7 (di esistenza). *Sia assegnato il problema singolare di Darboux* (6), *nelle stesse ipotesi del Teorema* 3 *per i coefficienti e il termine noto della* (2), *e sia il dato* $\varphi(x)$ *un'arbitraria funzione analitica in* R_α.

Tale problema non ammette soluzione se il dato $\psi(y)$ *non soddisfa l'equazione lineare ordinaria*

$$\psi''(y) = b_1(0, y)\psi'(y) + b_3(0, y)\psi(y) + g(0, y) . \tag{12}$$

Se $\psi(y)$ *è integrale della* (12) *il problema* (6) *ammette infinite soluzioni il cui campo di analiticità viene precisato dai teoremi* 3, 4 *e* 5.

Teorema 8 (di rappresentazione). *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} &\zeta_{yy} = x^2 a_1(y)\zeta_{xx} + x a_2(y)\zeta_{xy} + b_1(x, y)\zeta_y + x b_2(x, y)\zeta_x + b_3(x, y)\zeta + g(x, y), \\ &\zeta(x, \bar{y}) = \varphi_1(x) , \qquad \zeta_y(x, \bar{y}) = \varphi_2(x) \qquad (\bar{y} \in \Omega) , \end{aligned} \tag{13}$$

nelle stesse ipotesi del Teorema 3.

La soluzione è allora dotata del seguente sviluppo in serie di potenze di x: $\zeta(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_k(y) x^k$, *dove i coefficienti* $\zeta_k(y)$ *sono analitici in tutto* Ω, *in quanto risolvono i seguenti problemi di Cauchy per equazioni lineari ordinarie (dipendenti da* k)

$$\begin{aligned} \zeta_k'' = &\big(k a_2(y) + b_{10}(y)\big)\zeta_k' + \big(k(k-1)a_1(y) + k b_{20}(y) + b_{30}(y)\big)\zeta_k \\ &+ g_k(y) + \sum_{l=1}^{k} \{b_{1l}(y)\zeta_{k-l}' + [(k-l)b_{2l}(y) + b_{3l}(y)]\zeta_{k-l}\} , \\ \zeta_k(\bar{y}) = &\,\varphi_{1k} , \qquad \zeta_k'(\bar{y}) = \varphi_{2k} , \end{aligned} \tag{14}$$

(*si è posto*: $b_{jl}(y) = (1/l!)(\partial^l b_j/\partial x^l)(0, y)$, $g_k(y) = (1/k!)(\partial^k g/\partial x^k)(0, y)$, $\varphi_{ik} = (1/k!)(d^k \varphi_i/dx^k)(0)$, *con* $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $k, l = 0, 1, \dots$).

4 - Dim. del Teorema 1. Se si ha $\partial\Omega = \emptyset$ (cioè $\Omega = C$) oppure la distanza (euclidea) $d(\partial\Omega', \partial\Omega) > 0$, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 2 in $[1]_3$, da cui segue la tesi, qualunque sia il contorno $\partial\Omega'$.

Sia ora $d(\partial\Omega', \partial\Omega) = 0$; *è possibile, in questo caso, per l'ipotesi fatta sul contorno* $\partial\Omega'$, *costruire un aperto limitato* $\Omega'' \subset \Omega'$, *con* $\bar{\Omega}'' \subset \Omega$, *in modo tale da poter ricoprire* $\Omega' - \Omega''$ *mediante cerchi con centri in* Ω'', *contenuti in* Ω', *di uguale raggio* β *conveniente.*

(Un modo per costruire Ω'' è il seguente: considerata una generica linea chiusa regolare λ facente parte del contorno di Ω', si costruisca in Ω' una linea Λ "parallela" (nel senso che λ e Λ hanno in comune in ogni loro punto la normale) e a distanza β da λ, con β sufficientemente piccolo in modo tale che, $\forall \tilde{y} \in \Lambda$, il cerchio $S_\beta(\tilde{y})$ sia interamente contenuto in Ω'. Se il contorno $\partial\Omega'$ è costituito anche da punti isolati, costruiamo intorno a ciascuno di essi una circonferenza Γ di raggio β sufficientemente piccolo in modo tale che, $\forall \tilde{y} \in \Gamma$, si abbia $S_\beta(\tilde{y}) \subset \Omega'$. Sia Ω'' un qualsiasi aperto limitato $\subset \Omega'$, con $\bar{\Omega}'' \subset \Omega$, che contenga le linee (regolari) Λ e le circonferenze Γ; esso gode della proprietà che, $\forall y^* \in \Omega' - \Omega''$, esiste un punto $\tilde{y} \in \Lambda$ (o $\in \Gamma$) tale che $y^* \in S_\beta(\tilde{y}) (\subset \Omega')$).

Fissiamo inoltre un numero positivo $\tilde{\beta} > \beta$, arbitrariamente se $\partial\tilde{\Omega} = \emptyset$ (cioè $\tilde{\Omega} = C$), in modo tale che $\beta < \tilde{\beta} < \beta + d(\partial\Omega', \partial\tilde{\Omega})$ se $\partial\tilde{\Omega} \neq \emptyset$ e indichiamo con $\tilde{\tilde{\Omega}}$ un qualsiasi aperto limitato, con $\bar{\tilde{\tilde{\Omega}}} \subset \tilde{\Omega}$, per cui risulti $d(\partial\Omega', \partial\tilde{\tilde{\Omega}}) \geqslant \tilde{\beta} - \beta$ ($\tilde{\tilde{\Omega}}$ gode allora della proprietà che, $\forall \tilde{y} \in \Lambda$ (o $\in \Gamma$), si ha $S_{\tilde{\beta}}(\tilde{y}) \subset \tilde{\tilde{\Omega}}$).

Essendo Ω'' *limitato e* $\bar{\Omega}'' \subset \Omega$, *in base al Teorema 2 in* $[1]_3$ *esiste un numero positivo* $\alpha(\Omega'') \leqslant \alpha$ *tale che la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *sia analitica in* $R_{\alpha(\Omega'')} \times \Omega''$.

Fissiamo ora l'attenzione su un generico punto $y^* \in \Omega' - \Omega''$ e sia $\tilde{y} \in \Omega''$ tale che $y^* \in S_\beta(\tilde{y}) \subset \Omega'$.

Dimostriamo che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *è prolungabile analiticamente in tutto il campo* $R_{\alpha(\beta)} \times \{\Omega'' \cup S_\beta(\tilde{y})\}$, *dove*

$$\alpha(\beta) = \alpha(\Omega'') \left(\frac{\tilde{\beta} - \beta}{\tilde{\beta} + \beta}\right)^{NM\tilde{\beta}} \qquad \textit{se } n = 1, \tag{15}$$

$$\alpha(\beta) = \frac{1}{\{1/(\alpha(\Omega''))^{n-1} + 2(n-1) NM\tilde{\beta}[(\log^* (\tilde{\beta} - \beta)/\tilde{\beta})^2 + (\arcsin \beta/\tilde{\beta})^2]^{1/2}\}^{1/n-1}} \tag{16}$$

$$\textit{se } n > 1,$$

con M *opportuna costante che non dipende da* y^*.

Infatti, considerato il problema di Cauchy con dato $z(x, \tilde{y}) = [\zeta_i(x, \tilde{y})]$ ($i = 1, \dots, N$) analitico in $R_{\alpha(\Omega'')}$ e *scelti arbitrariamente due numeri positivi*

$\alpha' < \alpha(\Omega'')$, $\beta' < \beta$, a tale problema è possibile associare il seguente problema maggiorante in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\tilde{y})$:

$$Z_y = x^n \frac{M}{1-(y-\tilde{y})/\tilde{\beta}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Z_x \tag{17}$$

$$+ \frac{M_1}{(1-x/\alpha')\ (1-(y-\tilde{y})/\beta')} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Z + \frac{M_1}{(1-x/\alpha')\ (1-(y-\tilde{y})/\beta')} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Z(x, \tilde{y}) = \Phi(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove

$$Z(x, y) = [Z_i(x, y)] \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

$$M = \max\{|a_{ij}(y)| : y \in \bar{\bar{\Omega}};\ i, j = 1, \ldots, N\},$$

$$M_1 = M_1(\alpha', \beta') = \max\{|b_{ij}(x, y)|,\ |f_i(x, y)| : (x, y) \in \overline{R_{\alpha'}} \times \overline{S_{\beta'}(\tilde{y})};\ i, j = 1, \ldots, N\},$$

$\Phi(x)$ è una funzione analitica in $R_{\alpha(\Omega'')}$ maggiorante di tutti i dati $\zeta_i(x, \tilde{y})$. La soluzione $Z(x, y)$ del problema (17) sarà quindi maggiorante della soluzione $z(x, y)$ del problema con dato il vettore $z(x, \tilde{y})$. Ora è immediato verificare che $Z(x, y)$, analitica per il teorema di Cauchy-Kowalewski in un conveniente intorno di $(0, \tilde{y})$, ha tutte le componenti uguali alla funzione $w(x, y)$ che risolve il seguente problema di Cauchy (per un'equazione lineare del primo ordine)

$$\begin{aligned} w_y &= x^n \frac{NM}{1-(y-\tilde{y})/\tilde{\beta}} w_x + \frac{NM_1}{(1-x/\alpha')\ (1-(y-\tilde{y})/\beta')} w \\ &\qquad + \frac{M_1}{(1-x/\alpha')(1-(y-\tilde{y})/\beta')}, \\ w(x, \tilde{y}) &= \Phi(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Integrando il sistema delle caratteristiche, si deduce un'espressione integrale di $w(x, y)$ che permette di determinarne il campo di analiticità in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\tilde{y})$. Infatti il sistema caratteristico associato al problema (18) è il seguente

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{NM}{1-(y-\tilde{y})/\tilde{\beta}} x^n(t), \qquad y'(t) = -1, \\ w'(t) &= -\frac{NM_1}{(1-x/\alpha')\ (1-(y-\tilde{y})/\beta')} w(t) - \frac{M_1}{(1-x/\alpha')\ (1-(y-\tilde{y})/\beta')}, \end{aligned} \tag{19}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = \tau$, $y(0) = \tilde{y}$, $w(0) = \Phi(\tau)$.

Ne segue che, *nel caso* $n = 1$, la soluzione del problema (18), in forma parametrica, è data da [1]

$$(20)\qquad \begin{aligned} x(t,\tau) &= \tau\Big(1+\frac{t}{\tilde\beta}\Big)^{NM\tilde\beta}, \qquad y(t,\tau) = -t+\tilde y, \\ w(t,\tau) &= \exp\Big[-NM_1\alpha'\int_0^t \frac{du}{(1+u/\beta')(\alpha'-\tau(1+u/\tilde\beta)^{NM\tilde\beta})}\Big] \end{aligned}$$

$$-\Big\{\Phi(\tau)-M_1\alpha'\int_0^t \frac{\exp\big[NM_1\alpha'\int_0^u dv/(1+v/\beta')(\alpha'-\tau(1+v/\tilde\beta)^{NM\tilde\beta})\big]}{(1+u/\beta')(\alpha'-\tau(1+u/\tilde\beta)^{NM\tilde\beta})}\,du\Big\}.$$

Tale soluzione può anche essere posta nella forma $w = w(x, y)$, osservato che, esplicitando le prime due delle equazioni (20) rispetto a t e τ, si ha

$$(21)\qquad t(x,y) = \tilde y - y, \qquad \tau(x,y) = x\Big(1+\frac{\tilde y - y}{\tilde\beta}\Big)^{-NM\tilde\beta}.$$

Dimostriamo ora che *la soluzione maggiorante* $w(x, y)$ *è analitica nel campo* $R_{\alpha(\beta')}\times S_{\beta'}(\tilde y)$, *dove*

$$(22)\qquad \alpha(\beta') = \alpha'\Big(\frac{\tilde\beta-\beta'}{\tilde\beta+\beta'}\Big)^{NM\tilde\beta}.$$

A tale scopo osserviamo che la funzione $w(t, \tau)$ definita dalla (20) è analitica nel campo $\{|t| < \beta'\}\times\{|\tau| < \alpha'(1+\beta'/\tilde\beta)^{-NM\tilde\beta}\}$. (Ivi infatti risulta $|\tau| < \alpha(\Omega'')$, $|\tau(1+t/\tilde\beta)^{NM\tilde\beta}| < \alpha'$). Tenuto inoltre conto che le funzioni $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$ sono analitiche in tutto $R_{\alpha'}\times S_{\beta'}(\tilde y)$, si deduce che la soluzione $w(t(x, y), \tau(x, y))$ è analitica nel campo, contenuto in $R_{\alpha'}\times S_{\beta'}(\tilde y)$, immagine inversa secondo la trasformazione (21) di $\{|t| < \beta'\}\times\{|\tau| < \alpha'(1+\beta'/\tilde\beta)^{-NM\tilde\beta}\}$, cioè nel campo

$$\{(x,y)\in R_{\alpha'}\times S_{\beta'}(\tilde y):\ |t(x,y)| < \beta',\ |\tau(x,y)| < \alpha'\Big(1+\frac{\beta'}{\tilde\beta}\Big)^{-NM\tilde\beta}\}$$

$$= \{(x,y):\ |x| < \alpha',\ |y-\tilde y| < \beta',\ |x| < \alpha'\Big(1+\frac{\beta'}{\tilde\beta}\Big)^{-NM\tilde\beta}\Big|1+\frac{\tilde y - y}{\tilde\beta}\Big|^{NM\tilde\beta}\}.$$

---

[1] In questa e nelle successive formule relative alla soluzione del problema (18) facciamo riferimento alla determinazione principale delle funzioni polidrome che intervengono.

Risulta quindi

$$\alpha(\beta')= \inf \{\alpha'(\frac{|\tilde\beta+\tilde y-y|}{\tilde\beta+\beta'})^{NM\tilde\beta} : y\in\overline{S_{\beta'}(\tilde y)}\} = \alpha'(\frac{\tilde\beta-\beta'}{\tilde\beta+\beta'})^{NM\tilde\beta} .$$

Veniamo ora al *caso* $n>1$.

Integrando il sistema (19) con le condizioni iniziali sopra precisate, si ottiene, per la soluzione del problema (18), la seguente forma parametrica

$$\begin{aligned} &x(t,\tau)=\frac{\tau}{[1+(1-n)NM\tilde\beta\tau^{n-1}\log(1+t/\tilde\beta)]^{1/n-1}}, \quad y(t,\tau)=-t+\tilde y,\\ (23)\quad &w(t,\tau)=(1+\frac{t}{\beta'})^{-NM_1\beta'}\exp[-NM_1\tau\int_0^t\frac{du}{(1+u/\beta')(\alpha' d(u,\tau)-\tau)}]\\ &\qquad -\{\Phi(\tau)-M_1\alpha'\int_0^t(1+\frac{u}{\beta'})^{NM_1\beta'-1}\frac{d(u,\tau)}{\alpha' d(u,\tau)-\tau}\\ &\qquad\qquad \exp[NM_1\tau\int_0^u\frac{dv}{(1+v/\beta')(\alpha' d(v,\tau)-\tau)}]\,du\}, \end{aligned}$$

dove si è usata, per brevità, la notazione $d(t,\tau)=[1+(1-n)NM\tilde\beta\tau^{n-1}\cdot\log(1+t/\tilde\beta)]^{1/n-1}$.

La soluzione del problema (18) può anche essere posta nella forma $w=w(x,y)$ osservato che, esplicitando le prime due delle equazioni (23) rispetto a t e τ, si ha

$$\begin{aligned} &t(x,y)=\tilde y-y,\\ (24)\quad &\tau(x,y)=\frac{x}{[1+(n-1)NM\tilde\beta x^{n-1}\log(1+(\tilde y-y)/\tilde\beta)]^{1/n-1}}. \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo al caso $n=1$, si dimostra che *la soluzione maggiorante* $w(x,y)$ *è analitica in un campo* $R_{\alpha(\beta')}\times S_{\beta'}(\tilde y)$, dove però ora

$$(25)\quad \alpha(\beta')=\frac{1}{\{1/(\alpha')^{n-1}+2(n-1)NM\tilde\beta[(\log^*(\tilde\beta-\beta')/\tilde\beta)^2+(\arcsin\beta'/\tilde\beta)^2]^{1/2}\}^{1/n-1}}.$$

Si può pertanto concludere che, *sia nel caso* $n=1$ *come* $n>1$, *la soluzione* $z(x,y)$ *del problema con dato il vettore* $z(x,\tilde y)$ *è anche essa analitica*, $\forall\beta'<\beta$, *nell'intorno* $R_{\alpha(\beta')}\times S_{\beta'}(\tilde y)$, dove il raggio $\alpha(\beta')$ è definito dalle (22) e (25) rispettivamente nei due casi.

Utilizzando problemi maggioranti del tipo (18), *con* $\alpha' < \alpha(\Omega'')$ *e* $\beta' < \beta$ *arbitrari*, si deduce inoltre, in base alle (22) e (25), che $z(x, y)$ *è analitica in tutto l'intorno* $R_{\alpha(\beta)} \times S_\beta(\bar{y})$, con $\alpha(\beta)$ dato dalla (15) o dalla (16) a seconda che si abbia $n = 1$ oppure $n > 1$.

Si vede quindi che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema di partenza* (7) *è prolungabile analiticamente nel campo* $R_{\alpha(\beta)} \times \{\Omega'' \cup S_\beta(\bar{y})\}$.

Poichè l'aperto $\Omega' - \Omega''$ si può interamente ricoprire mediante cerchi $S_\beta(\bar{y}) \subset \Omega'$, con centri $\bar{y} \in \Omega''$ e ad essi si può associare lo stesso intorno $R_{\alpha(\beta)}$ di $x = 0$, si conclude che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *è prolungabile analiticamente in tutto il campo* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$ *con* $\alpha(\Omega') = \alpha(\beta)$.

In base alle (15) e (16) risulta $\alpha(\Omega') < \alpha$ se $n > 1$ oppure $0 < \alpha < +\infty$; solo nel caso $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$, essendo $\alpha(\Omega'') = +\infty$, si ha $\alpha(\Omega') = +\infty$.

Dim. del Teorema 2. In base al teorema di Cauchy-Kowalewski il problema (7) ammette un'unica soluzione analitica in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$.

Partiamo da questo intorno per effettuare il prolungamento analitico, limitandoci per il momento a ragionare nel campo $R_\alpha \times S_\beta(\bar{y})$, dove β è la distanza di $\bar{y}$ dal contorno $\partial\Omega$ di Ω.

Fissati arbitrariamente due numeri positivi $\alpha' < \alpha$ *e* $\beta' < \beta$, osserviamo che al problema (7) è possibile associare il seguente problema maggiorante in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$

$$(26) \quad Z_y = Mx^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Z_x + \frac{M_1}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Z$$

$$+ \frac{M_1}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Z(x, \bar{y}) = \Phi(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove: $Z(x, y) = [Z_i(x, y)]$ $(i = 1, \ldots, N)$; $M = \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \ldots, N\}$; $M_1 = M_1(\alpha', \beta') = \max\{|b_{ij}(x, y)|, |f_i(x, y)| : (x, y) \in \overline{R_{\alpha'}} \times \overline{S_{\beta'}(\bar{y})};\ i, j = 1, \ldots, N\}$; $\Phi(x)$ è una funzione analitica in R_α, maggiorante di tutti i dati $\varphi_i(x)$.

La soluzione $Z(x, y)$ del problema (26) sarà quindi maggiorante della soluzione $z(x, y)$ del problema di partenza (7).

Ora è immediato verificare che $Z(x, y)$, analitica sempre per il teorema di

Cauchy-Kowalewski in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$, ha tutte le componenti uguali alla funzione $w(x, y)$ che risolve il seguente problema di Cauchy (per un'equazione lineare del primo ordine)

$$
(27) \qquad \begin{aligned}
& w_y = NMx^n w_x + \frac{M_1 N}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}\, w + \frac{M_1}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}\,, \\
& w(x, \bar{y}) = \Phi(x)\,.
\end{aligned}
$$

Integrando il sistema caratteristico associato

$$
x'(t) = NMx^n(t)\,, \qquad y'(t) = -1\,,
$$

$$
w'(t) = -\frac{M_1 N}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}\, w(t) - \frac{M_1}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}\,,
$$

con le condizioni iniziali $x(0) = \tau$, $y(0) = \bar{y}$, $w(0) = \Phi(\tau)$, si deduce un'espressione integrale di $w(x, y)$ che permette di determinarne il campo di analiticità in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$. Si ottiene così che *la soluzione maggiorante* $w(x, y)$ *è analitica nell'intorno* $R_{\alpha(\beta')} \times S_{\beta'}(\bar{y})$, *dove*

$$
(28) \qquad \alpha(\beta') = \alpha' \exp[-2MN\beta'] \qquad \textit{se } n = 1\,,
$$

$$
(29) \qquad \alpha(\beta') = \frac{1}{[1/(\alpha')^{n-1} + 2MN(n-1)\beta']^{1/n-1}} \qquad \textit{se } n > 1\,.
$$

Ne segue che la soluzione $z(x, y)$ del problema di partenza (7) è anch'essa analitica, $\forall \beta' < \beta$, nell'intorno $R_{\alpha(\beta')} \times S_{\beta'}(\bar{y})$ appena definito.

Utilizzando problemi maggioranti del tipo (27) *con* $\alpha' < \alpha$ *e* $\beta' < \beta$ *arbitrari*, si deduce infine, in base alle (28) e (29), che $z(x, y)$ *è analitica in tutto il campo* $R_{\alpha(\beta)} \times S_\beta(\bar{y})$, *con*

$$
(30) \qquad \alpha(\beta) = \alpha \exp[-2MN\beta] \qquad \textit{se } n = 1\,,
$$

$$
(31) \qquad \alpha(\beta) = \frac{1}{[(1/\alpha^{n-1}) + 2MN(n-1)\beta]^{1/n-1}} \qquad \textit{se } n > 1\,.
$$

Prendiamo ora in esame *l'aperto limitato* $\Omega' \subseteq \Omega$, supponendo dapprima che esso sia *semplicemente connesso* (e naturalmente contenga $\bar{y}$).

Considerato un *punto qualsiasi* $y^* \in \Omega'$ e detta β^* la distanza di y^* dal contorno $\partial\Omega'$ di Ω', dimostriamo che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *è prolungabile analiticamente in un intorno* $R_{\alpha(\beta^*)} \times S_{\beta^*}(y^*)$, con $\alpha(\beta^*)$ conveniente.

Infatti, essendo Ω' connesso, è possibile congiungere $\bar{y}$ ad y^* con una linea $\Gamma \subset \Omega'$ generalmente regolare. Ricopriamo Γ con un numero finito di cerchi $S_{\beta_1}(y_1 = \bar{y})$, $S_{\beta_2}(y_2)$, ..., $S_{\beta_L = \beta^*}(y_L = y^*)$, aventi i centri su Γ, raggi minori o uguali alla distanza dei centri da $\partial\Omega'$ e tali che ciascuno contenga il centro del successivo. Assegnato il nuovo problema di Cauchy con dato il vettore $z(x, y_2)$, analitico in $R_{\alpha(\beta_1)}$ (essendo $y_2 \in S_{\beta_1}(\bar{y})$), dalle (30) e (31) segue che la soluzione $z(x, y)$ del problema (7) è prolungabile analiticamente in $R_{\alpha(\beta_2)} \times \{S_{\beta_1}(y_1) \cup S_{\beta_2}(y_2)\}$, dove

$$\alpha(\beta_2) = \alpha \exp[-2MN(\beta_1 + \beta_2)] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta_2) = \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 2MN(n-1)\;(\beta_1 + \beta_2)]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1\,.$$

Considerando successivamente gli $(L-1)$ problemi di Cauchy con dati i vettori $z(x, y_l)$, analitici in $R_{\alpha(\beta_{l-1})}$ $(l = 2, ..., L)$, si riesce a prolungare analiticamente la soluzione $z(x, y)$ nel campo $R_{\alpha(\beta^*)} \times \{\bigcup_{l=1}^{L} S_{\beta_l}(y_l)\}$, dove

$$\alpha(\beta^*) = \alpha \exp[-2MN(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta^*)] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta^*) = \frac{1}{[(1/\alpha^{n-1}) + 2MN(n-1)(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta^*)]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1;$$

tale campo contiene in particolare l'intorno $R_{\alpha(\beta^*)} \times S_{\beta^*}(y^*)$.

Osserviamo che, *essendo* Ω' *semplicemente connesso, il prolungamento di* $z(x, y)$ *nell'intorno di* $(0, y^*)$ *è indipendente dalla scelta della linea* $\Gamma \subset \Omega'$ *generalmente regolare, congiungente* $\bar{y}$ *ad* y^* (cfr. [4], Cap. 1, § 6, p. 43).

Per dare una stima di $\alpha(\beta^*)$ che permetta di dimostrare l'esistenza del raggio $\alpha(\Omega')$, supponiamo preliminarmente che Ω' *sia anche convesso, oppure prolungabile in un aperto limitato e convesso* $\subseteq \Omega$, che indichiamo ancora con lo stesso simbolo Ω'.

In questo caso infatti è possibile congiungere un punto qualsiasi $y^* \in \Omega'$ ad $\bar{y}$ con un segmento $\sigma_{\bar{y},y^*} \subset \Omega'$ e ricoprire $\sigma_{\bar{y},y^*}$ mediante un numero finito di cerchi $S_{\beta_1}(y_1 = \bar{y})$, ..., $S_{\beta_L = \beta^*}(y_L = y^*)$, del tipo sopra precisato, in modo tale che si abbia $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta^* < |\bar{y} - y^*| + \beta^* + \varepsilon/(1-\varepsilon)$, con $0 < \varepsilon < 1$ arbitrario. Ne segue, *per l'arbitrarietà di* ε, che

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \alpha \exp[-2MN(|\bar{y} - y^*| + \beta^*)] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 2MN(n-1)(|\bar{y} - y^*| + \beta^*)]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1\,.$$

Osserviamo inoltre che, *essendo* Ω' *limitato*, risulta, $\forall y^* \in \Omega'$, $|\bar{y} - y^*| + \beta^* \leqslant \sup\{|\bar{y} - y| : y \in \Omega'\} = \sigma(\Omega')$ e quindi

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \alpha \exp[-2MN\sigma(\Omega')] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 2MN(n-1)\,\sigma(\Omega')]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1\,.$$

Se ne deduce che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *è prolungabile analiticamente in tutto il campo convesso* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$, dove

$$\alpha(\Omega') = \alpha \exp[-2MN\sigma(\Omega')] \qquad \text{per } n = 1\,,$$

$$\alpha(\Omega') = \frac{1}{[1/\alpha^{n-1} + 2MN(n-1)\sigma(\Omega')]^{1/n-1}} \qquad \text{per } n > 1\,.$$

Sia ora *l'aperto* Ω' *semplicemente connesso ma non convesso e con l'inviluppo convesso* Ω'_c *non contenuto in* Ω.

Se y^* è un punto di Ω' tale che il segmento $\sigma_{\bar{y},y^*}$ non sia interamente contenuto in Ω', è possibile congiungere $\bar{y}$ ad y^* con una linea $\Gamma \subset \Omega'$ generalmente regolare e ricoprire Γ mediante un numero finito di cerchi $S_{\beta_1}(y_1 = \bar{y}), \ldots, S_{\beta^*}(y^*)$ in modo tale che si abbia $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta^* < |\bar{y} - y^*| + \lambda(\Omega') + \beta^* + \varepsilon(/1-\varepsilon)'$, dove $\lambda(\Omega')$ *rappresenta la lunghezza della parte di contorno di* Ω' *non coincidente con il contorno di* Ω'_c e $0 < \varepsilon < 1$ *è arbitrario*.

Ne segue che *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (7) *è prolungabile analiticamente in un intorno* $R_{\alpha(\beta^*)} \times S_{\beta^*}(y^*)$, dove (per l'arbitrarietà di ε)

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \alpha \exp[-2MN(|\bar{y} - y^*| + \lambda(\Omega') + \beta^*)] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \frac{1}{[(1/\alpha^{n-1}) + 2MN(n-1)(|\bar{y} - y^*| + \lambda(\Omega') + \beta^*)]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1\,.$$

Essendo inoltre, $\forall y^* \in \Omega'$, $|\bar{y} - y^*| + \beta^* \leqslant \sigma(\Omega')$ e quindi

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \alpha \exp[-2MN(\sigma(\Omega') + \lambda(\Omega'))] \qquad \text{se } n = 1\,,$$

$$\alpha(\beta^*) \geqslant \frac{1}{[(1/\alpha^{n-1}) + 2MN(n-1)(\sigma(\Omega') + \lambda(\Omega'))]^{1/n-1}} \qquad \text{se } n > 1\,,$$

si conclude che anche in questo caso $z(x, y)$ *è prolungabile analiticamente in tutto il campo semplicemente connesso* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$, con $\alpha(\Omega')$ dato dalla (8) o dalla (9) a seconda che si abbia rispettivamente $n = 1$, oppure $n > 1$.

Sia infine *l'aperto Ω' molteplicemente connesso.*

Possiamo sempre supporre che Ω' abbia ordine di connessione finito ($\leqslant$ dell'ordine di connessione di Ω) ed inoltre contenga $\bar{y}$. Detto $r(\geqslant 2)$ l'ordine di connessione di Ω', si può allora pensare Ω' come unione di $(r-1)$ (se $r \geqslant 3$, 2 se $r=2$) aperti limitati Ω'_s semplicemente connessi, con contorno $\partial\Omega'_s$ generalmente regolare, tutti contenenti $\bar{y}$.

Per quanto abbiamo visto sopra, ad ogni aperto Ω'_s si può associare un raggio $\alpha(\Omega'_s)$ tale che la soluzione $z(x, y)$ del problema (7) sia analitica e monodroma in $R_{\alpha(\Omega'_s)} \times \Omega'_s$. Posto $\alpha(\Omega') = \min_s \{\alpha(\Omega'_s)\}$, ne segue che $z(x, y)$ è *analitica secondo Weierstrass, in generale polidroma, in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Anche in questo caso il raggio $\alpha(\Omega')$ è valutabile mediante la (8) o la (9), a seconda che si abbia rispettivamente $n = 1$ oppure $n > 1$.

Dim. del Teorema 7. Sia $\zeta(x, y)$ una soluzione del problema singolare (6); dall'equazione stessa in cui si ponga $x = 0$ segue allora che il dato $\psi(y)$ soddisfa necessariamente l'equazione lineare ordinaria (12).

Ricordiamo che per ipotesi i coefficienti $b_j(x, y)$ $(j = 1, 2, 3)$ e il termine noto $g(x, y)$ sono analitici in $R_\alpha \times \Omega$; se ne deduce che il dato $\psi(y)$, in quanto risolve un'equazione lineare ordinaria a coefficienti e termine noto analitici in Ω, è anch'esso analitico in tutto Ω.

Scelta una qualsiasi funzione $\varphi_1(x)$ analitica in R_α, che soddisfi la sola condizione $\varphi_1(0) = \psi'(\bar{y})$, si consideri il problema di Cauchy ben posto

$$\text{equazione (6),} \qquad \zeta(x, \bar{y}) = \varphi(x)\,, \qquad \zeta_y(x, \bar{y}) = \varphi_1(x)\,.$$

Esso ammette un'unica soluzione $\zeta(x, y)$ prolungabile analiticamente, in base al Teorema 3, in ogni campo $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$ del tipo ivi precisato.

Dimostriamo che tale soluzione risolve anche il problema singolare di Darboux (6). Infatti essa soddisfa per ipotesi la prima condizione $\zeta(x, \bar{y}) = \varphi(x)$; verifichiamo che risulta anche $\zeta(0, y) \equiv \psi(y)$ in Ω. A questo scopo basta osservare che $\zeta(0, y)$ e $\psi(y)$ sono entrambe soluzioni, per l'equazione lineare ordinaria (12), dello stesso problema di Cauchy: $\zeta(0, \bar{y}) = \varphi(0) = \psi(\bar{y})$, $\zeta_y(0, \bar{y}) = \varphi_1(0) = \psi'(\bar{y})$.

Dall'arbitrarietà con cui si è scelta la funzione $\varphi_1(x)$ segue l'esistenza di infinite soluzioni per il problema (6), analitiche (in generale polidrome) in campi $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$ del tipo precisato nel Teorema 3 o nel Teorema 5.

Se $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$, a queste si aggiungono le infinite soluzioni analitiche (in generale polidrome) in $R_\infty \times \Omega$, ottenute partendo da dati iniziali $\zeta_y(x, \bar{y}) = \varphi_1(x)$ trascendenti intere e soddisfacenti la sola condizione $\zeta_y(0, \bar{y}) = \varphi_1(0) = \psi'(\bar{y})$.

Dim. del Teorema 8. La soluzione del problema (13), analitica in base al teorema di Cauchy-Kowalewski in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$, è ivi dotata del seguente sviluppo in serie di potenze $\zeta(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \zeta_k(y) x^k$, dove $\zeta_k(\bar{y}) = \varphi_{1k}$, $\zeta'_k(\bar{y}) = \varphi_{2k}$.

Osserviamo che in $R_\alpha \times \Omega$ si ha $g(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, g_k(y) x^k$, $b_j(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, b_{jk}(y) x^k$ $(j = 1, 2, 3)$. Applicando il teorema di derivazione per serie, dalla (13) si ottiene quindi, nell'intorno di $(0, \bar{y})$ sopra considerato, la seguente identità

$$\begin{aligned}\sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \zeta''_k(y) x^k &\equiv \sum_{0}^{+\infty}{}_k \Big\{k(k-1) a_1(y) \zeta_k + k a_2(y) \zeta'_k + \sum_{0}^{k}{}_l \big[b_{1l}(y) \zeta'_{k-l} + \big((k-l) b_{2l}(y) \\ &\qquad + b_{3l}(y)\big) \zeta_{k-l}\big] + g_k(y)\Big\} x^k \\ &\equiv \sum_{0}^{+\infty}{}_k \Big\{\big(k a_2(y) + b_{10}(y)\big) \zeta'_k + \big(k(k-1) a_1(y) + k b_{20}(y) + b_{30}(y)\big) \zeta_k + g_k(y) \\ &\qquad + \sum_{1}^{k}{}_l \big[b_{1l}(y) \zeta'_{k-l} + \big((k-l) b_{2l}(y) + b_{3l}(y)\big) \zeta_{k-l}\big]\Big\} x^k.\end{aligned}$$

Ne segue (utilizzando il principio di identità delle serie di potenze) che i coefficienti $\zeta_k(y)$ risolvono necessariamente i problemi di Cauchy (14) per equazioni lineari ordinarie (dipendenti da k). Essi risultano pertanto individuati; inoltre sono analitici in tutto il campo Ω di analiticità dei coefficienti e termini noti delle equazioni lineari ordinarie (14) (come è immediato verificare procedendo per induzione).

Bibliografia

[1] F. Dal Fabbro e A. Furioli Martinolli: [•]$_1$ *Sull'analiticità delle soluzioni di alcune equazioni differenziali a derivate parziali nell'intorno di punti singolari* (I), (II), Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **111** (1977), 281-295, e A **113** (1979), 18-44; [•]$_2$ *Analisi delle soluzioni di un'equazione differenziale a derivate parziali del tipo ipergeometrico rispetto ad una variabile* (I), (II), Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **112** (1978), 246-260 e A **114** (1980); [•]$_3$ *Teoremi di esistenza in grande, nel campo analitico, per il sistema lineare:* $z_y = x^n A(y) z_x + B(x, y) z + f(x, y)$, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 27-46.

[2] A. Furioli Martinolli: [•]$_1$ *Un problema singolare di Darboux per l'equazione:* $xys = xAp + yBq + Cz + xyf$, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **104** (1970), 680-689; [•]$_2$ *Teoremi di esistenza in grande delle soluzioni di problemi di Cauchy per il sistema lineare:* $\partial z_i/\partial y = \sum_{1}^{N}{}_j \,[x a_{ij}(y)(\partial z_j/\partial x) + b_{ij}(y) z_j] + c_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, N$, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 135-147.

[3] J. Kajiwara, *Holomorphic solutions of singular Darboux problems*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **1** (1975), 17-31.

[4] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, The M.I.T. Press 1966.

Summary

This paper completes and states a connection between some previous works in which we investigated the analytic continuation of the solutions of some linear, partial differential equations and systems in the neighborhood of the singularities of the coefficients and of the known terms.

Namely in part one we consider the linear system of partial differential equations

$$z_y = x^n A(y) z_x + B(x, y) z + f(x, y) \qquad (n \geqslant 1, \text{ integer}) \tag{1}$$

(where x, y are complex variables and $z(x, y)$ is the complex, unknown vector), which was first introduced and studied in $[\mathbf{1}]_3$ *and* $[\mathbf{2}]_2$.

We find that, under the same hypotheses on the matrix $B(x, y)$ and the vector $f(x, y)$ as we had done there, but under stronger hypotheses on the matrix $A(y)$, the previous results about the analytic continuation of the solutions in the neighborhood of a singular complex straight line $\{(x, y^*): |x| < \alpha\}$ can be improved.

This fact is not surprising as the analytic-continuation properties of the solutions depend on the characteristic lines and therefore on $A(y)$.

In the second part of this paper we consider the linear, m-th order, partial differential equation (2), *which generalizes the second order equations introduced and studied in* $[\mathbf{1}]_1$ *and* $[\mathbf{1}]_2$.

We find a suitable change of variables by which equation (2) *is equivalent to system* (1). *We can thus apply the results proved for system* (1) *to show how and to which extent the solutions of* (2) *can be analytically continued, and to state the existence of an infinite number of solutions for a singular Cauchy problem.*

All of these results were obtained in $[\mathbf{1}]_1$ *and* $[\mathbf{1}]_2$ *in the special case of the second order equations studied there, straightaway through the explicit form of the solutions.*

We also study the singular Darboux problem (6) *for equation* (2). *We give a necessary condition for the existence of solutions; if it is satisfied, we prove the set of solutions is infinite.*

* * *