Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 379-386

ANGELO LIZZIO e SALVATORE MILICI (*)

Determinazione di $v_3(1)$, $v_3(2)$, $v_4(1)$ in un grafo e condizioni sufficienti per $\Delta_s = 0$ (**)

1 - Dato un grafo G non orientato, indicheremo con $V(G)$, $S(G)$ — o, se non c'è pericolo di confusione, con V, S — rispettivamente l'insieme dei vertici e quello degli spigoli di G. Fissati $x, y \in V$, per distanza $d(x, y)$ tra x e y s'intende la minima tra le lunghezze di tutte le catene $C(x, y)$ che ci sono in G. Se G non è connesso e x, y appartengono a componenti distinte, si pone $d(x, y) = \infty$. Se $x \in V$ e $X \subseteq V$, $d(x, X) = \min\{d(x, y); y \in X\}$. Se $X \subseteq V$, con $\langle X \rangle$ si indicherà il grafo generato da X in G, ossia il grafo i cui vertici sono gli elementi di X ed inoltre tale che $\{x, y\}$ è un suo spigolo se e solo se $\{x, y\} \in S$.

In $[\mathbf{6}]_1$ F. Speranza ha generalizzato il concetto di colorazione di un grafo, introducendo le colorazioni L_s, $s \geqslant 1$. Una colorazione L_s di G è un'applicazione $K: V \to C$ tale che $\forall x, y \in V$, $x \neq y$, $d(x, y) \leqslant s \Rightarrow K(x) \neq K(y)$. Per numero s-cromatico γ_s di G s'intende il minimo numero di colori necessario per poter definire in G una colorazione L_s.

Successivamente, S. Antonucci [**1**], M. Gionfriddo $[\mathbf{3}]_{1,2,3}$, M. C. Marino e L. Puccio $[\mathbf{5}]_{1,2}$ hanno studiato, tra le altre cose, il comportamento di γ_s. Posto $d_s = \max_{X \in \mathscr{F}_s} |X|$, $\mathscr{F}_s = \{X \subseteq V: \text{diam}\, X \leqslant s\}$, $\Delta_s = \gamma_s - d_s$ $(\geqslant 0)$ (salvo avviso contrario, in ciò che segue, per evitare casi banali, sarà sempre $d_s \geqslant s + 1$), M. Gionfriddo ha studiato classi di grafi verificanti particolari condizioni relative a Δ_s e successivamente $[\mathbf{3}]_4$ ha definito e segnalato lo studio dei seguenti parametri $v_s(h) = \min\{v \in N: \exists G \text{ con } |V| = v \text{ e } \Delta_s(G) = h\}$, $\vartheta_s(h) = \min\{v \in N:$

(*) Indirizzo: Seminario Matematico, Città Universitaria, Viale A. Doria 6, 95125 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-IV-1982.

$\exists G$ con $|V| - d_s = v$ e $\Delta_s(G) = h\}$, $m_s(h) = \min\{p \in N : \exists\ G$ con $|S| = p$ e $\Delta_s(G) = h\}$.

In questo lavoro, riprendendo tali questioni, si determinano alcune condizioni sufficienti affinché in un grafo G si abbia $\Delta_s(G) = 0$ ed inoltre, relativamente allo studio del parametro $v_s(h)$, si dimostra che $v_3(1) = 9$, $v_3(2) = 11$, $v_4(1) = 11$.

2 – Sia G un grafo qualsiasi. Indicheremo con G^s il grafo tale che $V(G^s) = V(G)$ e $\{x, y\} \in S(G^s)$ se e solo se $d(x, y) \leqslant s$ in G, e con $\overline{G}$ il grafo complementare di G. Per *accoppiamento* M di G si intende un insieme $M \subseteq S$ i cui elementi siano a due a due non incidenti; un vertice x si dirà *saturo in* M se è estremo di uno spigolo di M. Se $A, B \subseteq V$, per *accoppiamento di* A *in* B si intende un accoppiamento M di G che saturi tutti gli elementi di A e tale che se $x \in A$, $\{x, y\} \in M$, allora $y \in B$. Infine, se z è un numero reale, indicheremo con $[z]$ e con $[z]^*$ rispettivamente il massimo intero minore o uguale a z ed il minimo intero maggiore o uguale a z.

Riportiamo i seguenti risultati ottenuti in $[\mathbf{3}]_1$ ed in $[\mathbf{3}]_2$.

2.1. *Sia* G *un grafo tale che* $d_s \geqslant \frac{1}{2}|V|$. *Se esiste in* G *un* $A \subseteq V$ *tale che* $|A| = d_s$, $A \in \mathscr{F}_s$, $V - A \in \mathscr{F}_s$, *si ha* $\Delta_s = 0$.

2.2. *Sia* G *un grafo tale che* $|V| \geqslant 4$ *ed* $A \subseteq V$ *tale che* $A \in \mathscr{F}_s$, $|A| = d_s$. *Se* $|V - A| \leqslant 2$, *si ha* $\Delta_s = 0$. *Se* $|V - A| \leqslant 5$, *si ha* $\Delta_s \leqslant 1$.

2.3. *Sia* G *un grafo qualsiasi*; $A \subseteq V$ *tale che* $A \in \mathscr{F}_s$, $|A| = d_s$; $B \subseteq V - A$ *tale che* $B \in \mathscr{F}_s$, $|B| = \max\{|X| : X \subseteq V - A,\ X \in \mathscr{F}_s\}$. *Se* $W \subseteq V - A$, $W \in \mathscr{F}_s$, *esiste in* $\overline{G}^s$ *un accoppiamento* M *di* W *in* A. *Se* $H \subseteq V - (A \cup B)$, $H \in \mathscr{F}_s$, *esiste in* $\overline{G}^s$ *un accoppiamento* M' *di* H *in* B.

Dimostriamo un risultato utile per il seguito.

2.4. *Se* G *è un ciclo con* n *vertici e* $s \leqslant n - 1$, *allora*

$$\Delta_s = \begin{cases} 0 & \text{per } n = s + 1 + x\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant s \\ [x/k]^* & \text{per } n = k(s+1) + x\,, \quad k > 1\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant s\,. \end{cases}$$

Infatti in un ciclo con n vertici, posto $n = k(s + 1) + x$, dove $0 \leqslant x \leqslant s$, è $d_s = n$ se $k = 0, 1$, $d_s = s + 1$ se $k > 1$.

Nel caso $k = 0, 1$ e $d_s = n$, si ha facilmente $\gamma_s = n$ e quindi $\Delta_s = 0$. Supponiamo $k > 1$.

Dimostriamo, dapprima, che non esiste alcuna colorazione L_s di G mediante $p \leqslant s + [x/k]^*$ colori. Infatti, poiché in G non esistono $k+1$ vertici $y_1, \ldots, y_{k+1}$, tali che $d(y_i, y_j) \geqslant s + 1$ $\forall i, j = 1, \ldots, k+1$, $i \neq j$, per ogni $\alpha \in C$ si ha $|K^{-1}(\alpha)| \leqslant k$. Dunque si possono attribuire i p colori, al più, a $p \cdot k$ vertici. Poiché

$$p \cdot k \leqslant sk + k \cdot [x/k]^* = \begin{cases} k(s+1) + x - R(x,k) < n & \text{se } R(x,k) \neq 0 \\ ks + x < n & \text{se } R(x,k) = 0\,, \end{cases}$$

rimane sempre almeno un vertice cui non è possibile assegnare nessuno dei p colori precedenti.

Dimostriamo, adesso, che esiste una colorazione L_s di G mediante $s + [x/k]^* + 1$ colori. Infatti posto $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, l'applicazione $K\colon V \to C$ tale che $K(v_{j+i(s+1+[x/k]^*)}) = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, s + 1 + [x/k]^*$, è una colorazione L_s di G mediante $s + [x/k]^* + 1$ colori. Perciò $\gamma_s = s + 1 + [x/k]^*$, e quindi $\Delta_s = [x/k]^*$.

3 – In questo numero daremo delle condizioni sufficienti affinché in un grafo G si abbia $\Delta_s = 0$.

3.1. *Sia G un grafo connesso in cui esiste un $X \in \mathscr{F}_s$ tale che $\langle X \rangle$ sia un albero, $|X| = d_s$ e $|V - X| = 3$. Posto $V - X = \{y_1, y_2, y_3\}$, $T_i = \{v \in X\colon d(v, y_i) \geqslant s + 1\}$, se $T_1 = \{t_1\}$, $T_2 = \{t_2\}$, $T_3 = \{t_1, t_2\}$, allora o* (1) *$d(y_1, y_2) \leqslant s$ e $d(y_3, y_i) \leqslant s$ per almeno un $i = 1, 2$, oppure* (2) *esiste un $i = 1, 2, 3$ tale che $d(y_i, \{y_j, y_k\}) \geqslant s + 1$.*

Supponiamo che non si verifichi né la (1) né la (2). In altre parole, supponiamo che si abbia $d(y_1, y_3) \leqslant s$, $d(y_2, y_3) \leqslant s$, $d(y_1, y_2) \geqslant s + 1$. Si ha $d(y_1, t_1) \geqslant s + 1$, $d(y_2, t_2) \geqslant s + 1$, $d(y_3, t_1) \geqslant s + 1$, $d(y_3, t_2) \geqslant s + 1$. Inoltre per ogni $x \in X - \{t_1, t_2\}$ e per ogni $y_i \in V - X$ è $d(y_i, x) \leqslant s$.

Posto $Y_i = \{v \in X\colon \{v, y_i\} \in S\}$, ogni $x \in Y_i$ è un vertice pendente in $\langle X \rangle$, altrimenti si avrebbe $d(x, v) \leqslant s - 1$, per ogni $v \in X$, e quindi $X \cup \{y_i\} \in \mathscr{F}_s$.

Risulta $Y_3 \neq \emptyset$. Infatti se fosse $Y_3 = \emptyset$, necessariamente $\{y_3, y_1\} \in S$ (o, analogamente, $\{y_3, y_2\} \in S$) e, non potendo essere $d(y_3, y_1) = d(y_3, y_2) = 1$, si avrebbe $d(y_3, y_2) = d(y_1, y_2) + 1 \geqslant s + 2$. Sia, dunque, $x_3 \in Y_3$. Poiché $\langle X \rangle$ è un albero di diametro s, e $d(y_3, t_i) \geqslant s + 1$ ($i = 1, 2$) esistono in $\langle X \rangle$ due catene $C(x_3, t_1)$, $C(x_3, t_2)$ entrambe di lunghezza s. Essendo $d(t_1, t_2) \leqslant s$ in $\langle X \rangle$, esiste un $z \in X$ tale che $C(x_3, z) = C(x_3, t_1) \cap C(x_3, t_2)$ e $d(t_1, z) = d(t_2, z) = s - d(x_3, z)$. Da cui segue $d(t_1, z) = d(t_2, z) \leqslant [s/2]$.

$\langle X - \{z\} \rangle$ è una foresta (cioè un grafo le cui componenti connesse sono tutte alberi); indichiamo con $C(t_1)$, $C(t_2)$ le componenti connesse di $\langle X - \{z\}\rangle$ contenenti rispettivamente t_1 e t_2 e poniamo $W_i = \{v \in C(t_i): d(z, v) = [s/2]\}$ $(i = 1, 2)$ e $W_3 = \{v \in X: d(z, v) = [s/2]^*\} - (W_1 \cup W_2)$.

Risulta $Y_3 \subseteq W_3$; in caso contrario, si avrebbe $d(y_3, t_1) \leqslant s$, oppure $d(y_3, t_2) \leqslant s$ (si osservi che se $x \in Y_3$, allora dev'essere $d(x, t_1) = d(x, t_2) = s$, da cui $x \notin C(t_1) \cup C(t_2)$ ed inoltre $d(x, z) = [s/2]^*$).

Inoltre è $Y_1 \subseteq W_2 \cup W_3$ e $Y_2 \subseteq W_1 \cup W_3$. In caso contrario si avrebbe $d(t_1, y_1) < s$ oppure $d(t_2, y_2) < s$. Poiché $d(y_1, t_2) < s$, necessariamente esiste $x_1 \in Y_1 \cap W_2$. Si ha $d(t_2, x_1) \leqslant s - 1$, $d(x_1, z) = d(t_2, z) = d(t_1, z)$. Da cui segue $d(x_1, z) = d(t_2, z) = d(t_1, z) = [s/2]$. In modo analogo esiste $x_2 \in Y_2 \cap W_1$. Si ha $d(x_1, x_2) \leqslant s$. Osserviamo inoltre che dev'essere $d(x_2, y_1) \leqslant s$ e, poiché $d(y_1, y_2) \geqslant s + 1$, necessariamente è $d(y_1, x_2) = s$.

Deve allora esistere un $v \in Y_1$ tale che $d(v, x_2) = s - 1$. Questo non si può però verificare, in quanto, essendo $Y_1 \subseteq W_2 \cup W_3$, si ha $v \in W_2 \cup W_3$ e quindi $d(v, x_2) = s$. Da ciò segue necessariamente la tesi.

3.2. *Sia G un grafo connesso, e $X \in \mathscr{F}_s$ con $|X| = d_s$. Se $\langle X\rangle$ è un albero e $|V - X| = 3$ allora $\Delta_s = 0$.*

Poniamo $V - X = \{y_1, y_2, y_3\}$. Sia $K: X \to C$ un'applicazione iniettiva. Se diam $(V - X) \leqslant s$, si ha $\gamma_s = d_s$, dunque $\Delta_s = 0$, per il teorema 2.3.

Se esiste un $i = 1, 2, 3$ tale che $d(y_i, \{y_j, y_k\}) \geqslant s + 1$, dove $\{y_j, y_k\} = (V - X) - \{y_i\}$, allora, indicato con $x_u \in X$ $(u = 1, 2, 3)$ il vertice tale che $d(y_u, x_u) \geqslant s + 1$, ponendo $K(y_u) = K(x_u)$ si ottiene una colorazione L_s di G mediante d_s colori. Ne segue $\Delta_s = 0$. (Si osservi che nel caso $d(y_j, y_k) \leqslant s$ si ha necessariamente $x_j \neq x_k$.)

Supponiamo, adesso, che si abbia $d(y_3, y_1) \leqslant s$, $d(y_3, y_2) \leqslant s$, $d(y_1, y_2) \geqslant s + 1$. In questo caso esistono in $\bar{G}^s$ due accoppiamenti $M_1 = \{\{y_1, t_1\}, \{y_3, t_3\}\}$, $M_2 = \{\{y_2, t_2\}, \{y_3, t_3'\}\}$ con $t_1 \neq t_3$, $t_2 \neq t_3'$. Posto $T = \{t_1, t_2, t_3, t_3'\}$ e $T_i = \{v \in X: d(v, y_i) \geqslant s + 1\}$ per $i = 1, 2, 3$, si ha $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{3} T_i$ e $|\bigcup_{i=1}^{3} T_i| \geqslant 2$.

Sia $|\bigcup_{i=1}^{3} T_i| > 2$. Se $\{t_3, t_3'\} - \{t_1, t_2\} \neq \emptyset$, si può porre $K(y_1) = K(t_1)$, $K(y_2) = K(t_2)$ e $K(y_3) = K(t)$ per $t \in \{t_3, t_3'\} - \{t_1, t_2\}$; se $\{t_3, t_3'\} - \{t_1, t_2\} = \emptyset$, poiché esiste necessariamente un $y \in \{y_1, y_2, y_3\}$ colorabile con un colore α diverso da $K(t_1)$, $K(t_2)$, $K(t_3)$, $K(t_3')$, si può porre $K(y) = \alpha$ ed attribuire ai rimanenti due vertici y_i, y_j due colori opportuni da scegliere tra $K(t_1)$, $K(t_2)$, $K(t_3)$, $K(t_3')$. In ogni caso si ottiene un'estensione di K a tutto V, che risulta essere una colorazione L_s di G per la quale è $\Delta_s = 0$. Se $|\bigcup_{i=1}^{3} T_i| = 2$, si ha necessariamente (per il teorema 3.1) $t_1 = t_2$ e $t_3 = t_3'$. Anche in tal caso, $K(y_1) = K(y_2) = K(t_1)$ e $K(y_3) = K(t_3)$, si ha sempre una colorazione L_s di G per la quale è $\Delta_s = 0$.

Per concludere la dimostrazione del teorema, rimane da esaminare il caso in cui è $d(y_1, y_2) \leqslant s$, $d(y_3, y_1) \leqslant s$ e $d(y_3, y_2) \geqslant s+1$ [o, analogamente, $d(y_3, y_1) \geqslant s+1$, $d(y_3, y_2) \leqslant s$]. Anche in questo caso esistono necessariamente in $\bar{G}^s$ due accoppiamenti $M_1 = \{\{y_1, t_1\}, \{y_3, t_3\}\}$ e $M_2 = \{\{y_1, t_1'\}, \{y_2, t_2\}\}$. Ponendo, allora, $K(y_1) = K(t_1)$, $K(y_3) = K(t_3)$, $K(y_2) = K(t_2)$, si ha immediatamente la tesi.

3.3. *Sia G un grafo connesso. Se per $s \geqslant 3$ esiste in G un $X \in \mathscr{F}_s$ con $|X| = d_s = s+2$ e $|V - X| \leqslant s+1$, allora $\Delta_s = 0$.*

Sia $Y = V - X$. Possiamo supporre che $\langle Y \rangle$ non sia connesso, altrimenti sarebbe diam $Y \leqslant s$ e quindi, per il teorema 2.1, $\Delta_s = 0$, e che il grafo $\langle X \rangle$ abbia come vertici quelli di una catena $C(x_1, x_{s+1})$ di lunghezza s ed un altro vertice x_{s+2}. Necessariamente esiste un p, tale che $\{x_p, x_{s+2}\} \in S$, per il quale si possono presentare i seguenti due casi: (I) $p = s$ [oppure $p = 2$], (II) $2 < p < s$.

Nel primo caso, posto $A = \{x_1, x_{s+1}, x_{s+2}\}$ osserviamo che un vertice $y \in Y$ non si può collegare né con un vertice di $X - A$ né, contemporaneamente, con x_1 e con un $x \in A - \{x_1\}$, in quanto diversamente sarebbe $d_s > s+2$. Inoltre un vertice $x \in A - \{x_1\}$ non può essere contemporaneamente collegato con due vertici distinti di Y, altrimenti sarebbe $d_s > s+2$.

Supponiamo $s > 3$. Esiste al più un vertice $y_1 \in V - X$ tale che $d(x_s, y_1) = 2$. Inoltre se $i > 1$, esiste al più un vertice $y_i \in V - X$ tale che $\{y_{i-1}, y_i\} \in S$. Si ha inoltre $i \leqslant s+2$. Posto allora $\boldsymbol{Z}_i(x_1) = \{y \in V - X : d(x_1, y) = i$ e $d(x_2, y) = i+1\}$, si ha $|\boldsymbol{Z}_1(x_1)| \leqslant 2$ e

$$|\boldsymbol{Z}_i(x_1)| = \begin{cases} \leqslant 1 & \text{se } |\boldsymbol{Z}_1(x_1)| = 2 \\ \leqslant 2 & \text{se } |\boldsymbol{Z}_1(x_1)| = 1 \,, \end{cases} \qquad \text{con } 1 < i \leqslant [s/2] \text{ (1)}$$

$$|\boldsymbol{Z}_i(x_i)| \leqslant 2 \qquad\qquad \text{per } i > [s/2] \,.$$

In virtù di tali condizioni, si vede facilmente che si può definire una colorazione L_s di G mediante $d_s = s+2$ colori.

Se $s = 3$, si può osservare che possono esistere al più due vertici $y_1, y_2 \in V - X$ tali che $d(x_s, y_1) = d(x_s, y_2) = 2$. Per essi però si ha $d(y_1, y_2) \geqslant 4$. Procedendo come nel caso precedente, si può definire una colorazione L_3 di G mediante 5 colori.

Nel secondo caso, posto $B = \{x_1, x_{s+1}, x_{s+2}\}$ osserviamo che un $y \in Y$ non può essere collegato con $x \in X - B$, né contemporaneamente con due vertici

(1) Osserviamo che $|\boldsymbol{Z}_i(x_1)| = 2$ per $1 < i \leqslant s$ si può verificare al più una sola volta.

di B, né con x_{s+2}, in quanto diversamente sarebbe $d_s > s + 2$. Inoltre un $x \in B$ non può essere collegato con due vertici distinti di Y altrimenti sarebbe $d_s > s + 2$. Esistono, dunque, al più due vertici $y_1, z_1 \in Y$ tali che $\{x_1, y_1\} \in S$ e $\{x_{s+1}, z_1\} \in S$. Per $i > 1$ e $i \leqslant s - p$ esiste al più un vertice y_i tale che $\{y_i, y_{i-1}\} \in S$. Analogamente per $i > 1$ e $i \leqslant p$ esiste al più un vertice z_i tale che $\{z_i, z_{i-1}\} \in S$. In ogni caso se $x = x_1, x_{s+1}, x' \in \{x_1, x_{s+1}\} - \{x\}$ e $\boldsymbol{Z}_i(x) = \{y \in Y: d(x, y) = i, d(x', y) = s + 1\}$ si ha

$$|\boldsymbol{Z}_i(x_{s+1})| = \begin{cases} \leqslant 1 & \text{per } 1 \leqslant i \leqslant p \\ \leqslant 2 & \text{per } p < i \leqslant s + 1, \end{cases}$$

$$|\boldsymbol{Z}_i(x_1)| = \begin{cases} \leqslant 1 & \text{per } 1 \leqslant i \leqslant s - p \\ \leqslant 2 & \text{per } s - p < i \leqslant s + 1. \end{cases}$$

Si prova immediatamente che, per ogni i, se $|\boldsymbol{Z}_i(x)| = k$, esistono k vertici di X a distanza $s + 1$ dagli elementi di $\boldsymbol{Z}_i(x)$. Si può allora facilmente definire una colorazione L_s di G mediante $d_s = s + 2$ colori. Da cui la tesi.

3.4. *Se G è un grafo connesso di ordine* 10 *e tale che $d_4 = 7$, allora $\Delta_4 = 0$.*

Poniamo $X = \{x_1, \ldots, x_7\} \in \mathscr{F}_4$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\} = V - X$. Cominciamo ad osservare che $\operatorname{grad} x \leqslant 4$ per ogni $x \in V$; in caso contrario sarebbe $d_4 > 7$.

Dimostriamo che, posto $T_i = \{x \in X: d(x, y_i) \geqslant 5\}$, se $T_1 = \{t_1\}$, $T_2 = \{t_2\}$, $T_3 = \{t_1, t_2\}$, necessariamente si verifica una delle due condizioni: (1) $d(y_1, y_2) \leqslant 4$, $d(y_3, y_i) \leqslant 4$ per almeno un $i = 1, 2$; (2) esiste un $i = 1, 2, 3$ tale che $d(y_i, \{y_j, y_k\}) \geqslant 5$, dove $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{i\}$.

Supponiamo che non si verifichino né la (1) né la (2).

Sia $\max\limits_{x \in V} \operatorname{grad} x = 4$. Necessariamente nel grafo $\langle X \rangle$ esiste un sottografo avente per spigoli: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_1, x_5\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_6, x_7\}$. Inoltre, poiché dev'essere (necessariamente) $d(y_3, X) = 1$, è $\{y_3, x_7\} \in S$. Ne segue $T_3 \subseteq \{x_3, x_4, x_5\}$. Posto $t_1 = x_4$, $t_2 = x_5$, si può facilmente constatare che non può essere in alcun modo $d(y_1, t_2) \leqslant 4$, $d(y_2, t_1) \leqslant 4$.

Supponiamo $\max\limits_{x \in V} \operatorname{grad} x = 3$. A meno di analogie, si può supporre che nel grafo $\langle X \rangle$ esista un sottografo avente per spigoli $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$ $\{x_3, x_6\}$, $\{x_2, x_7\}$ (oppure $\{x_4, x_7\}$). Dovendo essere $d(y_3, X) = 1$, si ha necessariamente $\{y_3, x_6\} \in S$ (nel caso $\{x_4, x_7\} \in S$ può anche essere, in modo analogo, $\{y_3, x_5\}$ oppure $\{y_3, x_7\} \in S$). Si ha $T_3 = \{x_5, x_7\}$ e si può vedere facilmente che si giunge ad una contraddizione.

In definitiva, si verificano necessariamente o la (1) o la (2). Procedendo allora come nel teorema 3.2, si può attribuire al grafo una colorazione L_s tale che $\Delta_s = 0$. Da cui la tesi.

4 – Posto $v_s(h) = \min\{n \in N\colon$ esiste un G tale che $\Delta_s(G) = h\}$, in **[3]**$_2$ è stato dimostrato che $v_2(1) = 7$ e $v_2(2) = 11$. In questo numero dimostreremo che $v_3(1) = 9$, $v_3(2) = 11$, $v_4(1) = 11$.

(a) *Dimostriamo che* $v_3(1) = 9$.

Sia G un grafo connesso con n vertici. Si può supporre $4 \leqslant d_3 \leqslant n$. Per il teorema 2.2 si ha $\Delta_3 = 0$ nei casi $n = 4, 5, 6$ e nei casi $n = 7$ con $d_3 = 5, 6, 7$ ed $n = 8$ con $d_3 = 6, 7, 8$. Inoltre, per $n = 7$, $d_3 = 4$, si ha $\Delta_3 = 0$ per il teorema 3.2. Nel caso $n = 8$ e $d_3 = 5$, segue $\Delta_3 = 0$ dal teorema 3.3; per $n = 8$ e $d_3 = 4$ il grafo G risulta essere un tronco oppure un ciclo ed è sempre $\Delta_3 = 0$. Si ha quindi $\Delta_3 = 0$ per ogni $n \leqslant 8$. Poiché il ciclo C_9 è un grafo con 9 vertici e tale che $\Delta_3 = 1$, ne segue $v_3(1) = 9$.

(b) *Dimostriamo che* $v_3(2) = 11$.

Per quanto visto in (a), possiamo supporre $n \geqslant 9$, $d_3 \geqslant 4$. Per il teorema 2.2 risulta $\Delta_3 \leqslant 1$ per $n = 9$ e nei casi $n = 10$, con $5 \leqslant d_3 \leqslant 10$. Risulta $\Delta_3 \leqslant 1$ anche per $n = 10$ e $d_3 = 4$, essendo in tal caso il grafo G o un tronco o un ciclo. Si ha quindi $\Delta_3 \leqslant 1$ per ogni $n \leqslant 10$. Poiché il ciclo C_{11} è un grafo con 11 vertici e tale che $\Delta_3 = 2$, ne segue $v_3(2) = 11$.

(c) *Dimostriamo che* $v_4(1) = 11$.

Possiamo supporre $n \geqslant 5$ (in caso contrario è subito $\Delta_4 = 0$). Risulta $5 \leqslant d_4 \leqslant n$. È $\Delta_4 = 0$ nei casi $n \leqslant 7$, $n - 2 \leqslant d_4 \leqslant n$ e $n = 8, 9, 10$ (per il teorema 2.2), $n = 9, 10$ e $d_4 = 6$ (per il teorema 3.3), $n = 10$ e $d_4 = 7$ (per il teorema 3.4), $d_4 = 5$ con $n = 8, 9, 10$, poiché G è necessariamente un tronco o un ciclo. Poiché il ciclo C_{11} è tale che $\Delta_4 = 1$, ne segue $v_4(1) = 11$.

Bibliografia

[1] S. Antonucci, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] M. Gionfriddo: [•]$_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454; [•]$_2$ *Su un problema relativo alle colorazioni L_s d'un grafo planare e colorazioni L_s*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 151-160; [•]$_3$ *Alcuni risultati relativi alle colorazioni L_s d'un grafo*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 125-133; [•]$_4$ *Sul parametro Δ_s d'un grafo L_s-colorabile e problemi relativi*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) **8** (1982), 1-7.

[4] F. Kramer et H. Kramer, *Un problème de coloration des sommets d'un graphe*, C. R. Acad. Science Paris Ser. A (2) **8** (1969), 46-48.

[5] M. C. Marino e L. Puccio: [•]$_1$ *Sul parametro $\Delta_s(G)$ d'un grafo planare*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) **9** (1983), 9-13; [•]$_2$ *Su alcuni parametri associati a colorazioni L_s in un grafo finito non orientato*, Le Matematiche, **35** (1980), 301-310.

[6] F. Speranza: [•]$_1$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** (1975), 53-62; [•]$_2$ *Sur les colorations des graphes orientés*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **16**-A (1978), 517-522.

Sommario

In questo lavoro si determinano alcune condizioni sufficienti affinché in un grafo G si abbia $\Delta_s(G) = 0$ ed inoltre, posto $v_s(h) = \min\{v \in N : \exists G = (V, S)$ con $|V| = v$ e $\Delta_s(G) = h\}$, si dimostra che $v_3(1) = 9$, $v_3(2) = 11$, $v_4(1) = 11$.

* * *