Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 295-302

R. BALLI (*)

Moti vorticosi di un fluido conduttore tra due pareti piane parallele in movimento (**)

1 – Nella presente nota si esamina un problema di M.F.D. per un fluido omogeneo, viscoso, incomprimibile, conduttore.

Si determinano alcune classi di vortici che costituiscono moti non stazionari pseudopiani di prima specie [**2**]$_1$ nella regione limitata da due pareti piane parallele, mobili, perfettamente conduttrici. Il moto delle due pareti è rotatorio uniforme con la stessa velocità angolare costante Ω attorno a due assi ortogonali alle pareti stesse, assi che si muovono con leggi di moto assegnate in modo arbitrario e generalmente diverse tra loro.

Qualora ci si limiti a considerare l'aspetto fluidodinamico del problema e si considerino le pareti rotanti attorno allo stesso asse fisso, si determina una classe di vortici non stazionari generalizzanti quelli, stazionari, determinati da Berkèr [**2**]$_2$.

2 – Le equazioni della M.F.D. che regolano il moto non stazionario di un fluido omogeneo, viscoso, incomprimibile e conduttore, soggetto a forze di massa conservative, sono, in unità di Gauss [**1**]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\varrho}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 , \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 , \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} = 0 , \qquad \nu_m = c^2/4\pi\mu\sigma , \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 , \tag{2.4}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via Vanvitelli 2, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-II-1982.

dove ϱ, ν, μ, σ sono i parametri costanti che esprimono i valori della densità, della viscosità cinematica, della permeabilità magnetica, della conducibilità elettrica rispettivamente; p è la pressione e U è il potenziale specifico. Le incognite sono la pressione p e i due campi vettoriali $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$. Noti che siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$ il vettore $\boldsymbol{J}$ densità di corrente ed $\boldsymbol{E}$ campo elettrico si ottengono dalle due relazioni

$$\boldsymbol{J} = \frac{c}{4\mu\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\,, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} - \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}\,.$$

Nel seguito si riconosce che sono possibili, per il fluido in esame, moti pseudopiani di prima specie con assegnata funzione di corrente, nella regione di spazio delimitata da due piani paralleli rotanti con velocità angolare costante Ω attorno a due assi, ortogonali ai piani stessi e traslanti con legge di moto assegnata.

Si considerano i moti pseudopiani di prima specie caratterizzati dalla funzione di corrente

$$\varphi = \frac{\Omega}{2}\left[(x - f(z, t))^2 + (y - g(z, t))^2\right]. \tag{2.5}$$

Questi moti sono vortici circolari ad asse curvilineo variabile nel tempo di equazione $x = f(z, t)$, $y = g(z, t)$, ai quali corrisponde il campo delle velocità

$$\boldsymbol{v} = (\Omega(y - g), -\Omega(x - f), 0)\,. \tag{2.6}$$

Si assume per il campo magnetico una struttura analoga a quella del campo delle velocità e quindi il campo $\boldsymbol{B}$ risulta individuato da una funzione

$$\psi = \frac{\omega}{2}\left[(x - h(z, t))^2 + (y - k(z, t))^2\right], \tag{2.7}$$

$\omega =$ costante, essendo

$$\boldsymbol{B} = (\omega(y - k), -\omega(x - h), 0)\,. \tag{2.8}$$

Siano $z = 0$ e $z = a$ le pareti piane che delimitano la regione occupata dal fluido e siano $x = f_0(t)$, $y = g_0(t)$; $x = f_a(t)$, $y = g_a(t)$ le leggi di moto degli assi di rotazioni delle due pareti. Le (2.5) e (2.6) rendono automaticamente verificate le (2.2) e (2.4); le (2.1) (in cui si sia eliminata l'incognita p con l'usuale procedimento [**2**]$_1$) [1] e le (2.3) si traducono nelle seguenti quattro equazioni

[1] Note che siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$, l'incognita p si ottiene da (2.1) con una quadratura.

lineari nelle funzioni incognite $f(z,t)$, $g(z,t)$, $h(z,t)$, $k(z,t)$:

$$-\nu\Omega\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}+\Omega\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t}-\Omega^2\frac{\partial g}{\partial z}-\tau\omega^2\frac{\partial k}{\partial z}=0\,,\qquad \tau=1/4\pi\mu\varrho,$$

$$-\nu\Omega\frac{\partial^3 g}{\partial z^3}+\Omega\frac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial t}+\Omega^2\frac{\partial f}{\partial z}+\tau\omega^2\frac{\partial h}{\partial z}=0\,,$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\Omega(f-h)-\nu_m\frac{\partial^2 k}{\partial t^2}=0\,,$$

$$-\frac{\partial h}{\partial t}+\Omega(g-k)+\nu_m\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0\,.$$

Introdotte le due funzioni

$$F(z,t)=f(z,t)+ig(z,t)\,,\qquad G(z,t)=h(z,t)+ik(z,t)\,,$$

si ottengono facilmente le due equazioni

$$-\nu\Omega\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}+\Omega\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial t}+\Omega^2 i\frac{\partial F}{\partial z}+\tau\omega^2\, i\frac{\partial G}{\partial z}=0\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}+i\Omega F-i\Omega G-\nu_m\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=0\,. \tag{2.10}$$

La condizione di aderenza del fluido alle pareti è soddisfatta qualora risulti

$$F(0,t)=F_0(t)\equiv f_0(t)+ig_0(t)\,,\qquad F(a,t)=F_a(t)\equiv f_a(t)+ig_a(t)\,, \tag{2.11}$$

mentre la condizione al contorno per il campo magnetico, supposta la parete perfettamente conduttrice, è sempre soddisfatta da campi del tipo (2.8), in quanto il campo risulta tangenziale alla parete stessa.

Naturalmente il campo $\boldsymbol{B}$ alla parete è caratterizzato da linee di campo che sono cerchi concentrici di centro variabile nel tempo secondo la legge

$$G(0,t)=G_0(t)=h_0(t)+ik_0(t)\,,\qquad G(a,t)=G_a(t)\equiv h_a(t)+ik_a(t)\,. \tag{2.12}$$

3 – Il problema della determinazione delle soluzioni del sistema differenziale (2.9) e (2.10) nella regione $0<z<a$ con valori per $z=0$ e $z=a$ dati da (2.11) e (2.12), e che, all'istante iniziale assumono un valore assegnato $\Phi(z,0)$

e $\Gamma(z, 0)$ può essere risolto, in via del tutto generale, determinando le soluzioni del sistema (2.9) e (2.10) per $0 < z < a$ che verificano le condizioni

(I) $F = 0,\ G = 0$ per $z = 0$ e $z = a$; $F = \Phi(z),\ G = \Gamma(z)$ per $t = 0$.

(II) $F = F_0(t),\ G = G_0(t)$ per $z = 0$; $F = F_a(t),\ G = G_a(t)$ per $z = a$; $F = 0,\ G = 0$, per $t = 0$.

Note che siano $F_1(z, t)$ e $G_1(z, t)$, $F_2(z, t)$ e $G_2(z, t)$, soluzioni che verificano le condizioni (I) e (II) rispettivamente, la soluzione del problema risulta infatti

$$F(z, t) = F_1(z, t) + F_2(z, t), \quad G(z, t) = G_1(z, t) + G_2(z, t) .$$

4 – Per la determinazione di $F_1(z, t)$ e $G_1(z, t)$ si consideri

$$F_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t) \sin \frac{n\pi}{a} z , \tag{4.1}$$

$$G_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t) \sin \frac{n\pi}{a} z . \tag{4.2}$$

Queste verificano le equazioni (2.9) e (2.10) se

$$\lambda_n(t) = h_{1n} c_{1n} e^{\alpha_1 t} + h_{2n} c_{2n} e^{\alpha_2 t}, \qquad \chi_n(t) = c_{1n} e^{\alpha_1 t} + c_{2n} e^{\alpha_2 t},$$

con $$h_{1n} = \frac{1}{i\Omega}\left(-\alpha_1 + i\Omega - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\nu_m\right), \quad h_{2n} = \frac{1}{i\Omega}\left(-\alpha_2 + i\Omega - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\nu_m\right),$$

$\alpha_{1\,2}$ radici, sempre distinte, dell'equazione

$$\alpha^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}(\nu + \nu_m)\alpha - \left[\left(i\Omega - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\nu_m\right)\left(i\Omega + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\nu\right) - \tau\omega^2\right] = 0 .$$

Affinchè per ogni valore di $t > 0$ le serie (4.1) e (4.2) convergano è opportuno imporre che α_1 e α_2 abbiano parte reale negativa. Introdotti i parametri adimensionali $\mu_c = \omega/\Omega$, $\mu_v = \nu/a^2\Omega$, $\mu_m = \nu_m/a^2\Omega$ si ottiene per n^4 la disequazione

$$n^8\pi^8\mu_v\mu_m(\mu_v^2 + \mu_m^2)^2 + (\mu_v - \mu_m)^2 n^4\pi^4(\tau\mu_c - 1) - 2\,(1 - \tau\mu_c)^2 > 0 .$$

Detta β_1 la maggiore delle due radici (che è positiva), se $\sqrt[4]{\beta_1}/\pi < 1$ si hanno tutte le armoniche, altrimenti sono escluse un numero opportuno di armoniche basse in relazione ai valori dei parametri adimensionali.

Siano

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{a} z\,, \qquad \Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\frac{n\pi}{a} z$$

gli sviluppi delle funzioni limitate e verificanti le condizioni di Dirichlet che sono i valori per $t = 0$ di $F_1(z, t)$ e $G_1(z, t)$ (²). Si ottengono per le costanti arbitrarie c_{1n} e c_{2n} i valori

$$c_{1n} = \frac{\varphi_n h_{2n} - \gamma_n}{h_{2n} - h_{1n}}\,, \qquad c_{2n} = \frac{\gamma_n - \varphi_n h_{1n}}{h_{2n} - h_{1n}}\,,$$

con $$\varphi_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Phi(x)\sin\frac{n\pi}{a} x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \gamma_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Gamma(x)\sin\frac{n\pi}{a} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Le serie che danno la soluzione formale delle (2.9) e (2.10) verificanti le condizioni (I) sono in definitiva

$$F_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_{1n}\frac{\varphi_n h_{2n} - \gamma_n}{h_{2n} - h_{1n}} \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + h_{2n}\frac{\gamma_n - \varphi_n h_{1n}}{h_{2n} - h_{1n}} \mathrm{e}^{\alpha_2 t}\right] \sin\frac{n\pi}{a} z\,, \tag{4.3}$$

$$G_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n h_{2n} - \gamma_n}{h_{2n} - h_{1n}} \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \frac{\gamma_n - \varphi_n h_{1n}}{h_{2n} - h_{1n}} \mathrm{e}^{\alpha_2 t}\right] \sin\frac{n\pi}{a} z\,. \tag{4.4}$$

Queste due serie, per la presenza dei termini $\exp(-|\mathrm{Re}\,\alpha_1|t)$ e $\exp(-|\mathrm{Re}\,\alpha_2|t)$ sono uniformemente convergenti per ogni valore di z per $t > 0$, e, come funzioni di t sono uniformemente convergenti per $t \geqslant t_0 > 0$.

Le funzioni $F_1(z, t)$ e $G_1(z, t)$ sono quindi funzioni continue per $0 \leqslant z \leqslant a$ e $t \geqslant t_0 > 0$.

Analogamente le serie ottenute derivando termine a termine rispetto a z e t sono uniformemente convergenti. Le (4.3) e (4.4) sono dunque soluzioni del sistema differenziale (2.9) e (2.10) che verificano la condizione al contorno di (I). Per quanto riguarda la condizione iniziale, da una estensione del teo-

---

(²) Naturalmente quando i parametri adimensionali del fluido sono tali da escludere le prime m armoniche per le funzioni $\Phi(z)$ e $\Gamma(z)$ deve risultare $\varphi_j = 0$ e $\gamma_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

rema di Abel segue che

$$\lim_{t\to 0} F_1(z,t) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{nei punti di continuità} \\ \frac{1}{2}[\Phi(z^+) + \Phi(z^-)] & \text{negli altri punti}, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0} G_1(z,t) = \begin{cases} \Gamma(z) & \text{nei punti di continuità} \\ \frac{1}{2}[\Gamma(z^+) + \Gamma(z^-)] & \text{negli altri punti}, \end{cases}$$

e quindi (4.3) e (4.4) sono soluzioni del sistema differenziale che verificano le condizioni (I).

5 – Per ottenere le soluzioni del sistema che verificano le condizioni (II) conviene dapprima risolvere il seguente problema (III)

$$-\Omega \frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}z^3} + i\Omega^2 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} + \tau\omega^2 i \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} = 0\,,$$

$$i\Omega A - i\Omega B - \nu_m \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}z^2} = 0 \qquad (0 < z < a)\,,$$

$$A = a_1\,, \quad B = b_1 \quad \text{per } z = 0\,, \qquad A = a_2\,, \quad B = b_2 \quad \text{per } z = a\,,$$

a_i e b_i costanti. Dette σ_j le quattro radici distinte dell'equazione

$$i\nu\nu_m \sigma^4 + \Omega(\nu_m - \nu)\sigma^2 + i(\Omega^2 + \tau\omega^2) = 0\,,$$

risulta

$$A(z) = (i\Omega)^{-1} \sum_{j=1}^{4} (i\Omega + \nu_m \sigma_j) c_j \, \mathrm{e}^{\sigma_j z} + c_5\,, \tag{5.1}$$

$$B(z) = \sum_{j=1}^{4} c_j \, \mathrm{e}^{\sigma_j z} + c_5\,, \tag{5.2}$$

con c_j soluzioni del sistema

$$\sum_{j=1}^{5} c_j = b_1\,, \qquad (i\Omega)^{-1} \sum_{j=1}^{4} (i\Omega + \nu_m \sigma_j) c_j + c_5 = a_1\,,$$

$$\sum_{j=1}^{4} c_j \, \mathrm{e}^{\sigma_j a} + c_5 = b_2\,, \qquad (i\Omega)^{-1} \sum_{j=1}^{4} (i\Omega + \nu_m \sigma_j) \, \mathrm{e}^{\sigma_j a} c_j + c_5 = a_2\,.$$

Si indichino nel seguito con $\bar{A}(z)$ e $\bar{B}(z)$ la soluzione del problema (III) per i seguenti valori delle costanti $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$, e con $\bar{\bar{A}}(z)$ e $\bar{\bar{B}}(z)$ le soluzioni dello stesso problema per i valori delle costanti $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = b_2 = 1$.

In corrispondenza a queste due soluzioni del problema (III) si considerino le due soluzioni del sistema (2.9) e (2.10) verificanti le condizioni (I) $\bar{F}_1(z, t)$ $\bar{G}_1(z, t)$ e $\bar{\bar{F}}_1(z, t)$, $\bar{\bar{G}}_1(z, t)$ in cui si assuma $\Phi(z) = -\bar{A}(z)$ e $\Gamma(z) = -\bar{B}(z)$, e $\Phi(z) = -\bar{\bar{A}}(z)$ e $\Gamma(z) = -\bar{\bar{B}}(z)$ rispettivamente.

Le due coppie di funzioni

$$\bar{F}_2(z, t) = \bar{A}(z) + \bar{F}_1(z, t)\,, \qquad \bar{G}_2(z, t) = \bar{B}(z) + \bar{G}_1(z, t) \tag{5.3}$$

e

$$\bar{\bar{F}}_2(z, t) = \bar{\bar{A}}(z) + \bar{\bar{F}}_1(z, t)\,, \qquad \bar{\bar{G}}_2(z, t) = \bar{\bar{B}}(z) + \bar{\bar{G}}_1(z, t) \tag{5.4}$$

sono due soluzioni di (2.9) e (2.10) verificanti le condizioni (II) con i dati al contorno $F_0(t) = 1$, $G_0(t) = 1$ per $z = 0$; $F_a(t) = 0$, $G_a(t) = 0$ per $z = a$; $F_0(t) = 0$, $G_0(t) = 0$ per $z = 0$; $F_a(t) = 1$, $G_a(t) = 1$ per $z = a$, rispettivamente.

La soluzione del sistema (2.9) e (2.10) verificante le condizioni (II) per dati al contorno arbitrari si ottengono dalle (5.3) e (5.4) utilizzando il teorema di Duhamel [4]. Si ottiene

$$F_2(z, t) = \int_0^t [F_0(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \bar{F}_2(z, t - \lambda) + F_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\bar{F}}_2(z, t - \lambda)]\, \mathrm{d}\lambda$$

$$G_2(z, t) = \int_0^t [G_0(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \bar{G}_2(z, t - \lambda) + G_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\bar{G}}_2(z, t - \lambda)]\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

6 – Nel caso puramente idraulico il moto è regolato dalle equazioni (2.1) e (2.2) in cui si sia posto $\boldsymbol{B} = 0$.

Nell'ipotesi di moti con funzione di corrente (2.5) la (2.1) si traduce nell'equazione in $F(z, t)$

$$-\nu \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial t} + i\Omega \frac{\partial F}{\partial z} = 0\,,$$

da cui

$$-\nu \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + i\Omega F = M(t)\,, \tag{6.1}$$

con $M(t)$ funzione arbitraria del tempo.

Con la sostituzione $F(z, t) = H(z, t)\, e^{-i\Omega t}$ si ottiene da (6.1)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial H}{\partial t} = e^{i\Omega t}\, M(t) ,$$

che è la stessa equazione che regola la conduzione del calore nell'eventualità che lo spazio sia sede di una sorgente di calore per unità di volume e di tempo $e^{i\Omega t} M(t)$.

È quindi possibile stabilire una analogia tra il problema in esame e quello della propagazione del calore in un solido limitato da due piani paralleli facendo corrispondere ad $H(z, t)$ la temperatura e a ν la diffusività.

Ovviamente a $F_0(t)$ e $F_a(t)$ che sono le condizioni al contorno corrispondono le temperature alle pareti. Note le soluzioni del problema termico [**3**], utilizzando detta analogia, si ottengono le soluzioni del problema idrodinamico in esame.

7 – Si è dimostrata per un fluido omogeneo viscoso incomprimibile e conduttore che riempe la regione tra due pareti piane parallele in movimento che siano perfettamente conduttrici, la possibilità di vortici ad asse curvilineo che sono moti pseudopiani di prima specie, e se ne è data la caratterizzazione in relazione al moto delle pareti e all'andamento al contorno del campo magnetico.

Bibliografia

[**1**] C. Agostinelli, *Magnetofluidodinamica*, Cremonese, Roma 1966.

[**2**] R. Berkér: [•]$_1$ *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik **8** (1963); [•]$_2$ *A new solution of the Navier-Stokes equation for the motion of a fluid contained between two parallel plates rotating about the same axis*, Arch. of Mech. **31** (1979).

[**3**] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.

[**4**] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience 1962.

* * *