Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 223-232

ENRICO PAGANI (*)

Onde di accelerazione e termiche in una teoria relativistica dei fluidi conduttori (**)

1 - Introduzione

La teoria di Fourier sulla conduzione del calore implica per quest'ultimo una velocità di propagazione infinita. Si dice, a questo proposito, che l'equazione di Fourier non è relativistica. Per ovviare a questo inconveniente, sono state formulate varie teorie, legate ai nomi di Cattaneo [**2**], Muller [**6**], Boillat [**1**], Lianis [**3**], Maugin [**5**], etc. Lo scopo del presente lavoro e motivi di spazio non ci consentono neppure una superficiale illustrazione delle suddette teorie. Ci soffermeremo invece sulla teoria proposta da Massa e Morro, in quanto, in tale teoria, il presente lavoro si inquadra. Il paragrafo **2** sarà dedicato a una esposizione volutamente succinta di questa teoria. Certo di non essere esauriente, rinvio il lettore all'articolo originale [**4**]. Il paragrafo **3** sarà dedicato allo studio della propagazione di onde di accelerazione e di temperatura nell'ambito della teoria suddetta, e verrà provato che la propagazione avviene con velocità finita.

2 - La termodinamica relativistica di Massa e Morro

Una delle idee base della teoria della relatività, l'equivalenza massa-energia, induce ad associare al flusso di calore $\boldsymbol{q}$ un insieme di attributi meccanici, quali una densità di energia cinetica, una densità di quantità di moto e una den-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-IX-1981.

sità di flusso di quantità di moto. Si dà il caso che tutte (e sole) queste quantità possano essere dedotte direttamente da un opportuno tensore doppio simmetrico $\boldsymbol{Q}$ mediante operazioni di proiezione spaziale e/o temporale. Ciò suggerisce di riguardare $\boldsymbol{Q}$ come il tensore energia-impulso di un ente che viene detto il *sottosistema calore* $\mathscr{Q}$ del *continuo materiale* $\mathscr{B}$. Lo schema teorico è completato in questo modo: il continuo materiale è concepito come un sistema binario formato dal sottosistema calore suddetto e da un *substrato materiale* $\mathscr{S}$. Sottosistema calore e substrato materiale sono da riguardarsi come due continui in interazione, alla stessa stregua delle due fasi di una miscela. Inoltre la teoria prevede che il continuo $\mathscr{B}$ interagisca con l'esterno.

Al fine di inquadrare geometricamente la teoria, viene introdotta la varietà spazio temporale $\mathscr{V}_4$, dotata della forma fondamentale (1)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta . \tag{2.1}$$

Sia Ξ la congruenza di linee di universo del continuo materiale $\mathscr{B}$. Sia V^α la quadrivelocità del continuo, normalizzata con la condizione $V^\alpha V_\alpha = -1$.

La congruenza Ξ determina un sistema di riferimento $\{\Xi\}$ in $\mathscr{V}_4$, detto sistema di quiete materiale (*co-moving system*) associato a $\mathscr{B}$.

Associati al sistema $\{\Xi\}$ sono i due operatori di proiezione temporale $\mathscr{P}$ e spaziale $\mathscr{N}$, la cui azione sui campi vettoriali è così definita

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}) = -cV_\alpha A^\alpha , \qquad \mathscr{N}(\boldsymbol{A}) = (\delta^\alpha{}_\beta + V^\alpha V_\beta)A^\beta := h^\alpha{}_\beta A^\beta , \tag{2.2)a, b}$$

ed essendo ovvia l'estensione ai campi tensoriali (2).

Più in dettaglio, la teoria contempla l'introduzione del tensore energia-impulso del sottosistema calore

$$Q_{\alpha\beta} = m\delta^0 U_\alpha U_\beta , \tag{2.3)a}$$

$$:= m\delta^0\gamma^2(V_\alpha + v_\alpha)(V_\beta + v_\beta) \qquad \gamma = (1 - v^\alpha v_\alpha)^{-1/2} , \tag{2.3)b}$$

$$:= \gamma m\, \delta_0(V_\alpha + v_\alpha)(V_\beta + v_\beta) , \tag{2.3)c}$$

in cui $m\delta^0$ e U_α sono rispettivamente la densità di energia propria e la quadrivelocità del sottosistema calore ($U^\alpha U_\alpha = -1$), e v_α, vettore spaziale, è la

---

(1) Gli indici greci corrono da 0 a 3; vale la convenzione di somma sugli indici ripetuti; la segnatura della metrica è $(-, +, +, +)$.

(2) $:=$ indica che l'uguaglianza ha significato di definizione.

velocità del calore rispetto al substrato materiale. Il legame tra le grandezze suddette e il flusso di calore è fornito dalla relazione

$$q_\alpha = \gamma m \delta_0 c v_\alpha \,. \tag{2.4}$$

Il substrato materiale è caratterizzato dal tensore energia-impulso

$$M_{\alpha\beta} = m(c^2 + \varepsilon) V_\alpha V_\beta - S_{\alpha\beta} - m\delta_0 V_\alpha V_\beta \,, \tag{2.5)a}$$

$$:= m(c^2 + \chi) V_\alpha V_\beta - S_{\alpha\beta} \,, \tag{2.5)b}$$

in cui ε è l'energia interna per unità di massa propria (m è la densità di energia interna) e $S_{\alpha\beta}$, puramente spaziale, è il tensore di stress. Negli sviluppi seguenti assumeremo $S_{\alpha\beta} = -p h_{\alpha\beta}$, dove p è la pressione. Il tensore energia-impulso del substrato sarà perciò

$$M_{\alpha\beta} = m(c^2 + \chi) V_\alpha V_\beta + p h_{\alpha\beta} \,. \tag{2.6}$$

Le interazioni tra i due sottosistemi e con l'esterno sono compendiate nelle relazioni seguenti

$$Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \gamma \hat{k}^\alpha + \gamma^{-1} \left\{ - V_\lambda T^{\lambda\beta}{}_{;\beta} + \frac{{}^D\pi}{c} \right\} U^\alpha \,, \tag{2.7)a}$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \mathcal{N} (T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - {}^D W^{\alpha\beta}{}_{;\beta}) + \left(V_\lambda T^{\lambda\beta}{}_{;\beta} - \frac{{}^D\pi}{c} \right) v^\alpha - \hat{k}^\alpha \,, \tag{2.7)b}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = b^\alpha \,, \tag{2.7)c}$$

in cui (3)

(i) b^α è la quadriforza esterna agente sul continuo materiale,

(2.8) (ii) $\hat{k}^\alpha = \gamma^{-1} \{ (\delta^\alpha{}_\beta - v^\alpha v_\beta) \tilde{f}^\beta + (Z/c) U^\alpha \}$,

in cui $\tilde{f}^\alpha$, vettore spaziale e Z vanno definiti costitutivamente (di questo fatto ci occuperemo in seguito),

(iii) ${}^D W^{\alpha\beta}$ è un tensore doppio simmetrico che tiene conto di effetti dissipativi eventualmente presente nel corpo $\mathcal{B}$,

(iv) ${}^D\pi := c V_\alpha {}^D W^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$,

(3) , indica derivazione ordinaria.
; indica derivazione covariante.

Quanto detto finora ha validità generale. Per i nostri scopi, e per evidenti ragioni di semplicità, converrà limitarci al caso di *sistema isolato* ($b^\alpha = 0$) e di *materiale non dissipativo* (${}^D W^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow {}^D\pi = 0$). Con queste assunzioni le (2.7)a,b, diventano,

(2.9)a, b
$$Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \gamma \hat{k}^\alpha , \qquad M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -\hat{k}^\alpha .$$

La disuguaglianza entropica (2° Principio della Termodinamica) ${}^D\pi - q^\alpha \cdot (\theta_{,\alpha}/\theta + \tilde{f}_\alpha/\gamma m \delta_0) \geqslant 0$ si riduce, nel caso di mezzi non dissipativi, a

(2.10)
$$-q^\alpha \Big(\frac{\theta_{,\alpha}}{\theta} + \frac{\tilde{f}_\alpha}{\gamma m \delta_0}\Big) \geqslant 0 .$$

Per materiali isotropi la più semplice equazione costitutiva per q^α compatibile con la (2.10) è

(2.11)
$$q^\alpha = -k g^{\alpha\beta}\Big(\mathcal{N}(\theta_{,\beta}) + \theta \frac{\tilde{f}_\beta}{\gamma m \delta_0}\Big) ,$$

dove k è una costante non negativa, detta conducibilità termica. La (2.11) implica

$$\tilde{f}_\alpha = \frac{-\gamma m \delta_0}{\theta}\Big(\frac{q_\alpha}{k} + \mathcal{N}(\theta_{,\alpha})\Big).$$

3 - Propagazione delle onde

Lo studio della propagazione delle discontinuità è basato sulle considerazioni seguenti.

Sia Σ una 3-superficie di discontinuità in $\mathscr{V}_4$, e sia n_γ la sua forma normale. Sia $A_{\alpha\ldots\beta}$ un campo tensoriale continuo in $\mathscr{V}_4$. Sussiste allora la ben nota relazione (Lemma di Maxwell)

(3.1)
$$[A_{\alpha\cdots\beta;\gamma}] = \varphi_{\alpha\cdots\beta}\, n_\gamma ,$$

in cui il primo membro indica il salto delle derivate (covarianti) di $A_{\alpha\cdots\beta}$ sulla superficie Σ; $\varphi_{\alpha\cdots\beta}$ e n_γ sono definite su Σ.

In relazione all'introduzione del co-moving system $\{\Xi\}$, è utile normalizzare e orientare n_γ in modo che, scisso quest'ultimo in una parte temporale e spaziale secondo la relazione

(3.2)
$$n_\alpha = v V_\alpha + \tilde{n}_\alpha ,$$

si abbia $\tilde{n}^\alpha \tilde{n}_\alpha = 1$, $v \geqslant 0$, oltre che, naturalmente $V^\alpha \tilde{n}_\alpha = 0$. La relazione suddetta implica $v^2 \leqslant 1$ se e solo se $n^\alpha n_\alpha \geqslant 0$, cioè se e solo se Σ è una superficie di tipo tempo o nulla. Nel caso di $v^2 \leqslant 1$ il vettore spaziale $v\tilde{n}^\alpha$ è identificato con la 3-velocità di Σ relativa al sistema $\{\Xi\}$ ovvero con la 3-velocità di propagazione delle discontinuità rispetto al sistema di quiete materiale.

Si assume che, su Σ, i campi V^α, v^α, m, δ_0 siano continui, mentre si ammette che possano essere discontinue le derivate prime delle variabili suddette. Per i salti devono sussistere le relazioni seguenti

(3.3)a, b $$[Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = \gamma[\hat{k}^\alpha]\,, \qquad [M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = -[\hat{k}^\alpha]\,,$$

(3.3)c $$[\hat{k}^\alpha] = \gamma^{-1}\left\{(\delta^\alpha{}_\beta - v^\alpha v_\beta)[\tilde{f}^\beta] + \frac{[Z]}{c}\,U^\alpha\right\},$$

(3.3)d $$[\tilde{f}_\alpha] = \frac{-\gamma m \delta_0}{\theta}\,[\mathcal{N}(\theta_{,\alpha})].$$

L'ulteriore ipotesi che il *flusso di calore sia nullo* prima dell'arrivo della perturbazione implica $v^\alpha = 0$ su Σ. Si ha allora

(3.4)a, b $$[Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = [\hat{k}^\alpha]\,, \qquad [M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = -[\hat{k}^\alpha]\,,$$

(3.4)c, d $$[\hat{k}^\alpha] = [\tilde{f}^\alpha] + \frac{[Z]}{c}\,V^\alpha\,, \qquad [\tilde{f}^\alpha] = \frac{-m\delta_0}{\theta}\,[\mathcal{N}(\theta_{;\alpha})]\,,$$

dove i primi membri delle (3.4)a,b sono calcolati per $v_\alpha = 0$.

La (3.1) implica

(3.5) $$[V_{\alpha;\beta}] := -a_\alpha n_\beta\,, \qquad [v_{\alpha;\beta}] := -d_\alpha n_\beta\,.$$

Dalla relazione $v^\alpha V_\alpha = 0$ segue

$$0 = (v^\alpha V_\alpha)_{;\beta} = v^\alpha{}_{;\beta} V_\alpha + v^\alpha V_{\alpha;\beta} = v^\alpha{}_{;\beta} V_\alpha\,, \qquad \text{essendo } v^\alpha = 0\,,$$

$$\Rightarrow\ 0 = [v^\alpha{}_{;\beta}]\,V_\alpha = -d^\alpha V_\alpha n_\beta\,,$$

il che prova che d^α è un vettore spaziale.

Applicando la (3.2) si hanno le relazioni seguenti

(3.6)a $$[V^\alpha{}_{;\beta} V^\beta] = v a^\alpha\,, \qquad [V^\beta{}_{;\beta}] = -a^\beta \tilde{n}_\beta\,,$$

e per la spazialità di d^α

(3.6)b $$[v^\alpha{}_{;\beta} V^\beta] = v d^\alpha\,, \qquad [v^\beta{}_{;\beta}] = -d^\beta \tilde{n}_\beta\,,$$

che ci saranno utili in seguito.

Con facili passaggi, partendo dalle definizioni (2.3)c, (2.6) e utilizzando le relazioni (3.5), (3.6)a,b, si ha

$$[Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = \frac{[(m^{\cdot}\delta_0)]}{c} V^\alpha + m\delta_0 v a^\alpha + m\delta_0 v d^\alpha - m\delta_0 V^\alpha a^\beta \tilde{n}_\beta - m\delta_0 V^\alpha d^\beta \tilde{n}_\beta \,, \tag{3.7}$$

dove $(m^{\cdot}\delta_0) = c(m\delta_0)_{,\beta} V^\beta$,

$$\begin{aligned}[M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = {} & \frac{[\dot{m}]}{c}(c^2+\chi)V^\alpha + m\frac{[\dot{\chi}]}{c}V^\alpha + m(c^2+\chi)va^\alpha \\ & - m(c^2+\chi)V^\alpha a^\beta \tilde{n}_\beta + [p_{,\beta}]\gamma^{\alpha\beta} + pva^\alpha - pV^\alpha a^\beta \tilde{n}_\beta \,,\end{aligned} \tag{3.8}$$

dove $\dot{m} = cm_{,\alpha}V^\alpha$, $\dot{\chi} = c\chi_{,\alpha}V^\alpha$.

L'equazione di continuità $(mV^\alpha)_{;\alpha} = 0$ fornisce

$$[m_{,\alpha}]V^\alpha - ma^\alpha \tilde{n}_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; [\dot{m}] = cma^\alpha \tilde{n}_\alpha \,. \tag{3.9}$$

Inoltre, $[p_{,\beta}] = \pi n_\beta$ per la (3.1), da cui

$$[\dot{p}] := [cp_{,\alpha}V^\alpha] = c\pi n_\alpha V^\alpha = -cv\pi, \quad [p_{,\beta}] = \frac{[\dot{p}]}{-cv} n_\beta, \quad [p_\beta]\gamma^{\alpha\beta} = \frac{[\dot{p}]}{-cv}\cdot \tilde{n}^\alpha. \tag{3.10}$$

Assumendo che χ e p siano definite costitutivamente in funzione di m e θ, si ha

$$[\dot{\chi}] = \frac{\partial\chi}{\partial m}[\dot{m}] + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}] = \frac{\partial\chi}{\partial m} cma^\alpha \tilde{n}_\alpha + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}] \,, \tag{3.11)a}$$

$$[\dot{p}] = \frac{\partial p}{\partial m}[\dot{m}] + \frac{\partial p}{\partial\theta}[\dot{\theta}] = \frac{\partial p}{\partial m} cma^\alpha \tilde{n}_\alpha + \frac{\partial p}{\partial\theta}[\dot{\theta}] \,. \tag{3.11)b}$$

Sostituendo le (3.9), (3.10), (3.11)a,b nella (3.8) si ha

$$\begin{aligned}[M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}] = {} & m^2 \frac{\partial\chi}{\partial m} a^\beta \tilde{n}_\beta V^\alpha + \frac{m}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}]V^\alpha + m(c^2+\chi)va^\alpha \\ & - m\frac{\partial p}{\partial m}\frac{a^\beta \tilde{n}_\beta}{v}\tilde{n}^\alpha - \frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\tilde{n}^\alpha}{cv}[\dot{\theta}] + pva^\alpha - pV^\alpha a^\beta \tilde{n}_\beta \,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Per quanto riguarda i salti di $\tilde{f}^\alpha$ osserviamo che, per la (3.3)d e per la (2.2)b si ha

$$[\tilde{f}^\alpha] = \frac{-m\delta_0}{\theta}(\delta^\alpha{}_\beta + V^\alpha V_\beta)[\theta'^\beta].$$

Inoltre $[\theta_{,\beta}] := \tau n_\beta$ per la (3.1)

$$[\dot{\theta}] := c[\theta_{,\alpha}V^\alpha] = c\tau n_\alpha V^\alpha = -cv\tau \Rightarrow [\theta_{,\beta}] = \frac{[\dot{\theta}]}{-cv}n_\beta \Rightarrow [\tilde{f}^\beta] = \frac{m\delta_0}{cv\theta}[\dot{\theta}]\tilde{n}^\beta,$$

per cui la (3.4)c diventa

$$[\hat{k}^\alpha] = \frac{m\delta_0}{cv\theta}[\dot{\theta}]\tilde{n}^\alpha + \frac{[Z]}{c}V^\alpha. \tag{3.13}$$

Sostituendo le (3.7), (3.12), (3.13) nelle (3.4)a,b, e prendendo di ciascuna relazione, rispettivamente la parte spaziale e temporale, si ha

$$\frac{[(m^{\boldsymbol{\cdot}}\delta_0)]}{c} - m\delta_0 a^\alpha\tilde{n}_\alpha - m\delta_0 d^\alpha\tilde{n}_\alpha = \frac{[Z]}{c}, \tag{3.14)a}$$

$$a^\alpha + d^\alpha = \frac{[\dot{\theta}]}{cv\theta}\tilde{n}^\alpha, \tag{3.14)b}$$

$$m^2\frac{\partial\chi}{\partial m}a^\alpha\tilde{n}_\alpha + \frac{m}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}] - pa^\alpha\tilde{n}_\alpha = \frac{-[Z]}{c}, \tag{3.14)c}$$

$$m(c^2+\chi)va^\alpha - m\frac{\partial p}{\partial m}\frac{a^\beta\tilde{n}_\beta}{v}\tilde{n}^\alpha - \frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{[\dot{\theta}]}{cv}\tilde{n}^\alpha + pva^\alpha = \frac{-m\delta_0}{cv\theta}[\dot{\theta}]\tilde{n}^\alpha. \tag{3.14)d}$$

La (3.14)d fornisce

$$a^\alpha = a\tilde{n}^\alpha, \tag{3.15}$$

cioè la longitudinalità delle onde di accelerazione nel modello in esame. Inoltre, contraendo con $\tilde{n}_\alpha$ la (3.14)d si ha

$$a = \frac{(\partial p/\partial\theta - m\delta_0/\theta)}{(m(c^2+\chi)+p)v^2 - (\partial p/\partial m)m}\cdot\frac{[\dot{\theta}]}{c}. \tag{3.16}$$

Sostituendo la (3.15) nella (3.14)b si ha

$$d^\alpha = d\tilde{n}^\alpha \tag{3.17}$$

con

$$d = \frac{[\dot{\theta}]}{cv^2\theta} - a \,. \tag{3.18}$$

Sostituendo le (3.15) e (3.18) nelle (3.14)a,c si ha

$$\frac{[(m^{\cdot}\delta_0)]}{c} - m\delta_0\, a - m\delta_0\, d = \frac{[Z]}{c}\,, \tag{3.19}$$

$$(m^2 \frac{\partial\chi}{\partial m} - p)a + \frac{m}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}] = \frac{-[Z]}{c}\,. \tag{3.20}$$

La difficoltà della caratterizzazione costitutiva di Z, unitamente all'esistenza della relazione fenomenologica [4]

$$m\delta_0 = \frac{k\theta}{\tau_c c^2}\,, \qquad [(m^{\cdot}\delta_0)] = \frac{[k\dot{\theta}]}{\tau_c c^2}\,, \tag{3.21}$$

in cui k è la conducibilità termica e τ_c è una costante avente le dimensioni di un tempo, e dell'ordine di almeno dieci volte il tempo che intercorre tra due urti per una stessa particella, inducono, eliminato $[Z]$ dalle (3.19) e (3.20) e ottenuta la seguente

$$\frac{[(m^{\cdot}\delta_0)]}{c} + (m^2 \frac{\partial\chi}{\partial m} - p - m\delta_0)a + \frac{m}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}[\dot{\theta}] - m\delta_0 d = 0\,, \tag{3.22}$$

a considerare il sistema formato da quest'ultima con le (3.16) e (3.18), nelle incognite $[\dot{\theta}]$, a, d, essendo $[(m^{\cdot}\delta_0)]$ dato dalla (3.21).

$$\begin{pmatrix} k/\tau_c c^2 + m\,\partial\chi/\partial m & m^2\,\partial\chi/\partial m - p - m\delta_0 & -m\delta_0 \\ 1/v^2\theta & -1 & -1 \\ \dfrac{\partial p/\partial\theta - m\delta_0/\theta}{(m(c^2+\chi)+p)\,v^2 - (\partial p/\partial m)m} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\dot{\theta}]/c \\ a \\ d \end{pmatrix} = 0\,.$$

Per l'omogeneità del sistema, si hanno soluzioni non nulle nei salti solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Da qui l'equazione per la velocità di propagazione

$$(3.23)\quad \left(\frac{k}{\tau_c c^2} + m\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)\left(m(c^2+\chi)+p\right)v^4 + \left\{\left(\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{m\delta_0}{\theta}\right)\left(m^2\frac{\partial\chi}{\partial m} - p\right)\right.$$

$$\left. -\frac{m\delta_0}{\theta}\left(m(c^2+\chi)+p\right) - m\frac{\partial p}{\partial m}\left(\frac{k}{\tau_c c^2} + m\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)\right\}v^2 + m^2\frac{\delta_0}{\theta}\frac{\partial p}{\partial m} = 0\,,$$

che, per valori realistici dei parametri che in essa compaiono, fornisce, per v^2, due soluzioni reali e positive. Ciò prova che la teoria esposta in [**4**] è compatibile col requisito che la velocità di propagazione di una perturbazione termica sia finita.

È istruttivo applicare i risultati precedenti a una situazione specifica. Vogliamo studiare la propagazione ondosa in gas idrogeno a condizioni normali. Si ha:

$m = 8.9\cdot10^{-5}$, $\quad\theta = 273\quad$ (in unità c.g.s.),

$R = 8.3\cdot10^{7}$ (cost. gas perf.), $\quad M_m = 2\quad$ (massa di una mole),

$$p = \frac{mR\theta}{M_m} = 10^6\,,\qquad \frac{\partial p}{\partial m} = 1.13\cdot10^{10}\,,\qquad \frac{\partial p}{\partial\theta} = 3.7\cdot10^{3}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\frac{R\theta}{M_m} = 2.8\cdot10^{10}\,,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial m} = 0\,,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} = 1.04\cdot10^{8}\,,$$

$k = 1.7\cdot10^{4}$ (cond. termica),

$$\tau_c = 100\frac{\lambda}{\langle v\rangle} = 10^{-8}\,,$$

$$\delta_0 = \frac{k\theta}{m\tau_c c^2} = 5.8\cdot10^{-3}\,,\qquad \frac{\partial\delta_0}{\partial m} = -6.5\cdot10\,,\qquad \frac{\partial\delta_0}{\partial\theta} = 2.12\cdot10^{-5}\,,$$

$$\chi = \varepsilon - \delta_0 = 2.8\cdot10^{10}\,,\qquad \frac{\partial\chi}{\partial m} = 6.5\cdot10^{10}\,,\qquad \frac{\partial\chi}{\partial\theta} = 1.04\cdot10^{8}\,.$$

La (3.23) fornisce le seguenti velocità di propagazione

$$V_1 = cv_1 = 1.25\cdot10^{5}\,,\qquad V_2 = cv_2 = 1.4\cdot10^{4}\qquad (\text{cm/sec})\,;$$

V_1 coincide praticamente con la velocità del suono per il gas idrogeno nelle condizioni suddette, calcolata classicamente.

Gli autovettori associati alle suddette velocità di propagazione sono, nell'ordine

$$\begin{pmatrix} [\dot{\theta}]/c \\ a \\ d \end{pmatrix}_{V_1} = \begin{pmatrix} 1.06\cdot 10^2 \\ 1 \\ 2.2\cdot 10^{10} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} [\dot{\theta}]/c \\ a \\ d \end{pmatrix}_{V_2} = \begin{pmatrix} -2.8\cdot 10^2 \\ 1 \\ -4.2\cdot 10^{12} \end{pmatrix}.$$

La natura degli autovettori indica che nella teoria in oggetto il fenomeno della propagazione termica non può essere disgiunto da quello della propagazione delle onde di accelerazione. Si può comunque osservare che i salti delle grandezze «termiche» ($[\dot{\theta}]/c$ e d) associati alla velocità di propagazione V_2 sono relativamente maggiori di quelli della velocità V_1 (i due autovettori sono normalizzati allo stesso valore di a, salto della quadriaccelerazione del substrato materiale). Ciò, unitamente alla considerazione precedente sul valore numerico di V_1, fa sì che possiamo definire quella che si propaga con V_1 onda sonora, e l'altra onda termica.

Bibliografia

[1] G. Boillat, Lettere al Nuovo Cimento **10** (1974), 295-300.

[2] C. Cattaneo, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1948), 83-101.

[3] G. Lianis, Arch. Rational Mech. Anal. **55** (1974), 300-331.

[4] E. Massa e A. Morro, Ann. Inst. H. Poincaré, **29**A (1978), 423-454.

[5] G. A. Maugin, J. Phys. A. Math. Nucl. Gen. **7** (1974), 465-484.

[6] L. Müller, Arch. Rational Mech. Anal. **34** (1969), 259-282.

Abstract

The propagation of acceleration and thermal waves is studied within a relativistic theory of thermodynamics proposed by Massa and Morro; the existence of finite speeds of propagation for the waves is proved.

* * *