Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 303-325

G. Isac (*)

# Sur l'existence de l'optimum de Pareto (**)

**1** – L'optimum de Pareto a été étudié les dernières années par plusieurs auterurs [**1**]-[**5**], [**8**]-[**12**], [**14**], [**15**], [**16**]$_{2,5}$, [**18**]$_{1,2}$, [**22**], [**25**], [**26**], [**28**] [**29**]$_1$-[**31**] [**33**]$_1$-[**36**], l'étude étant imposée par l'économie mathématique, par la programmation multicritère et par la théorie du contrôle optimal multicritère.

Le concept qui a été beaucoup utilisé dans l'étude de l'optimum de Pareto c'est la compacité ou certaines généralisations de la compacité.

On remarque que certaines particularités des cônes convexes dans les espaces de dimension finie ont été aussi utilisées.

Récemment, les constructions proposées par T. Tanino et Y. Sawaragi [**31**], par C. Malivert [**18**]$_1$ et par H. W. Corley [**10**]$_2$ prouvent que pour construire une théorie de la dualité pour l'optimisation multicritère les théorèmes d'existence jouent un rôle très important si on veut généraliser cette théorie aux espaces de dimension infinie.

Dans cet ouvrage on étudie l'existence de l'optimum de Pareto dans des espaces localement convexes.

La méthode qu'on utilise est basée sur un théorème général d'existence des points critiques pour les systèmes dynamiques multivalents au sens de M. Maschler et B. Peleg [**19**], mais considérés sur des espaces localement convexes.

En relation directe avec ce téorème on considère une classe remarquable de cônes convexes, les cônes appelés nucléaire (ou supernormaux).

---

(*) Indirizzo: Dépt. de Math., Collège Militaire Royal de St. Jean, St. Jean sur Richelieu, Québec, Canada.

(**) Les résultats de cet ouvrage ont été exposés au « International Symposium on Semi-Infinite Programming and Applications », the University of Texas at Austin, 8-10 Sept. 1981. — Ricevuto: 18-II-1982.

Utilisant les cônes nucléaires on démontre quelques critères d'existence pour l'optimum de Pareto dans des espaces localement convexes.

On obtient aussi une généralisation aux espaces localement convexes du critère d'existence démontré par Tanino et Sawaragi [**31**] dans l'espace $R^n$ et qui est fondamental pour leur construction de la dualité pour l'optimisation multicritère.

On remarque que les résultats de cet ouvrage n'utilise pas la compacité, mais la complétitude, ce qui ouvre une autre direction dans l'étude de l'optimum de Pareto.

**2** – L'origine de l'idée utilisée dans cet ouvrage se trouve dans les concepts et les observations suivantes.

(a) Soit $X(\tau)$ un espace topologique, $\boldsymbol{R}$ le corps réel et $\pi\colon X\times\boldsymbol{R}\to X$ une application.

Si $(X(\tau),\pi)$ est un système dynamique c'est-à-dire si $\pi$ vérifie les propriétés suivantes: $(s_1)$ $\pi(x,0)=x$, $\forall x\in X$, $(s_2)$ $\pi(\pi(x,t_1),t_2)=\pi(x,t_1+t_2)$ $\forall x\in X$, $\forall t_1$, $t_2\in\boldsymbol{R}$; $(s_3)$ $\pi$ est une application continue, alors pour chaque $x\in X$ l'ensemble, $k(x)=\{\pi(x,t)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ s'appelle *la trajectoire de* $x$.

On dit que le point $x_*\in X$ est un *point critique* pour le système dynamique $(X(\tau),\pi)$ si $k(x_*)=\{x_*\}$.

La notion de point critique joue un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques, en particulier dans l'étude des mouvements périodiques et dans l'étude de la stabilité.

Mais, on observe que la notion de système dynamique multivalente [ou généralisé] au sens de Maschler et Peleg [**19**] est suffisant pour étudier l'existence des points critiques.

On dit que l'application $\Gamma\colon X\to 2^X$ est un *système dynamique généralisé* si $\forall x\in X$, $\Gamma(x)\neq\emptyset$.

Le point $x_*\in X$ s'appelle *point critique* pour $\Gamma$ si $\Gamma(x_*)=\{x_*\}$.

Remarque 1. On observe que si $(X(\tau),\pi)$ est un système dynamique au sens classique, alors l'application multivalente

$$\begin{array}{ccl} X & \to & X \\ \Cup & & \Cup \\ x & \to & \Gamma(x)=\{\pi(x,t)\}_{t\in\boldsymbol{R}} \end{array}$$

donne une structure de système dynamique généralisé sur $X$.

Remarque 2. Les systèmes dynamiques généralisés sont utilisés dans la théorie des jeux, dans la théorie des négociations itératives etc. [**19**].

(b) Le concept suivant a été défini par R. R. Phelps [**24**].

Soit $E$ un espace de Banach et $S \subset E$ un sous-ensemble fermé. On dit que $x_0 \in S$ est un *point à support cônique* pour $S$ s'il existe un cône convexe fermé $\boldsymbol{K} \subset E$ tel que, $\operatorname{Int} \boldsymbol{K} \neq \emptyset$ et $S \cap (\boldsymbol{K} + x_0) = \{x_0\}$. Les points à support côniques on été utilisés par Phelps dans l'étude des points support pour les ensembles fermés d'un espace de Banach, par F. E. Browder dans l'étude des alternatives de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires [**6**], dans l'étude du caractère de la densité d'un espace de Banach [le théorème Leduc-Whitfield] et dans la théorie du «range» numérique d'un opérateur linéaire $T: E \to E$ [le théorème de Bollobas].

Dans cet ouvrage nous considérons la notion suivante.

Si $E(\tau)$ est un espace localement convexe, $S \subset E$ un sous-ensemble fermé et $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe, on dit que $x_0 \in S$ est *un point à support* ***K**-cônique* si, $S \cap (\boldsymbol{K} + x_0) = \{x_0\}$.

Remarque 1. Dans plusieurs ouvrages [**4**]$_1$, [**10**]$_2$, [**36**] etc. les points à support $\boldsymbol{K}$-cônique s'appellent *points* ***K**-efficients*.

Remarque 2. Si on considère l'application multivalente,

$$\begin{array}{l} \Gamma: S \to S \\ \quad\ \ \Cup \quad\ \Cup \\ \quad\ \ x \to \Gamma(x) = S \cap (\boldsymbol{K} + x)\,, \end{array}$$

alors on observe que $x_0 \in S$ est un point à support $\boldsymbol{K}$-conique pour $S$ si et seulement si $x_0$ est un point critique pour le système dynamique généralisé $(S, \Gamma)$.

(c) Soit $E(\tau_1)$ un espace localement convexe et $F(\tau_2)$ un espace localement convexe ordonné par le cône convexe $\boldsymbol{K} \subset F$.

Si $f: X \to F$ est une application (où $X \subset E$ est un sous ensemble), alors on dit que le point $x_0 \in X$ est un point *Pareto-optimal* si $f(x_0)$ est un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour l'ensemble $f(X)$. On obtient donc la conclusion suivante: *pour trouver un théorème générale d'existence pour l'optimum de Pareto il est suffisant de trouver un théorème général d'existence pour les points critiques des systèmes dynamiques généralisés.*

**3** – Dans ce paragraphe on précise quelques notions qui seront utilisées dans cet ouvrage.

On utilise la définition de l'espace localement convexe proposée par F. Treves [**32**].

Un espace localement convexe est un couple $(E, \operatorname{Spec} E)$ où

(a) $E$ est un espace vectoriel (sur $\boldsymbol{R}$ ou $C$);

(b) $\operatorname{Spec} E$ est un ensemble de semi-normes définies sur $E$ tel que: $(s_1)$ $(\forall \lambda \in \boldsymbol{R}_+)(\forall p \in \operatorname{Spec} E) \Rightarrow \lambda p \in \operatorname{Spec} E$, $(s_2)$ si $p \in \operatorname{Spec} E$ et $q$ est une semi-norme telle que $q \leqslant p$ alors $q \in \operatorname{Spec} E$, $(s_3)$ $(\forall p_1, p_2 \in \operatorname{Spec} E) \Rightarrow \sup(p_1, p_2) \in \operatorname{Spec} E$.

Si $\operatorname{Spec} E$ est donné alors il existe sur $E$ une topologie localement convexe $\tau$ telle que, une semi-norme $p$ est $\tau$-continue si et seulement si, $p \in \operatorname{Spec} E$.

L'ensemble $B \subset \operatorname{Spec} E$ s'appelle une *base* pour le $\operatorname{Spec} E$ si $\forall p \in \operatorname{Spec} E$, $\exists q \in B, \exists \lambda > 0,\ p \leqslant \lambda q$. On dit que la base $B$ du $\operatorname{Spec} E$ est Hausdorff si, $\operatorname{Ker} B = \{x \in E \mid p(x) = 0,\ \forall p \in B\} = \{0\}$. Si le $\operatorname{Spec} E$ a une base $B$ Hausdorff, alors la topologie $\tau$ définie par le $\operatorname{Spec} E$ est une topologie Hausdorff.

Si $M \subset E$ est un sous-ensemble et $E$ un espace localement convexe alors, on dit que la fonction $\varphi\colon M \to R$ est *inférieurement semi-continue* si l'ensemble $S_\lambda = \{x \in M \mid \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ est fermé dans l'ensemble $M$ pour tout $\lambda \in R$.

Soit $(E, \operatorname{Spec} E)$ et $(F, \operatorname{Spec} F)$ deux espace localement convexes; on dit que l'application $f\colon M \to F$ (où $M \subset E$) est *fermée*, si pour chaque suite généralisée $\{x_i\}_{i \in I} \subset M$ telle que $\{x_i\}_{i \in I} \to x \in M$ et $\{f(x_i)\}_{i \in I} \to y \in F$ il résulte que $f(x) = y$. Si $M \subset E$ est un ensemble non-vide alors on dit que $\Gamma\colon M \to 2^M$ est un système dynamique sur $M$ si, $(\forall x \in M)(\Gamma(x) \neq \emptyset)$.

**4** – On démontre maintenant le théorème fondamentale de cet ouvrage. Tous les espaces localement convexes sont supposés Hausdorff.

Théorème 1. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe,* $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *une base pour le* $\operatorname{Spec} E$ *et* $M \subset E$ *un ensemble non-vide.*

*Le système dynamique* $\Gamma\colon M \to 2^M$ *a un point critique si et seulement si il existe un espace localement convexe* $(F, \operatorname{Spec} F)$, *une base* $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ *pour le* $\operatorname{Spec} F$, *un ensemble complet* $M_0 \subset M$, *une fonction* $f\colon M_0 \to F$ *et pour chaque couple* $(\alpha, \beta) \in A \times B$ *il existe une fonction* $\varphi_{\alpha\beta}\colon \overline{f(M_0)} \to \boldsymbol{R}_+$ *et deux constantes* $c_\alpha, c_\beta > 0$ *telles que*

(1°) $\forall x \in M_0,\ \Gamma(x) \subset M_0$;

(2°) *$f$ est fermee et* $\overline{f(M_0)}$ *est complet*;

(3°) $\varphi_{\alpha\beta}$ *est inf. semi-cont*;

(4°) $\forall x \in M_0,\ \forall u \in \Gamma(x),\ \max\{c_\alpha p_\alpha(x-u), c_\beta q_\beta(f(x)-f(u))\} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(u))$.

Dém. Evidemment si $\Gamma$ a un point critique $x_* \in M$ alors les conditions du théorème sont vérifiées si on pose: $M_0 = \{x_*\}$, $F = E$, Spec $E =$ Spec $F$ $(\{q_\beta\}_{\beta \in B} \equiv \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$, $f = I_{M_0}$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times A$, $c_\alpha = c_\beta = 1$, et $\varphi_{\alpha\beta} = 0$.

On suppose maintenant que les conditions du théorème sont vérifiées.

Puisque l'espace $E$ est supposé Haussdorff et $M_0$ complet il résulte que $M_0$ est un ensemble fermé.

La correspondence $\Gamma|_{M_0}: M_0 \to 2^{M_0}$ est un système dynamique sur $M_0$ et evidemment un point critique de $\Gamma|_{M_0}$ est un point critique de $\Gamma$.

On considère sur l'ensemble $M_0$ la relation binaire suivante $xRy \Longleftrightarrow$ max $\{c_\alpha p_\alpha(x-y), c_\beta q_\beta(f(x)-f(y))\} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(y))$, pour tout $(a, \beta) \in A \times B$.

On peut prouver que la relation $R$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $M_0$ (on utilise ici que les bases $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ sont Hausdorff).

On note la relation d'ordre $R$ par $\preccurlyeq$.

Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ un ensemble totalement ordonné d'éléments de l'ensemble $M_0$. On peut supposer que $(I, \leqslant)$ est aussi un ensemble totalement ordonné tel que, $x_i \preccurlyeq x_j$ si et seulement si $i \leqslant j$.

Si $i \leqslant j$ alors $x_i \preccurlyeq x_j$ et la définition de la relation d'ordere $\preccurlyeq$ implique

$$c_\alpha p_\alpha(x_i - x_j) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(x_j)),$$

ce qui donne que la suite généralisée $\{\varphi_{\alpha\beta}(f(x_i))\}_{i \in I}$ (pour $\alpha$ et $\beta$ fixés) est une suite décroissante dans $\boldsymbol{R}_+$. Donc il existe $r_{\alpha\beta} \in \boldsymbol{R}_+$ tel que $\{\varphi_{\alpha\beta}(f(x_i))\}_{i \in I} \downarrow r_{\alpha\beta}$.

Soit $\varepsilon >$ et $(\alpha, \beta) \in A \times B$, il existe $i_0 \in I$ tel que pout tout $i \geqslant i_0$ on a

$$r_{\alpha\beta} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) \leqslant r_{\alpha\beta} + \min(c_\alpha, c_\beta) \cdot \varepsilon.$$

Alors, pour tout $j \geqslant i \geqslant i_0$ on *a*

$$c_\alpha p_\alpha(x_i - x_j) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(x_j)) \leqslant \min(c_\alpha, c_\beta) \cdot \varepsilon \leqslant c_\alpha \cdot \varepsilon,$$

$$c_\beta q_\beta(f(x_i) - f(x_j)) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(x_j)) \leqslant \min(c_\alpha, c_\beta) \cdot \varepsilon \leqslant c_\beta \cdot \varepsilon.$$

Si on applique le même raisonnement pour chaque $(\alpha, \beta) \in A \times B$ et si on tient compte que $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$(resp $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$) est une base pour le Spec $E$(resp. le Spec $F$) il résulte que $\{x_i\}_{i \in I}$ est une suite de Cauchy dans l'ensemble $M_0$ et $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ est une suite de Cauchy dans l'ensemble $f(M_0)$.

Comme $M_0$ et $\overline{f(M_0)}$ sont complets et fermés il résulte qu'il existe $\bar{x} \in M_0$ et $\bar{y} \in \overline{f(M_0)}$ tels que, $\lim_{i \in I} x_i = \bar{x}$ et $\lim_{i \in I} f(x_i) = \bar{y}$.

La fonction $f$ ayant le graphe fermé on a $f(\bar{x}) = \bar{y}$.

Puisque pour tout $i \geqslant i_0$ on a $\varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) \leqslant r_{\alpha\beta} + \min(c_\alpha, c_\beta) \cdot \varepsilon$ et $\varphi_{\alpha\beta}$ est supposée inf semi-cont, il résulte

$$\varphi_{\alpha\beta}(f(\bar{x})) \leqslant r_{\alpha\beta} + \min(c_\alpha, c_\beta) \cdot \varepsilon \text{ pur tout } \varepsilon > 0, \text{ d'où } \varphi_{\alpha\beta}(f(\bar{x})) \leqslant r_{\alpha\beta}.$$

Si $i, j \in I$ vérifient, $i \leqslant j$ alors on a

$$(\theta_1) \qquad c_\alpha p_\alpha(x_i - x_j) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(x_j)) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i) - r_{\alpha\beta}\,,$$

$$(\theta_2) \qquad c_\beta q_\beta(f(x_i) - f(x_j)) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - r_{\alpha\beta}\,.$$

Comme les semi-normes $p_\alpha, q_\beta$ sont continues, si on passe à la limite par rapport à $j$ dans les inégalités $(\theta_1)$, $(\theta_2)$ on obtient

$$(\theta_3) \qquad \begin{array}{l} c_\alpha p_\alpha(x_i - \bar{x}) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - r_{\alpha\beta} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\beta\alpha}(f(\bar{x})) \\ c_\beta q_\beta(f(x_i) - f(\bar{x})) \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - r_{\alpha\beta} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_i)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(\bar{x}))\,. \end{array}$$

Comme les inégalités $(\theta_3)$ sont vérifiées pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times B$, il résulte que $x_i \leqslant \bar{x}$ $\forall i \in I$.

Donc on obtient que chaque ensemble totalement ordonné par rapport à «$\leqslant$» a un élément majorant.

Utilisant maintenant le lemme de Zorn il résulte qu'il existe dans l'ensemble $M_0$, par rapport à la relation d'ordre $\leqslant$, un élément maximal $x_*(\varepsilon M_0)$.

Mais, utilisant la relation (4°) des hypothèses, on obtient

$$(\forall u \in \Gamma(x_*))\ [\max\{c_\alpha p_\alpha(x_* - u), c_\beta q_\beta(f(x_*) - f(u))\} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x_*)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(u))\,,$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times B$, ce qui implique, $x_* \leqslant u$ pour tout $u \in \Gamma(x_*)$.

Comme $x_*$ est un élément maximal de l'ensemble $M_0$ il résulte que $x_* = u$ pour tout $u \in \Gamma(x_*)$, donc $\Gamma(x_*) = \{x_*\}$ c'est-à-dire $\Gamma$ a un point critique dans l'ensemble $M$.

Remarque. Le Théorème 1 est une généralisation pour des systèmes dynamiques sur des espaces localement convexes du théorème de point fixe de Caristi [**7**].

Corollaire 1. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe,* $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *une base pour le* Spec $E$ *et* $M \subset E$ *un ensemble non-vide complet. Le système dynamique* $\Gamma\colon M \to 2^M$ *a un point critique si et seulement si il existe un espace localement convexe* $(F, \operatorname{Spec} F)$, *une base* $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ *pour le* Spec $F$, *une fonction* $f\colon M \to F$ *fermée telle que* $\overline{f(M)}$ *est complet, pour chaque* $\alpha \in B$ *il existe une fonction* inf semi-cont $\varphi_\alpha\colon \overline{f(M)} \to \boldsymbol{R}_+$, *une constante* $c_\alpha > 0$ *et pour chaque* $\beta \in B$ *une fonction* $\varphi_\beta\colon \overline{f(M)} \to \boldsymbol{R}_+$ inf semi-cont *et une constante* $c_\beta > 0$ *telles que*

$$(4)' \qquad \forall x \in M\,, \quad \forall u \in \Gamma(x) \left\langle \begin{array}{l} c_\alpha p_\alpha(x - u) \leqslant \varphi_\alpha(f(x)) - \varphi_\alpha(f(u)) \\ c_\beta q_\beta(f(x) - f(u)) \leqslant \varphi_\beta(f(x)) - \varphi_\beta(f(u))\,. \end{array}\right.$$

Dém. L'hypothèse (4)' implique l'hypothèse (4) du Théorème 1 si on pose $\varphi_{\alpha\beta}(t) = \varphi_\alpha(t) + \varphi_\beta(t)$; $\forall t \in \overline{f(M)}$; $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$.

Du Corollaire 1 on obtient

Corollaire 2. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe,* $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *une base pour le* Spec $E$ *et* $M \subset E$ *un ensemble non-vide complet, soit* $\Gamma\colon M \to 2^M$ *un système dynamique. S'il existe une fonction* $f\colon M \to E$ *fermé telle que* $\overline{f(M)}$ *est complet et pour chaque* $\alpha \in A$ *il existe deux constantes* $c_\alpha, c_\alpha^* > 0$ *et une fonction* inf. semi-cont $\varphi_\alpha\colon \overline{f(M)} \to \boldsymbol{R}_+$ *telles que* $\forall x \in M$, $\forall u \in \Gamma(x)$, $\max\{c_\alpha\ p_\alpha(x-u), c_\alpha^* p_\alpha(f(x)-f(u))\} \leqslant \varphi_\alpha(f(x)) - \varphi_\alpha(f(u))$, *alors* $\Gamma$ *a un point critique dans l'ensemble* $M$.

Corollaire 3. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe* $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *une base pour le* Spec $E$, $M \subset E$ *un ensemble non-vide complet et* $\Gamma\colon M \to 2^M$ *un système dynamique.*

*On suppose que pour chaque* $\alpha \in A$ *il existe une fonction* inf. semi-cont $\emptyset_\alpha\colon M \to \boldsymbol{R}_+$ *et une constance* $c_\alpha > 0$ *telles que*

$$\forall x \in M\,, \quad \forall u \in \Gamma(x)\,, \qquad c_\alpha p_\alpha(x-u) \leqslant \emptyset_\alpha(x) - \emptyset_\alpha(u)\,,$$

*alors* $\Gamma$ *a un point critique dans l'ensemble* $M$.

Remarque. Le Corollaire 3 est une généralisation du critère d'existence des points critiques démontré dans l'ouvrage [**19**] où on demande la compacité de l'ensemble $M$, la semi-continuité de $\Gamma$ et l'existence d'une valuation continue (l'analogue de la fonction $\emptyset_\alpha$).

Utilisant les résultats précédents on démontre quelques critères d'existence pour les points à support $\boldsymbol{K}$-cônique. On a remarqué déjà que la notion de point à support $\boldsymbol{K}$-cônique contient la notion d'optimum de Pareto, plus précisément la notion de décision Pareto-optimale utilisée dans les problèmes de contrôle optimal multicritère et aussi la notion de point efficient.

Proposition 1. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe,* $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *une base pour le* Spec $E$, $S \subset E$, $S \neq \emptyset$ *et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe.*

*L'ensemble* $S$ *a un point à support* $\boldsymbol{K}$*-cônique si et seulement si il existe un ensemble* $S_0 \subset S$ *complet, un espace localement convexe* $(F, \operatorname{Spec} F)$ *une base* $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ *pour le* Spec $F$, *une fonction fermé* $f\colon S_0 \to F$ *telle que* $\overline{f(S_0)}$ *est complet et pour chaque* $(\alpha, \beta) \in A \times B$ *une fonction* inf. semi cont $\varphi_{\alpha\beta}\colon \overline{f(S_0)} \to \boldsymbol{R}_+$ *et deux constantes* $c_\alpha, c_\beta > 0$ *telles que*

(1) $\forall x \in S_0$; $S \cap (\boldsymbol{K} + x) \subset S_0$;

(2) $\forall x \in S_0$, $\forall u \in S \cap (\boldsymbol{K}+x)$ $\max\{c_\alpha p_\alpha(x-u), c_\beta q_\beta(f(x)-f(u))\} \leqslant \varphi_{\alpha\beta}(f(x)) - \varphi_{\alpha\beta}(f(u))$.

Dém. On considère la correspondance $\Gamma\colon S \to S$ définie par, $\Gamma(x) = S \cap (\boldsymbol{K} + x)$; $\forall x \in S$. On observe que $\Gamma$ est un système dynamique sur $S$ et un point critique du système $\Gamma$ est un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour $S$. La proposition est alors une conséquence du Théorème 1.

Il existe un cas intéressant quand les hypothèses de la Proposition 1 peuvent être vérifiées facilement; c'est le cas d'un cône qu'on appelle *nucléaire* (ou super normal).

La notion de cône nucléaire (ou supernormal) a été définie dans l'ouvrage [**16**]$_5$ et utilisée dans [**16**]$_4$.

Pour faciliter la lecture de cet ouvrage on reprend les résultats sur les cônes nucléaires mais on ajoute quelques nouveaux résultats.

**5** – Soit $(E, \operatorname{Spec} E)$ un espace localement convexe Hausdorff et $E'$ le dual topologique de $E$.

Déf. 1. On dit que le cône convexe $\boldsymbol{K} \subset E$ est un *cône nucléaire* (ou *supernormal*) s'il existe une base $B$ pour le $\operatorname{Spec} E$ telle que

$$\forall p \in B\,, \quad \exists f_p \in E'\,, \quad \forall x \in \boldsymbol{K}\,, \qquad p(x) \leqslant f_p(x)\,.$$

Soit $\tau$ la topologie définie par le $\operatorname{Spec} E$ sur l'espace $E$. On dit que le cône convexe $\boldsymbol{K} \subset E$ est *$\tau$-normal* si et seulement si, quel que soit deux suites généralisées $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_i\}_{i \in I}$ telles que $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$ (la relation d'ordre $\leqslant$ étant la relation définie par le cône $\boldsymbol{K}$) et telle que $\{y_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\tau} 0$, il résulte que $\{x_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\tau} 0$.

La notion de cône normal est fondamentale dans la théorie des espaces vectoriels topologiques ordonnées [**16**]$_3$, [**17**], [**23**].

Proposition 2. *Dans un espace localement convexe* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *chaque cône convexe nucleaire* $\boldsymbol{K} \subset E$ *est $\tau$-normal.*

Dém. En effet, soit $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_i\}_{i \in I}$ deux suites généralisées telles que $\forall i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ et que $\{y_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\tau} 0$.

Puisque le cône $\boldsymbol{K}$ est nucléaire il existe une base $B$ pour le $\operatorname{Spec} E$ telle que $\forall p \in B$, $\exists f_p \in E'$, $\forall x \in \boldsymbol{K}$, $p(x) \leqslant f_p(x)$.

On a alors pour chaque $p \in B$, $0 \leqslant p(x_i) \leqslant f_p(x_i) \leqslant f_p(y_i)$ et comme $\lim\limits_{i \in I} f_p(y_i) = 0$ il résulte que, $\lim\limits_{i \in I} (x_i) = 0$.

$B$ étant une base pour le $\operatorname{Spec} E$ il résulte que $\{x_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\tau} 0$ et donc le cône $\boldsymbol{K}$ est $\tau$-normal.

Proposition 3. *Soit* $(E(\tau), \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe. Si* $\boldsymbol{K}$ *est* $\tau$*-normal alors il est* $\sigma(E, E')$ *nucléaire.*

Dém. Soit $p$ une semi-norme $\sigma(E, E')$-continue; alors il existe une constante $C > 0$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E'$ tels que pour tout $x \in E$ on a, $p(x) \leqslant C \sup_{i=1}^{n} \cdot \left(|f_i|(x)\right)$.

Le cône $\boldsymbol{K}$ étant $\tau$-normal pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ il existe $h_i, g_i \in E'$ positives sur $\boldsymbol{K}$ telles que $f_i = h_i - g_i$. Donc pour tout $x \in \boldsymbol{K}$ on a

$$p(x) \leqslant C \sup_{i=1}^{n} \left(|f_i|(x)\right) \leqslant C \sup_{i=1}^{n} \left(\left(|h_i| + |g_i|\right)(x)\right)$$

$$\leqslant C \sup_{i=1}^{n} \left(h_i(x) + g_i(x)\right) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} (h_i + g_i)(x) ,$$

ce qui donne que le cône $\boldsymbol{K}$ est $\sigma(E, E')$-nucléaire.

Corollaire. *Les propositions 2 et 3 impliquent que le cône convexe* $\boldsymbol{K} \subset E$ *est* $\sigma(E, E')$*-nucleaire si et seulement si il est* $\sigma(E, E')$*-normal.*

Remarque. La conclusion du corollaire précédent est très importante parce qu'elle introduit la complétitude faible dans l'étude de l'optimum de Pareto.

Soit $(E(\tau), \operatorname{Spec} E)$ un espace localement convexe Hausdorff.

On dit que le cône convexe $\boldsymbol{K} \subset E$ est $\tau$*-complètement régulier* si, et seulement si, quel que soit une suite généralisée $\{x_i\}_{i \in I} \subset \boldsymbol{K}$ monotone croissante et $\tau$-bornée il résulte qu'elle est $\tau$-convergente. Pour les cône complètement réguliers il faut voir [**16**]$_{3,4}$.

Dans l'ouvrage [**16**]$_2$ on a étudié l'existence des points à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour un ensemble fermé dans un espace localement convexe utilisant les cônes complètement réguliers.

On précise aussi que l'espace localement convexe $E$ s'appelle *quasi-complet* si chaque sous-ensemble borné et fermé de $E$ est complet.

Proposition 4. *Dans un espaces localement convexe* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *quasi-complet chaque cône convexe ferme et* $\tau$*-nucleaire* $K \subset E$ *est* $\tau$*-complètement regulier.*

Dém. En effet, soit $\{x_i\}_{i \in I} \subset \boldsymbol{K}$ une suite généralisée monotone croissante et $\tau$-bornée. On peut supposer que $\{x_i\}_{i \in I} \subset B_0 \subset \boldsymbol{K}$, où $B_0$ est un ensemble $\tau$-borné et $\tau$-fermé.

Soit $B$ une base pour le Spec $E$ et $p \in B$; il existe alors $f_p \in E'$ telle que $\forall x \in \boldsymbol{K},\ p(x) \leqslant f_p(x)$.

La fonctionnelle $f_p$ étant positive sur $\boldsymbol{K}$ et continue il résulte que la suite généralisée $\{f_p(x_i)\}_{i \in I}$ de nombres réels, est monotone croissante et donc convergente.

Puisque pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i, j \geqslant i_0$ on a

$$p(x_i - x_j) \leqslant p(x_i - x_{i0}) + p(x_j - x_{i0}) \leqslant f_p(x_i - x_{i0}) + f_p(x_j - x_{i0}) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

il résulte que $\{x_i\}_{i \in I}$ est une suite de Cauchy par rapport à la topologie $\tau$ et comme $B_0$ est $\tau$-complet il résulte que la suite $\{x_i\}_{i \in I}$ est $\tau$-convergente.

Les résultats suivants prouvent que la classe des cônes nucléaires est nonvide.

Soit $(E, \operatorname{Spec} E)$ un espace localement convexe Hausdorff et $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe. On dit que l'ensemble convexe $B \subset E$ est une *base* pour le cône $\boldsymbol{K}$ si $\forall x \in \boldsymbol{K} \setminus \{0\}$, $\exists \lambda \in R_+ \setminus \{0\}$ unique, $\exists b \in B$, unique, $x = \lambda \cdot b$, et on dit que l'ensemble convexe $A \subset \boldsymbol{K}$ *engendre* le cône $\boldsymbol{K}$ si, $\boldsymbol{K} = \bigcup_{\lambda \in \boldsymbol{R}_+} \lambda \cdot A$.

On dit que le cône $\boldsymbol{K}$ est *bien basé* s'il est engendré par un ensemble convexe et borné $A$ tel que $0 \notin \overline{A}$.

Proposition 5. *Si* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *est un espace localement convexe Hausdorf, alors chaque cône convexe* $\boldsymbol{K} \subset E$ *bien basé est nucléaire.*

Dém. Le cône $\boldsymbol{K}$ étant bien basé il existe un ensemble convexe et borné $A$ tel que $0 \notin \overline{A}$ qui engendre le cône $\boldsymbol{K}$.

Utilisant un téorème connu de séparation il résulte qu'il existe une fonctionnelle $f \in E'$ telle que

$$(1) \quad (\forall a \in A)(f(a) > 1)\,, \qquad (2) \quad f(0) < 0\,.$$

L'ensemble $B = \{x \in \boldsymbol{K} \mid f(x) = 1\}$ est une base pour le cône $\boldsymbol{K}$ parce que si $x \in \boldsymbol{K}$ on a $x = \lambda \cdot a$ où $a \in A$ et $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$ d'où on obtient que $x = \lambda \cdot f(a)(a/f(a))$ et $(a/f(a)) \in B$ (et la représentation est unique).

L'ensemble $B$ est borné parce que $B \subset M = \operatorname{conv}(\{0\} \cup A)$ et $M$ est borné. En effet, soit $b \in B$ alors $b = \lambda a_1$ où $\lambda \in \boldsymbol{R}_+ \setminus \{0\}$ et $a_1 \in A$. Dans cette relation il faut avoir $\lambda \in ]0, 1[$ parce que si $\lambda \geqslant 1$ il résulte qu'on a $f(b) = \lambda f(a_1) > 1$ ce qui contredit la définition de l'ensemble $B$. On a alors, $b = (1-\lambda)0 + \lambda a_1 \in M$, c'est-à-dire, $B \subset M$.

Soit $\tilde{B}$ une base pour le Spec $E$, $x \in \boldsymbol{K} \setminus \{0\}$ et $p \in \tilde{B}$. On suppose que $p(x) \neq 0$; puisque $B$ est borné il existe un nombre $\beta_p > 0$ tel que pour tout $z \in B$, $p(z) \leqslant \beta_p$. Comme $(x/p(x)) \in \boldsymbol{K}$ il résulte qu'il existe $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}_+ \setminus \{0\}$ tel que,

$(1/\lambda_0)(x/p(x)) \in B$. On a alors,

$$p\left(\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{x}{p(x)}\right)\right) = \frac{1}{\lambda_0} \leqslant \beta_p\,, \qquad f\left(\frac{1}{\lambda_0}\quad\left(\frac{x}{p(x)}\right)\right) = 1\,,$$

ce qui donne $f(x/p(x)) = \lambda_0 \geqslant 1/\beta_p$ d'où, $p(x) \leqslant \beta_p \cdot f(x)$ relation qui est vérifiée aussi si $p(x) = 0$, d'où la proposition.

Remarque. Dans un espace localement convexe n'est pas vraie qu'un cône nucléaire est bien basé.

Corollaire 1. *Si l'espace $E$ est un espace normé alors un cône convexe $\boldsymbol{K} \subset E$ est nucleaire si et seulement si $\boldsymbol{K}$ est bien basé.*

Corollaire 2. *Un cône convexe localement compact ou faiblement localement compact dans un espace localement convexe est nucléaire.*

Corollaire 3. *Dans l'espace $R^n$ chaque cône convexe fermé et saillant est nucléaire.*

La notion de cône nucléaire nous a été inspirée par la proposition suivante qui utilise les espaces localement convexes nucléaires.

Let espaces nucléaires et leurs propriétés se trouvent dans les ouvrages [**21**], [**35**].

La caractérisation des espaces nucléaires qui sera utilisée dans cet ouvrage se trouve dans [**35**].

Proposition 6. *Soit $(E, \operatorname{Spec} E)$ un espace nucleaire. Alors chaque cône convexe normal $\boldsymbol{K}$ de l'espace $E$ est un cône nucleaire.*

Dém. Soit $B$ une base pour le $\operatorname{Spec} E$ et $p \in B$.

Puisque $E$ est nucléaire il existe une suite équicontinue $\{f_n\}_{n\in N} \subset E'$ et une suite $\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset l_1^+$ telles que pour tout $x \in E$, $p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x, f_n\rangle|$.

Si $\boldsymbol{K} \subset E$ est un cône normal il existe une partie équicontinue $M \subset K'$ et deux suites $\{g_n\}_{n\in N}$, $\{h_n\}_{n\in N} \subset M$ telles que pour tout $n \in N$ on a $f_n = g_n - h_n$.

En posant $\mu_{2n} = \mu_{2n+1} = \lambda_n$, $r_{2n} = g_n$, $r_{2n+1} = h_n$, on obtient

$$(*) \quad p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x, f_n\rangle| = \sum_n \lambda_n |\langle x, g_n - h_n\rangle| \leqslant \sum_n \mu_n |\langle x, r_n\rangle| \qquad \forall x \in E\,.$$

On observe que $\{r_n\}_{n\in N} \subset \boldsymbol{K}'$ est équicontinue, $\{\mu_n\}_{n\in N} \subset l_1^+$ et comme $\forall x \in \boldsymbol{K}$

on a $r_n(x) \geqslant 0$, si on prend $f_p = \sum_n \mu_n r_n$ de la relation $(*)$ on obtient $p(x) \leqslant f_p(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{K}$ ce qui donne que le cône $\boldsymbol{K}$ est nucléaire.

On dit qu'un espace localement convexe $(E, \operatorname{Spec} E)$ Hausdorff ordonné par un cône convexe saillant $\boldsymbol{K} \subset E$ est un *espace de type* $(L)$ si $E$ est un espace réticulé et il existe une base $B$ du Spec $E$ formé par des semi-normes solides et additives, c'est-à-dire pour toute $p \in B$ on a

$$(1)\ \forall x, y \in E,\ |x| \leqslant |y| \Rightarrow p(x) \leqslant p(y);\quad (2)\ \forall x, y \in K,\ p(x+y) = p(x) + p(y).$$

Les espaces localement convexes de type $(L)$ on été étudiés dans les ouvrages [**13**], [**16**]$_1$, [**17**].

On sait [**13**] que dans certains cas les espaces localement convexes de type $(L)$ sont des espaces de fonctions localement intégrables sur un espace localement compact.

Proposition 7. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe Hausdorff de type* $(L)$ *et* $\boldsymbol{K}$ *le cône des elementes positifs. Si l'espace* $E$ *est un espace bornologique et* $\boldsymbol{K}$ *un* $(b)$*-cône strict* [**23**] *séquentiellement complet ou si* $E$ *est un espace de Fréchet, alors* $\boldsymbol{K}$ *est un cône nucléaire.*

Dém. Soit $B$ une base pour le Spec $E$ telle que chaque semi-norme $p \in B$ est solide et additive.

Puisque $E$ est réticulé, pour chaque $p \in B$ la fonction $f_p(x) = p(x^+) - p(x^-)$ est bien définie pour chaque $x \in E$ parce que si $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$, alors $p(x_1) - p(x_2) = p(y_1) - p(y_2)$.

On observe que $f_p$ est positive et on peut prouver qu'elle est linéaire. En effet,

$$f_p(x+y) = f_p((x^+ + y^+) - (x^- + y^-)) = p(x^+ + x^+) - p(x^- + y^-)$$

$$= p(x^+) - p(x^-) + p(y^+) - p(y^-) = f_p(x) + f_p(y)\,.$$

Si $\lambda > 0$ est un nombre rationnel et $x \in \boldsymbol{K}$ alors on a $f_p(x) = p(\lambda x) = \lambda p(x) = \lambda f_p(x)$.

Soit $\lambda \in \boldsymbol{R}_+ \setminus \{0\}$ et $x \in \boldsymbol{K}$ et $\{r_n\}_{n\in N}$, $\{t_n\}_{n\in N}$ deux suites de nombres rationnels telles que $\{r_n\} \uparrow \lambda$ et $\{t_n\} \downarrow \lambda$. On a alors,

$$r_n f_p(x) = r_n p(x) = p(r_n x) \leqslant p(\lambda x) \leqslant p(t_n x) = t_n p(x) = t_n f_p(x)$$

$(r_n$ et $t_n$ sont positifs).

Comme $\boldsymbol{R}$ vérifie la propriété d'Archimède il résulte que $\lambda f_p(x) = f_p(\lambda x)$.

On obtient ainsi la linéarité de $f_p$ et on observe aussi que le prolongement $f_p$ est unique (pour $p$).

Utilisant le théorème Nachbin-Namioka-Schaefer [**23**] il résulte que pour toute $p \in B$ l'application $f_p$ est continue et donc le cône $\boldsymbol{K}$ est nucléaire.

Un autre classe de cônes qui sont nucléaires sont les cônes semi-complets au sens de Mokobodzki [**20**].

Dans l'ouvrage [**20**] les cônes semi-complets sont considérés dans un cadre plus général utile pour la théorie axiomatique du potentiel.

On présente ici les cônes semi-complets dans un cadre plus restrictif avec des démonstrations directes mais suffisant pour la théorie des cônes nucléaires.

Soit $(E, \operatorname{Spec} E)$ un espace localement convexe Hausdorff, $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe et $\{f_n\}_{n \in N}$ une suite de formes linéaires, continues et positives sur $\boldsymbol{K}$.

Déf. 2. On dit que le cône $\boldsymbol{K}$ est *semi-complet pour la suite* $\{f_n\}_{n \in N}$ si, pour toute suite $\{x_m\}_{m \in N} \subset \boldsymbol{K}$ telle que $\sum\limits_m f_n(x_m) < +\infty$ pour tout $n \in N$ il résulte qu'il existe $x = \sum\limits_m x_m$ et $x \in \boldsymbol{K}$.

On dit que l'application $f\colon \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{R}$ (pas nécessairement linéaire) est *relativement bornée* si pour tout $x \in \boldsymbol{K}$ il existe $\varrho \in \boldsymbol{R}_+$ tel que si $x = u + v$ où $u, v \in \boldsymbol{K}$, alors $f(u) \leqslant \varrho$.

Remarque. Il est évident que si $f$ est une application linéaire et positive sur $\boldsymbol{K}$ alors elle est relativement bornée.

Lemme 1. *Soit $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe semi-complet pour la suite $\{f_n\}_{n \in N}$ et $f\colon \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{R}$ relativement bornée. Il existe $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ et $r \in N$ tels que*

$$(\theta_1) \qquad x \in \boldsymbol{K} \quad \text{et} \quad f_m(x) \leqslant \varepsilon \qquad \forall m \leqslant r \Rightarrow f(x) \leqslant \varrho\,.$$

Dém. Si pour un $\varepsilon > 0$ et $r \in N$ l'ensemble $M(\varepsilon, r) = \{x \in \boldsymbol{K} \mid f_m(x) \leqslant \varepsilon, \forall m \leqslant r\}$ est vide, on admettra que le lemme est vérifié.

On suppose donc que $M(\varepsilon, r) \neq \emptyset$, $\forall r \varrho N$ et $\forall \varepsilon > 0$ et que la relation $(\theta_1)$ n'est pas vérifiée.

Alors, pour tout $r \in N$ il existe $x_r \in \boldsymbol{K}$ tel que $f(x_r) \geqslant r$ et $\forall m \in N$, $m \leqslant r$, $f_m(x_r) \leqslant 1/2^r$.

Pour $r \geqslant n$ on a $f_n(x_r) \leqslant 1/2^r$ et si $r > n$ on peut écrire $\sum\limits_{m \leqslant r} f_n(x_m) = \sum\limits_{m \leqslant n} f_n(x_m) + \sum\limits_{n < m \leqslant r} f_n(x_m)$, d'où $\sum\limits_{m \leqslant r} f_n(x_m) \leqslant \sum\limits_{m \leqslant n} f_n(x_m) + 1$.

Puisque le cône $\boldsymbol{K}$ est semi-complet pour la suite $\{f_n\}_{n \in N}$ il résulte que si $y_n = \sum\limits_{m \neq n} x_m$ et $x = \sum\limits_{m \geqslant 1} x_m$, alors $x = y_n + x_n$ et $x, y_n \in \boldsymbol{K}$.

Mais par construction $f(x_n) \geqslant n$ ce qui est en contradiction avec le fait que $f$ est relativement bornée.

Lemme 2. *Soit $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe semi-complet pour la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de formes linéaires continues et positives sur $\boldsymbol{K}$. Si $p: E \to R_+$ est une seminorme relativement bornée sur $\boldsymbol{K}$ alors, il existe une constante $\varrho_0 > 0$ et $r \in N$ tels que $\forall x \in \boldsymbol{K}$, $p(x) \leqslant \varrho_0 \sup_{n\leqslant r} f_n(x)$.*

Dém. Le Lemme 1 implique qu'il existe $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ et $r \in N$ tels que $x \in \boldsymbol{K}$ et $f_m(x) \leqslant \varepsilon$, $\forall m \leqslant r \Rightarrow p(x) \leqslant \varrho$. On pose $\varphi_r(x) = \sup_{m\leqslant r} f_m(x)$ et $\varrho_0 = \varrho/\varepsilon$.

Si $\varphi_r(x) = 0$ alors pour tout $\lambda \geqslant 0$ on a $\varphi_r(\lambda x) = 0 \leqslant \varepsilon$ et donc $p(\lambda x) \leqslant \varrho$ d'où $p(x) = 0$, ce qui donne $p(x) \leqslant \varrho_0 \sup_{m\leqslant r} f_m(x)$.

Si $\varphi_r(x) = \alpha > 0$ alors $\varphi_r\big((\varepsilon/\alpha)x\big) = \varepsilon$ d'où $p\big((\varepsilon/\alpha)x\big) \leqslant \varrho$, ce qui implique $p(x) \leqslant (\varrho/\varepsilon)\alpha = \varrho_0 \sup_{m\leqslant n} f_m(x)$.

Proposition 8. *Soit* $(E, \operatorname{Spec} E)$ *un espace localement convexe Hausdorff et $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe semi-complet pour une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de formes linéaires continues et positives sur $\boldsymbol{K}$. Alors le cône $\boldsymbol{K}$ est nucléaire.*

Dém. Soit $B$ une base pour le Spec $E$; on prouve que pour chaque seminorme $p \in B$ il existe $n_p \in N$ tel que

$$(\theta_2) \qquad \forall x \in \boldsymbol{K}\,, \quad p(x) \leqslant n_p \sum_{k\leqslant n_p} f_k(x)\,.$$

On sait que pour chaque $n \in N$, $f_n$ est relativement bornée.

Soit $A_1 = \big\{\{\alpha_n\}_{n\in N} \in l_1^+ \,|\, \sum_n \alpha_n = 1\big\}$. On remarque que si $\{x_n\}_{n\in N} \subset E$ est une suite qui a la propriété que pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\in N} \in l_1^+$ la famille $\{\alpha_n x_n\}_{n\in N}$ est sommable dans l'espace $E$ alors $\{x_n\}_{n\in N}$ est une suite bornée.

Soit $p \in B$; on prouve que $p$ est relativement bornée sur $\boldsymbol{K}$.

En effet, soit $x \in \boldsymbol{K}$ et $\{x_n\}_{n\in N}$ une suite telle que $\forall n \in N$, $x_n \in \boldsymbol{K} \cap (x - \boldsymbol{K})$ et $\{\alpha_n\}_{n\in N} \in l_1^+$.

On peut supposer que $\{\alpha_n\}_{n\in N} \in A_1$. Puisque pour chaque $m \in N$, $f_m$ est relativement bornée on a $\forall m \in N$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_m(\alpha_n x_n) < +\infty$, et comme $\boldsymbol{K}$ est semi-complet il résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in \boldsymbol{K}$.

Donc $\{x_n\}_{n\in N}$ est bornée ce qui donne que l'ensemble $\boldsymbol{K} \cap (x - \boldsymbol{K})$ est borné pour tout $x \in \boldsymbol{K}$.

On a alors que l'ensemble $\{y \in E \,|\, p(y) \leqslant 1\}$ absorbe l'ensemble $\boldsymbol{K} \cap (x - \boldsymbol{K})$

pour tout $x \in \boldsymbol{K}$ d'où il résulte que $p$ est relativement bornée sur $\boldsymbol{K}$. Le Lemme 2 implique qu'il existe $\varrho_0 > 0$ et $r \in N$ tels que $\forall x \in \boldsymbol{K}$, $p(x) \leqslant \varrho_0 \sup\limits_{m \leqslant r} f_m(x)$.

Puisque pour tout $m \in N$, $f_m$ est positive sur $\boldsymbol{K}$ il résulte qu'on peut choisir $n_p \in N$ tel que $\varrho_0 \sup\limits_{m \leqslant r} f_m(x) \leqslant n_p \sum\limits_{k \leqslant n_p} f_k(x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{K}$ et donc $\boldsymbol{K}$ est nucléaire.

Corollaire. *Si* ($E$ Spec $E$) *est un espace localement convexe Hausdorff et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe saillant faiblement complet, faiblement normal dont le sommet possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles, alors* $\boldsymbol{K}$ *est un cône nucléaire.*

Remarques. (1) Examples de cônes semi-complets se trouvent dans la théorie axiomatique du potentiel, par exemple le cône $\mathscr{H}^+$ des fonctions harmoniques positives sur un espace localement compact $\Omega$ dans de nombreuses théories (Bauer, Brelot, Constantinescu-Cornea) est semi-complet pour une suite $\{\mu_n\}_{n \in N}$ de mesures de Radan positives sur $\Omega$ à support compact [**20**].

(2) On sait que si $E(\tau)$ est un espace nucléaire et $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe normal et fermé alors sur $\boldsymbol{K}$ la topologie $\tau$ coincide avec la topologie faible. Dans l'auvrage [**16**]$_4$ on a prouvé que cette propriété n'est pas vraie toujours sur un cône nucléaire.

(3) Dans l'ouvrage [**16**]$_4$ on a prouvé aussi que si l'espace $E$ est ordonné par un cône nucléaire alors chaque suite généralisée $(OA)$-Cauchy [**16**]$_4$ est absolument sommable.

(4) Les cônes nucléaires jouent aussi un rôle important dans l'étude de la propriété d'absolue sommabilité pour les applications positives [**16**]$_4$.

(5) On remarque aussi que les cônes qui possèdent la propriété de l'angle au sens de Cesari et Suryanarayana [**9**]$_2$ et utilisés dans l'étude de l'existence de l'optimum de Pareto pour les problèmes de contrôle optimal vectoriel sont des cônes nucléaires.

**6** – Les résultats suivants utilisent les cônes nucléaires dans l'étude de l'existence des points à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour des ensembles arbitraires dans un espace localement convexe, et donc dans l'étude de l'optimum de Pareto.

Théoremè 2. *Soit* ($E$ Spec $E$) *un espace localement convexe,* $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ *une base pour le* Spec $E$, $S \subset E$, $S \neq \emptyset$ *et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe nucleaire.*

*S'il existe un ensemble borné et complet* $S_0 \subset S$ *tel que*

$$(\gamma)_1 \qquad \forall x \in S_0, \quad S \cap (\boldsymbol{K} + x) \subset S_0,$$

*alors l'enseemble* $S$ *a au moins un point à support* $\boldsymbol{K}$*-cônique.*

Dém. On considère le système dynamique, $\Gamma\colon S_0 \to 2^{S_0}$ définie par $\Gamma(x) = S \cap (\boldsymbol{K} + x)$; $\forall x \in S_0$ et on prouve qu'il existe un point critique pour $\Gamma$ dans l'ensemble $S_0$.

On prend $F = E$, $\operatorname{Spec} F = \operatorname{Spec} E$ et $f = I_{S_0}$.

Puisque le cône $\boldsymbol{K}$ est nucléaire, pour chaque $\alpha \in A$ il existe $f_\alpha \in E'$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{K}$ on a $p_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(x)$.

Comme $S_0$ est borné il existe $m_\alpha = \sup\limits_{x \in S_0} f_\alpha(x)$.

On pose pour tout $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha(x) = m_\alpha - f_\alpha(x)$, $\forall x \in S_0$.

Si $x \in S_0$ et $u \in \Gamma(x)$ alors $u \in S \cap (\boldsymbol{K} + x)$, donc il existe $v \in \boldsymbol{K}$ tel que $u = v + x \in S_0$.

Pour chaque $\alpha \in A$ on a

$$\begin{aligned} p_\alpha(x - u) &= p_\alpha(u - x) = p_\alpha(v) \leqslant f_\alpha(v) = f_\alpha(v + x - x) \\ &= f_\alpha(v + x) - f_\alpha(x) = [m_\alpha - f_\alpha(x)] - [m_\alpha - f_\alpha(v + x)] = \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(u) . \end{aligned}$$

Comme pour chaque $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha\colon S_0 \to R_+$ est une fonction continue on peut appliquer le Corollaire 3 du Théorème 1 ce qui prouve le théorème.

Corollaire 1. *Si les hypothèses du Théorème 2 sont vérifiées et s'il existe un point $x_0 \in S$ tel que $S \cap (\boldsymbol{K}+x_0)$ est borné et complet, alors l'ensemble $S$ a au moins un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique.*

Corollaire 2 [Browder [**6**]]. *Si $E$ est un espace de Banach, $S \subset E$ un ensemble borné et fôrmé alors pour chaque cône convexe $\boldsymbol{K} \subset E$ qui a une base borneé et fermeé, il existe dans l'ensemble $S$ un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique.*

Soit maintenant $E$ l'espace $R^n$ avec sa topologie naturelle et $X \subset R^n$ un ensemble convexe non-vide.

L'ensemble $RC(X) = \{y \in R^n \mid \forall \lambda \in \boldsymbol{R}_+,\ \forall x \in X,\ x + \lambda y \in X\}$ est un cône convexe qui s'appelle *le cône* de *recession* de l'ensemble $X$.

On sait que si $\{X_i\}_{i \in I}$ est une famille de sous-ensemble convexes, et fermés de l'espace $R^n$ telle que $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ alors $RC(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) = \bigcap\limits_{i \in I} RC(X_i)$.

Corollaire 3 [Bitran-Magnanti] $[4]_1$. *Soit $\boldsymbol{K} \subset R^n$ un cône convexe saillant et fermé.*

*Si $X \subset R^n$ est un ensemble non-vide convexe et fermé alors $X$ a un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique si et seulement si $\boldsymbol{K} \cap RC(X) = \{0\}$.*

Dém. Si $\boldsymbol{K} \cap RC(X) \neq \{0\}$ alors il existe $0 \neq y \in \boldsymbol{K} \cap RC(X)$ et comme

$x + y \in (x + \boldsymbol{K}) \cap X$ pour tout $x \in X$ il n'existe aucun point à support $\boldsymbol{K}$-cônique dans l'ensemble $X$.

Soit $\boldsymbol{K} \cap RC(X) = \{0\}$ alors si $x_0 \in X$ on a $RC[(x_0 + \boldsymbol{K}) \cap X] = \boldsymbol{K} \cap RC(X) = \{0\}$ d'où il résulte que l'ensemble $(x_0 + \boldsymbol{K}) \cap X$ est borné.

Le cône $\boldsymbol{K}$ étant nucléaire le Corollaire 1 du Théorème 2 implique l'existence d'un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique dans l'ensemble $X$.

Remarque Si: $K_s^+ = \{y \in R^n \mid \langle y, x\rangle > 0, \ \forall x \in K \setminus \{0\}$ et $[RC(X)]^* = \{y \in R^n \,|\, \langle y, x\rangle \leqslant 0, \ \forall x \in RC(X)\}$, alors la relation, $\boldsymbol{K}_s^+ \cap [RC(X)]^* \neq \emptyset$ implique, $\boldsymbol{K} \cap RC(X) = \{0\}$.

La notion suivante a été définie par Hartley [**15**].

Soit $\boldsymbol{K} \subset R^n$ un cône convexe et $X \subset R^n$ un ensemble non-vide.

On dit que l'ensemble $X$ est $\boldsymbol{K}$-*compact* si, pour chaque $x \in X$ l'ensemble $(x - \bar{\boldsymbol{K}}) \cap X$ est compact.

On remarque aussi que la notion de *point efficace* au sens de Hartley [**15**] est en réalité la notion de point à support $(-\boldsymbol{K})$-cônique.

On a alors,

Corollaire 4 (Hartley [**15**]). *Si $\boldsymbol{K} \subset R^n$ est un cône convexe et $X \subset R^n$ un ensemble non-vide $\boldsymbol{K}$-compact, alors il existe dans l'ensemble $X$ un point efficace.*

Soit $\boldsymbol{K} \subset R^n$ un cône convexe fermé qui a l'intérieur non-vide.

On dit que l'ensemble $X \subset R^n$ est *fortement* $\boldsymbol{K}$-*semi-borné* si $RC(\overline{co(X)}) \subset \{0\} \cup \operatorname{Int} \boldsymbol{K}$.

Corollaire 5. *Soit $\boldsymbol{K} \subset R^n$ un cône convexe fermé tel que* $\operatorname{Int} \boldsymbol{K} \neq \emptyset$ *et $X \subset R^n$ un sous ensemble non-vide, fortement $\boldsymbol{K}$-semi-borné et fermé.*

*S'il existe $x \in X$ tel que $X \not\subset x - \boldsymbol{K}$, alors il existe dans l'ensemble $X$ un point à support $(-\boldsymbol{K})$, cônique (c'est-à-dire efficace).*

Dém. Le Lemme 2.9 de l'ouvrage [**34**] implique que l'ensemble $X \cap (x - \boldsymbol{K})$ est borné et on applique le Corollaire 1 du Théorèm 2.

Le résultat suivant généralise aux espaces de dimension infinie un critère d'existence pour l'optimum de Pareto démontré par T. Tanino et R. Sawaragi dans l'ouvrage [**31**] dans le cas de l'espace $R^n$.

On remarque que la démonstration proposée par T. Tanino et R. Sawaragi utilise le fait que $\dim R^n = n < +\infty$ et que $\operatorname{Int} R_+^n \neq \emptyset$.

Aussi, ce critère est fondamental dans la construction de Tanino et Sawaragi de la dualité pour l'optimisation multicritère.

Soit $(E(\tau), \operatorname{Spec} E)$ un espace localement convexe et $\boldsymbol{K} \subset E$ un cône convexe saillant.

Si $x, y \in E$ on pose, $x < y$ si et seulement si $y - x \in \boldsymbol{K}$ et $x \neq y$ et si $A \subset E$ on pose $\mathrm{eff}(A) = \{a \mid a \in A$ et $[a + (-K)] \cap A = \{a\}\}$.

Déf. 3. (1°) On dit que l'ensemble $A \subset E$ est *$\boldsymbol{K}$-borné* s'il existe $a^0 \in E$ tel que $A \subset a^0 + \boldsymbol{K}$ [**31**].

(2°) On dit que l'ensemble $A \subset E$ est *$\boldsymbol{K}$-fermé* si $A + \boldsymbol{K}$ est fermé [**31**].

(3°) On dit que l'ensemble $A \subset E$ est *$\boldsymbol{K}$-semicompact* s'il est $\boldsymbol{K}$-borné et $\boldsymbol{K}$-fermé en même temps.

Théorème 3. *Soit* $(E(\tau), \mathrm{Spec}\, E)$ *un espace localement convexe quasi-complet et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe fermé et $\tau$-nucléaire.*

*Si $A \subset E$ est un ensemble $\boldsymbol{K}$-semicompact alors* $\mathrm{eff}(A) \neq \emptyset$.

Dém. On considère l'ensemble, $A' = (A + \boldsymbol{K}) \cap (\bar{a} - \boldsymbol{K})$ où $\bar{a} \in A$ est un élément arbitrairement choisi. Puisque $A$ est $\boldsymbol{K}$-fermé et $\boldsymbol{K}$ fermé il résulte que $A'$ est un ensemble fermé.

L'ensemble $A'$ est aussi un ensemble borné.

En effet, $A$ étant $\boldsymbol{K}$-borné il existe $a^0 \in E$ tel que, $A + \boldsymbol{K} \subset a^0 + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{K} \subset a^0 + \boldsymbol{K}$, donc, $A' \subset (a_0 + \boldsymbol{K}) \cap (\bar{a} - \boldsymbol{K})$ d'où il résulte que $A' \subset [a^0, \bar{a}] = \{x \in E \mid a^0 \leqslant x \leqslant \bar{a}\}$.

Mais le cône $\boldsymbol{K}$ étant nucléaire il est normal et donc $[a^0, \bar{a}]$ est un ensemble borné.

Le cône $\boldsymbol{K}$ étant nucléaire il existe une base $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ pour le Spec $E$ telle que $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha \in E'$, $\forall x \in \boldsymbol{K}$, $p_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(x)$, mais comme on a $p_\alpha(-x) = p_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(x) = -f_\alpha(-x)$, $\forall x \in \boldsymbol{K}$, il résulte que le cône $-\boldsymbol{K}$ est aussi nucléaire.

Puisque, $\forall x \in A'$, $A' \cap (-\boldsymbol{K} + x) \subset A'$ et l'espace $E$ est quasi-complet, on peut appliquer le Théorème 2 à l'ensemble $A'$ et on obtient que $\mathrm{eff}(A') \neq \emptyset$.

Pour terminer la démonstration il reste à montrer que $\mathrm{eff}(A') \subset \mathrm{eff}(A)$.

Pour prouver cette inclusion on prouve que si $a^* \in \mathrm{eff}(A')$ alors,

$$\text{(i)} \quad a^* \in A\,, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad a^* \in \mathrm{eff}(A).$$

(i) On suppose que $a^* \notin A$, mais alors comme $a^* \in A'$ il résulte que $a^* = a + r$ où $r \in \boldsymbol{K}$, $r \neq 0$ et $a \in A$ et donc $a < a^*$.

Puisque $a \in A$ on a

$$a \in A + \boldsymbol{K}\,. \tag{1}$$

D'autre part, $a^* = \bar{a} - r_1$, où $r_1 \in \boldsymbol{K}$, d'où il résulte que $a = a^* - r = \bar{a} - (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r})$ et donc,

$$a \in \bar{a} - \boldsymbol{K}\,. \tag{2}$$

Alors les relations (1) et (2) impliquent qu'il existe $a \in A'$ et $a < a^*$ ce qui est en contradiction avec la relation $a^* \in \text{eff}\,(A')$. Donc la relation (i) est vraie.

(ii) On suppose maintenant que $a^* \in \text{eff}\,(A')$ mais que $a^* \notin \text{eff}\,(A)$. Il existe alors $a'' \in A$ tel que $a'' < a^*$; mais dans ce cas $a'' \in A'$ parce que, $a'' \in a^* - \boldsymbol{K} \subset \bar{a} - \boldsymbol{K}$ et $a'' \in A \subset A + \boldsymbol{K}$.

Donc il résulte qu'il existe $a'' \in A'$ tel que $a'' < a^*$ ce qui est impossible parce que $a^* \in \text{eff}\,(A')$ et le théorème est démontré.

Corollaire. *Soit* $(E(\tau), \text{Spec}\, E)$ *un espace localement convexe quasi-complet et* $\boldsymbol{K} \subset E$ *un cône convexe fermé et* $\tau$*-nucléaire.*

*Si* $A \subset E$ *est un ensemble* $\boldsymbol{K}$*-semicompact, alors* $A \subset \text{eff}\,(A) + \boldsymbol{K}$.

Dém. Soit $\bar{a} \in A$ arbitrairement choisi et si on considère l'ensemble $A' = (A + \boldsymbol{K}) \cap (\bar{a} - \boldsymbol{K})$ on sait qu'il existe $a^0 \in E$ tel que $A' \subset [a^0, \bar{a}]$.

Du Théorème 3 il résulte qu'il existe $a^* \in \text{eff}\,(A')$ tel que $a^* \leqslant \bar{a}$ d'où on obtient, $\bar{a} \in \text{eff}\,(A') + \boldsymbol{K} \subset \text{eff}\,(A) + \boldsymbol{K}$.

Soit $(E(\tau), \text{Spec}\, E)$ un espace localement convexe et $(F, \boldsymbol{K})$ un espace vectoriel ordonné par la cône convexe $\boldsymbol{K}$.

On dit que l'application $f\colon E \to F$ est $\tau 0$*-bornée* si pour tout ensemble $\tau$-bornée $B \subset E$ il résulte que $f(B)$ est borné en ordre, c'est-à-dire il existe $u_1, u_2 \in F$ tels que $f(B) \subset [u_1, u_2] = \{y \in F \mid u_1 \leqslant y \leqslant u_2\}$.

Corollaire 2. *Soit* $(E, \text{Spec}\, E)$, $(F, \text{Spec}\, F)$ *deux espaces localement convexes. On suppose que* $F$ *est quasi-complet et ordonné par un cône convexe fermé et nucléaire.*

*Soit* $B \subset E$ *un ensemble borné et* $f\colon B \to F$ *une fonction telle que* $f(B)$ *est* $\boldsymbol{K}$*-fermé.*

*S'il existe une fonction* $\tau 0$*-bornée* $g\colon E \to F$ *telle que,* $(\forall x \in B)(g(x) \leqslant f(x))$ *alors,* $\text{eff}\,(f(B)) \neq \emptyset$.

Dém. On observe que $f(B)$ est un ensemble $\boldsymbol{K}$-semicompact et on applique le Théorème 3.

Remarque 1. Les hypothèse du Corollaire 2 sont vérifiées si $F = R^n$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^n_+$, $B \subset E$ et $f\colon B \to \boldsymbol{R}^n_+$ une application $\varepsilon$-sous-différentiable en $x_0 \in B$, c'est-à-dire il existe $T\colon E \to R^n$ linéaire et continue telle que $T(h) \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0) + \varepsilon$; $\forall h \in E$, et si $f(B)$ est $\boldsymbol{R}^n_+$-fermé. Dans ce cas $T$ est $\tau 0$-bornée parce que l'espace ordonné $(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n_+)$ est un espace de Banach qui a une unité forte.

Remarque 2. Dans l'ouvrage [**31**] il est démontré que si $f\colon E \to \boldsymbol{R}^n$ où $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est inf semi-cont c'est-à-dire $f_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ est inf semi-cont, alors pour chaque $B \subset E$ compact il résulte que $f(B)$ est $\boldsymbol{K}$-semi-compact.

Remarque 3. Si $B \subset E$, $f: B \to F$ et $f(B)$ est compact, $F$ étant un espace localement convexe ordonné par un cône convexe fermé $\boldsymbol{K}$ alors $f(B)$ est $\boldsymbol{K}$-fermé.

Le résultat suivant est obtenu considérant l'optimum de Pareto comme un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique.

On n'utilise pas les cônes nucléaires mais la différentiabilité et le résultat obtenu est une généralisation d'un résultat démontré par S. Smale dans l'espace $\boldsymbol{R}^n$.

Un cas particulier de ce résultat a été aussi remarqué par C. Malivert [**18**]$_2$.

Soit $E(\tau)$ un espace vectoriel topologique, $U \subset E$ un ensemble ouvert et $x \in U$.

Si $(F, \operatorname{Spec} F)$ est un espace localement convexe, $f: U \to F$ une fonction et si pour chaque $h \in E$, il existe, $\lim\limits_{t \to 0_+} \big((f(x+th) - f(x))/t\big)$, on considère l'application, $D_x^+ f: E \to F$ définie par $D_x^+ f(h) = \lim\limits_{t \to 0_+} \big((f(x+th) - f(x))/t\big)$; $\forall h \in E$.

Proposition. *Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert, $(F, \operatorname{Spec} F)$ un espace localement convexe ordonné par un cône convexe $\boldsymbol{K} \subset F$ qui a $\operatorname{Int} \boldsymbol{K} \neq \emptyset$ et $f: U \to F$ une fonction.*

*Si $x \in U$ est un optimum de Pareto (c'est-à-dire $f(x)$ est un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour $f(U)$) et s'il existe $D_x^+ f$, alors $D_x^+ f(E)$ n'est pas dense dans l'espace $F$.*

Dém. On suppose que $f(x)$ est un point à support $\boldsymbol{K}$-cônique pour $f(U)$, donc $f(U) \cap (\boldsymbol{K} + f(x)) = \{f(x)\}$ d'où il résulte que,

$$(*) \qquad f(U) \cap (\operatorname{Int} \boldsymbol{K} + f(x)) = \emptyset .$$

La proposition sera démontrée si on montre que $D_x^+ f(E) \subset F \setminus \operatorname{Int} \boldsymbol{K}$. On suppose le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $h \in E$ tel que $D_x^+ f(h) \in \operatorname{Int} \boldsymbol{K}$. Puisque, $D_x^+ f(h) = \lim\limits_{t \to 0_+} \big((f(x+th) - f(x))/t\big)$ il résulte que pour tout $t > 0$ suffisamment petit on a, $\big((f(x+th) - f(x))/t\big) \in \operatorname{Int} \boldsymbol{K}$ et donc $f(x+th) - f(x) \in \operatorname{Int} \boldsymbol{K}$ pour tout $t > 0$ suffisamment petit.

Alors pour $t > 0$ suffisamment petit on a $x + th \in U$, $f(x+th) \in f(U)$ et $f(x+th) \in \operatorname{Int} [\boldsymbol{K} + f(x)] = \operatorname{Int} \boldsymbol{K} + f(x)$, d'où $f(x+th) \in f(U) \cap (\operatorname{Int} \boldsymbol{K} + f(x))$, ce qui est en contradiction avec la relation $(*)$, et la proposition est démontrée.

## Bibliographie


[1] B. BEAUZAMY, *Approximation des optima de Pareto*, Sem. Choquet, **2** (1977-1978), 17.1-17.3.

[2] A. BEN-ISRAEL, A. BEN-TAL and A. CHARNES, *Necessary and sufficient conditions for a Pareto optimum in convex programming*, Econometrica (4) **45** (1977), 811-820.

[3] H. P. BENSON, *Efficiency and proper efficiency in vector maximization with respect to cones*, Research Publication G.M.R. 2557, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan 1977.

[4] G. R. BITRAN and T. L. MAGNANTI: $[\cdot]_1$ *The structure of admissible points with respect to cone dominance*, J. Optimisation Theory Appl. (4) **29** (1979); $[\cdot]_2$ *Duality based characterizations of efficient facets* (preprint 1981).

[5] J. M. BORWEIN, *On the existence of Pareto efficient points*, Research report **80-7**, Dep. of Mathematics, Dalhousie Univ. Halifax, Nova Scotia, Canada.

[6] F. E. BROWDER, *Normal solvability for nonlinear mappings and the geometry of Banach spaces*, Proc. CIME Conf. Varenna 1970, Problems in nonlinear analysis, Edizioni Cremonese, Rome 1971.

[7] J. CARISTI, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwadness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 241-251.

[8] Y. CENSOR, *Pareto optimality in multiobjective problems*, Applied Math. and Optim. **4** (1977), 41-59.

[9] L. CESARI and N. B. SURYANARAYAN: $[\cdot]_1$ *Existence theorems for Pareto optimization in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976); $[\cdot]_2$ *Existence theorems for Pareto optimization. Multivalued and Banach space valued functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. **244** (1978), 37-65.

[10] H. W. CORLEY: $[\cdot]_1$ *An existence result for maximizations with respect to cones*, J. Optimisation Theory Appl. (2) **31** (1980), 277-281; $[\cdot]_2$ *Duality theory for maximization with respect to cones*, Preprint 1981.

[11] B. CORNET, *Accessibilité des optimas de Pareto par des processus monotones*, C. R. Acad. Sci. Paris (1977).

[12] J. L. GOFFIN and H. HAURIE, *Necessary and sufficient conditions for Pareto optimality in a multicriterion perturbed systems*, 5th Conf. on Optim. Techniques in Lecture Notes in Computer Science **12**, Springer-Verlag.

[13] GH. GRIGORE, *La représentation des espaces réticulés localement convexes de type* $(L)$, Stud. Cerc. Mat. (8) **22** (1970), 1183-1188 (en Roumaine).

[14] R. GUESNERIE, *Optimum de Pareto et ensembles de production non-convexes*, Bull. Math. Economiques, 31-60.

[15] R. HARTLEY, *On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness*, Siam J. Appl. Math. (2) **34** (1978), 211-222.

[16] G. Isac: $[\cdot]_1$ *The* $(M)$-$(L)$ *type duality for locally convex lattices*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. (2) **16** (1971), 217-223; $[\cdot]_2$ *Sur les points à support côniques dans des espaces localement convexes*, Ann. Fac. Sci. Univ. Nat. Zaïre (Kinshasa), Sect. Math-Phys. (2) **3** (1977), 281-291; $[\cdot]_3$ *Cône localement bornés et cônes complètement réguliers, Applications à l'analyse non-linéaire*, Séminaire d'analyse moderne. Univ. de Sherbrooke **17** (1980), 1-168; $[\cdot]_4$ *Un critère de sommabilité absolue dans les espaces localement convexes ordonnés*. Cônes nucléaires, Preprint 1981; $[\cdot]_5$ *Points critiques pour des systèmes dynamiques*, Cônes nucléaires et optimum de Pareto, Preprint 1981.

[17] G. J. O. Jameson, *Ordered linear spaces*, Lectures notes in Math. **141**, Springer-Verlag 1970.

[18] C. Malivert: $[\cdot]_1$ *Duality in multiobjective programming*, Preprint 1981, Univ. de Limoges; $[\cdot]_2$ *A descent method for Pareto optimization*, Preprint 1980, Univ. de Limoges.

[19] M. Maschler and B. Peleg, *Stable sets and stable points of set-valued dynamic systems with applications to game theory*, Siam J. Control (6) **14** (1976), 985-995.

[20] G. Mokobodzki, *cônes normaux et espaces nucléaires. Cônes semi-complets*. Séminaire Choquet, Initiation à l'Analyse, 7-ième année 1967/1968, B-6.

[21] A. Pietch, *Nuclear locally convex spaces*, Springer-Verlag 1972.

[22] J. P. Penot, *L'optimisation à la Pareto: deux ou trois choses que je sais d'elle*, Publ. Math., Univ. de Pau 1978.

[23] A. L. Peressini, *Ordered topological vector spaces*, Harper & Row, New York 1967.

[24] R. R. Phelps, *Support cones in Banach spaces and their applications*, Advances in Math. **13** (1974), 1-19.

[25] C. Raffin, *Optimum de Pareto et col du lagrangien*, Bull. Math. Econ. **13** (1975), 15-25.

[26] D. Rand, *Thresholds in Pareto sets*, J. Math. Econ. **3** (1976), 139-154.

[27] S. N. Robinson, *First order conditions for nonlinear Pareto optimisation*, Siam J. Appl. Math. **30** (1976), 597-607.

[28] C. P. Simon and C. Titus, *Characterization of optima in smooth Pareto economic systems*, J. Math. Econ. **2** (1975), 297-330.

[29] S. Smale: $[\cdot]_1$ *Global analysis and economics*. I: *Pareto optimum and a generalization of Morse theory*, N. Peixoto ed., Dynamical Systems, Acad. Press, New York 1973; $[\cdot]_2$ *Global analysis and economics*. III: *Pareto optima and price equilibria*, J. Math. Econ. **1** (1974), 107-117; $[\cdot]_3$ *Global analysis and economics* V: *Pareto theory with constraints*, J. Math. Econ. **1** (1974), 213-227; $[\cdot]_4$ *Global analysis and economics* VII: *Geometric analysis of Pareto optima and price equilibria under classical hypothesis*, J. Math. Econ. **3** (1976), 1-14.

[30] W. STADLER: [•]$_1$ *Sufficient conditions for preference optimality*, J. Optimisation Theory Appl. (18) **119** (1976); [•]$_2$ *A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem*, J. Optimisation Theory Appl., (1) **29** (1979), 1-51; [•]$_3$ *Preference optimality in multicriteria control and programming problems*, Nonlinear Anal. (1) **4** (1980), 51-65.

[31] T. TANINO and Y. SAWARAGI, *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization*, J. Optimisation Theory Appl. (4) **31** (1980), 473-499.

[32] F. TREVES, *Locally convex spaces and linear partial differential equations*, Springer-Verlag, New York 1967.

[33] Y. H. WAN: [•]$_1$ *On local Pareto optima*, J. Math. Econ. **2** (1975), 35-42; [•]$_2$ *On the algebraic criteria for local Pareto optima*, I, Topology **16** (1977). 113-117; [•]$_3$ *On the algebraic criteria for local Pareto optima*, II, Trans, Am. Math. Soc. **245** (1978), 385-397.

[34] D. H. WAGNER, *Semi-compactness with respect to an euclidian cone*, Can. J. Math. XXIX, Nr. 1 (1977), 29-36.

[35] YAU-CHUEN WONG, *Schwartz spaces, nuclear spaces and tensor products*, Lecture notes in Math., Springer Verlag **726** (1979).

[36] P. L. YU, *Cone convexity, cone extrem points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optimisation Theory Appl. **14** (1974), 319-337.

* * *