Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 133-144

G. COLETTI e G. REGOLI (*)

Costruzione di probabilità condizionate con eventi di probabilità nulla assegnati (**)

Introduzione

Indichiamo con $P(A/H)$ la probabilità di A condizionata ad H.

« But if $P(H) = 0$, what becomes of all the arguments founded on conditional probability? At first glance, the restriction $P(H) \neq 0$ may appear practically irrilevant from a certain point of view. But when we recall that statistical applications are based on the probability conditional on an event E, where E is *the observed fact*, or better (as I have been careful to emphasize) E is *all that we have learned*, it is rather more realistic to think that in cases of practical interest the probability of E will always be 0. And it is just the probability conditional on such events that determine the optimal decision to take in each case » (B. de Finetti [**2**]).

Dubins, riprendendo in [**3**] queste idee di de Finetti, sistema definitivamente il problema delle probabilità condizionate: dimostra infatti che, non imponendo a priori la σ-additività, è possibile estendere una probabilità condizionata come probabilità condizionata completa, nel senso definito in **1** (essa risulta così definita anche per $p(H) = 0$).

I teoremi suddetti non garantiscono l'unicità dell'estensione nè forniscono procedimenti costruttivi. Non si ha perciò nessuna informazione sugli eventi di probabilità nulla.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Vanvitelli 1, 06100 Perugia, Italy.
(**) Ricevuto: 29-V-1981.

Nella letteratura si trovano esempi in cui si richiedono condizioni sulla distribuzione delle probabilità e condizioni sulle relazioni fra eventi di probabilità nulla, per esempio si richiede una distribuzione uniforme e tutti i punti « ugualmente probabili » oppure tali che ogni punto abbia probabilità « infinitamente maggiore di un altro ».

Tali esempi, esposti in modo intuitivo, pur essendo convincenti, lasciano aperto il problema di formalizzare una teoria globale che ne assicuri l'esistenza e fornisca un metodo per costruirli.

Si possono quindi enucleare immediatamente due tipi di problemi:

(1) se e quanto ipotesi sulla probabilità condizionino il comportamento degli eventi di probabilità nulla;

(2) se sia possibile, a partire da una probabilità data, costruire una probabilità condizionata che tenga conto di eventuali informazioni aggiuntive su eventi di probabilità nulla.

In questo lavoro si dà una risposta positiva ai problemi del secondo tipo: dopo aver dato una assiomatica equivalente a quella di Dubins e stabilite alcune proprietà sulle probabilità condizionate, si utilizza il sistema di assiomi per costruire *esplicitamente* le probabilità condizionate ad insiemi « grandi » una volta che sia assegnata quella condizionata ad insiemi « piccoli » (come verrà precisato in **2**). D'altra parte, poichè i risultati qui ottenuti permettono di costruire (con una stessa probabilità di partenza) probabilità condizionate con diverse caratterizzazioni degli eventi di probabilità nulla, gli stessi risultati mostrano come condizioni sulla probabilità non trasmettano condizioni sugli eventi di probabilità nulla e viceversa.

1 - Preliminari e definizioni

Dato un insieme Ω, sia p una probabilità (finitamente additiva) sull'insieme di eventi rappresentato da $\mathscr{P}(\Omega)$.

Se Ω è di cardinalità superiore al numerabile esistono eventi A tali che $p(A)=0$, anzi questi sono « quasi tutti » come precisa la seguente proposizione.

Proposizione 1. *Se* card $(\Omega) > \aleph_0$, *la famiglia* $\mathscr{H} = \{H \subset \Omega,\ p(H)=0,$ card $(H) =$ card $(\Omega)\}$ *è tale che* card $(\mathscr{H}) \geqslant$ card (Ω).

Dim. Consideriamo una corrispondenza biunivoca $\varphi\colon \Omega\times\Omega \to \Omega$ e per ogni $x \in \Omega$ sia $H_x = \varphi(\Omega\times\{x\})$. La famiglia $\mathscr{K}$ degli insiemi H_x disgiunti è tale che card $(\mathscr{K})$ = card (Ω) e al più una infinità numerabile di detti insiemi H_x ha *probabilità* non nulla.

Date due algebre $\mathscr{A}$, $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tali che $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}$, si dice *probabilità condizionata* una funzione p da $\mathscr{A} \times \mathscr{G}^0$ ($\mathscr{G}^0 = \mathscr{G} - \phi$) in $[0, 1]$ tale che:

(i) $p(\cdot/H)$ è una probabilità, per ogni H in $\mathscr{G}^0$,

(ii) $p(H/H) = 1$ per ogni $H \in \mathscr{G}^0$,

(iii) $p(AH/G) = p(H/G)p(A/HG)$ per G, $HG \in \mathscr{G}^0$.

Inoltre si pone $p(\cdot/\Omega) = p(\cdot)$, dove Ω rappresenta l'evento certo.

Si ottiene una definizione di probabilità condizionata equivalente alla precedente qualora si sostituisca la (iii) con la seguente (cfr. [**3**])

$$\text{(iii)}' \quad p(A/C) = p(A/B)p(B/C) \qquad A \in \mathscr{A},\ B,\ C \in \mathscr{G}^0;\ A \subseteq B \subseteq C\,.$$

Si dice *probabilità condizionata completa* su $\mathscr{A}$ una probabilità condizionata definita su $\mathscr{A} \times \mathscr{A}^0$.

In [**1**] viene trattato sistematicamente il problema del confronto tra eventi di probabilità nulla; richiamiamo qui alcune definizioni date in [**1**].

Due eventi $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ si dicono *equivalenti in probabilità* se $p(A/A + B) = p(B/A + B)$.

Due eventi A, B di probabilità nulla si dicono *zeri dello stesso ordine* (in simboli $A \doteq B$) se $p(A/A + B) \neq 0$ e $p(B/A + B) \neq 0$.

Ovviamente due eventi per cui una delle due $p(\cdot/A + B)$ sia uguale a zero si diranno di ordine diverso e, precisamente si dirà A di ordine superiore a B (in simboli $A \lessdot B$) se $p(A/A + B) = 0$.

Si può inoltre dare una «disuguaglianza debole»: $A \leqslant B$ indica che o A è uno zero di ordine superiore a B, oppure A e B sono zeri dello stesso ordine.

Notiamo che $A \leqslant B$ se e solo se $p(A/A + B) \neq 1$ o, equivalentemente, $p(B/A + B) \neq 0$.

Evidentemente due eventi sono sempre confrontabili rispetto alla relazione $\leqslant$, inoltre questa è transitiva e quindi, dato un numero finito di eventi H_i, esiste tra essi almeno un H_j tale che $H_j \geqslant H_i$, per ogni i.

2 - Caratterizzazione di probabilità condizionate

Proposizione 2. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, e p: $\mathscr{A} \times \mathscr{A}^0 \to [0, 1]$ una probabilità condizionata. Per ogni terna di eventi a due a due incompatibili $H_1, H_2, H_3 \in \mathscr{A}^0$, vale la seguente uguaglianza*

$$(1) \quad p(H_1/H_1 + H_2)p(H_2/H_2 + H_3)p(H_3/H_3 + H_1) = p(H_1/H_1 + H_3)p(H_2/H_2 + H_1)p(H_3/H_3 + H_2)\,.$$

Dim. Dalla (iii)' discende

$$p(H_i/H_1+H_2+H_3)=p(H_i/H_i+H_j)p(H_i+H_j/H_1+H_2+H_3)\quad (i,j=1,2,3).$$

Posto $x_i=p(H_i/H_1+H_2+H_3)$ e $a_{ij}=p(H_i/H_i+H_j)$ consideriamo il sistema

$$(2)\qquad x_i=a_{ij}(x_i+x_j)\quad (i=1,2,3;\ j=i+1\ (\mathrm{mod}\ 3)),\qquad \sum_{i=1}^{3}x_i=1\,,$$

nelle incognite x_i.

Tale sistema deve ammettere soluzione e quindi deve essere $(a_{23}-1)(a_{31}-1)\cdot(a_{12}-1)+a_{12}a_{31}a_{23}=0$. Poichè $a_{ij}=1-a_{ji}$ segue la (1).

La Proposizione 2 vale anche senza l'ipotesi di incompatibilità degli eventi H_1, H_2, H_3 e si può dimostrare in modo diretto. Abbiamo preferito dare questa dimostrazione, perchè questa si utilizza poi nel Teorema 1.

Proposizione 3. *Se $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra di $\mathscr{P}(\Omega)$ e p una probabilità, condizionata completa su $\mathscr{A}$ allora, per ogni terna di eventi a due a due incompatibili $H_1, H_2, H_3\in\mathscr{A}^0$, sono verificate le uguaglianze*

$$(3)\qquad p(H_i/H_1+H_2+H_3)=\frac{p(H_i/H_i+H_1)}{p(H_1/H_i+H_1)}\Big[1+\frac{p(H_2/H_1+H_2)}{p(H_1/H_1+H_2)}+\frac{p(H_3/H_1+H_3)}{p(H_1/H_1+H_3)}\Big]^{-1}\qquad (i=1,2,3),$$

dove $H_1\geqslant H_i$.

Dim. Per dimostrare la (3) si considerino le relazioni

$$p(H_1/H_1+H_2+H_3)=p(H_1/H_1+H_i)p(H_1+H_i/H_1+H_2+H_3)\quad (i=1,2,3)$$

e, posto $x_i=p(H_i/H_1+H_2+H_3)$ e $a_i=p(H_1/H_1+H_i)$, si determinino le x_i mediante il sistema

$$(4)\qquad x_1=a_i(x_1+x_i)\quad (i=2,3)\,,\qquad \sum_{i=1}^{3}x_i=1\,.$$

Poichè $a_2, a_3\neq 0$, la soluzione del sistema è

$$x_i=(1-a_i)/a_i[1+(1-a_2)/a_2+(1-a_3)/a_3]^{-1}.$$

Le proposizioni 2 e 3 possono essere generalizzate come segue.

Corollario 1. *Sia $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ un'algebra; se p è una probabilità condizionata completa su $\mathscr{A}$, per ogni n-pla di eventi a due a due incompatibili, $H_1, \ldots, H_n \in \mathscr{A}^0$, vale la seguente uguaglianza*

$$(1)' \quad p(H_1/H_1 + H_2)p(H_2/H_2 + H_3) \ldots p(H_{n-1}/H_{n-1} + H_n)p(H_n/H_n + H_1)$$

$$= p(H_1/H_n + H_1)p(H_2/H_2 + H_1)p(H_3/H_3 + H_2) \ldots p(H_n/H_n + H_{n-1}) .$$

Corollario 2. *Sia $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ un'algebra; se p è una probabilità condizionata completa su $\mathscr{A}$, allora, dati n eventi a due a due incompatibili, sono verificate le uguaglianze*

$$(3)' \qquad p(H_i/H_1 + \ldots + H_n) = \frac{p(H_i/H_i + H_1)}{p(H_1/H_i + H_1)} [1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{p(H_j/H_j + H_1)}{p(H_1/H_j + H_1)}]^{-1},$$

dove $H_1 \geqslant H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Per dimostrare la (1)' basta procedere per induzione tenendo presente che per la (1), vale in particolare l'uguaglianza

$$p(H_1/H_1 + H_{n-1})p(H_{n-1}/H_{n-1} + H_n)p(H_n/H_n + H_1)$$

$$= p(H_1/H_1 + H_n)pH_{n-1}/H_{n-1} + H_1)p(H_n/H_n + H_{n-1}) .$$

La dimostrazione di (3)' segue immediatamente da (3) per induzione.

Si noti che se si considera il sistema (2), la (1) risulta condizione necessaria per la risolubilità di (2), mentre la (3) dà la soluzione del sistema. È quindi immediata la dimostrazione del seguente

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $p: \mathscr{A} \times \mathscr{A}^0 \to [0, 1]$, che verifichi* (i) *e* (ii) *sia una probabilità condizionata è che*

(iii)" *per ogni terna di eventi a due a due incompatibili $H_1, H_2, H_3 \in \mathscr{A}^0$, valgano* (1) *e* (3).

Vogliamo notare che nè la (1) nè la (3), considerate singolarmente, sono sufficienti perchè p sia una probabilità condizionata, come si può vedere dagli esempi elementari qui riportati.

Esempio 1. Se H_1, H_2, H_3 costituiscono una partizione di Ω e $\mathscr{A}$ è l'algebra generata dagli H_i, su $\mathscr{A}\times\mathscr{A}^0$ definiamo una funzione p come segue

$$p(H_i/H_i+H_j)=\tfrac{1}{2}\,,\qquad p(H_1)=p(H_2)=0\,,\qquad p(H_3)=1$$

La p verifica la (1) ma non la (iii).

Esempio 2. Sia $\mathscr{A}$ l'algebra dell'esempio precedente e p definita come segue

$$p(H_1/H_2+H_1)=p(H_2/H_2+H_3)=p(H_2)=0$$

$$p(H_1/H_1+H_3)=p(H_3/H_3+H_1)=p(H_1)=p(H_3)=\tfrac{1}{2}$$

$$p(H_2/H_1+H_2)=p(H_3/H_2+H_3)=1\,.$$

La p non è una probabilità condizionata, pur verificando (i), (iii) e (3).

Notiamo inoltre come, mediante la (3), ovvero la (3)', è possibile, conoscendo le $p(H_i/H_i+H_j)$, individuare la probabilità condizionata alle somme finite di eventi a due a due incompatibili H_i; in particolare le $p(H_i/H_i+H_j)$ determinano la probabilità condizionata completa su *tutta l'algebra generata dagli* H_i nel caso in cui gli H_i costituiscono una partizione finita di Ω, oppure nel caso in cui $p(H_i)=0$, caso che vedremo nelle costruzioni delle probabilità condizionate del terzo paragrafo.

Per queste stesse algebre il Teorema 1 garantisce *l'esistenza* della probabilità condizionata completa estensione (unica) delle $p(H_i/H_i+H_j)$, assegnate con la sola « cautela » che verifichino l'additività e la (1).

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una* $p:\mathscr{A}\times\mathscr{A}^0\to[0,1]$, *che verifichi* (i) *e* (ii), *sia una probabilità condizionata, è che*

(iii)''' *per ogni terna di eventi a due a due incompatibili* H_1, H_2, H_3 *valgono le*

$$(\alpha)\qquad p(H_i/H_1+H_2+H_3)=\frac{p(H_i/H_i+H_j)}{p(H_j/H_i+H_j)}\Big[\sum_{k=1}^{3}\frac{p(H_k/H_j+H_k)}{p(H_j/H_j+H_k)}\Big]^{-1}$$

se $p(H_j/H_i+H_j)\neq 0$ *per* $i=1,2,3$;

$$(\beta)\qquad p(H_j/H_1+H_2+H_3)=0$$

se $p(H_j/H_i+H_j)=0$ *per qualche* i.

Dim. Che la (iii)''' è necessaria è stato dimostrato nella Proposizione 3. Dimostriamo ora che la (iii)''' è sufficiente.

Siano $A \subset B \subset C$ elementi di $\mathscr{A}^0$; posto $H_1 = A, H_2 = B - A$, $C_3 = C - B$, usando le notazioni adottate nella dimostrazione della Proposizione 3, se $a_2, a_3 \neq 0$ risulta

$$p(A/C) = \frac{a_2 a_3}{a_2 a_3 + (1-a_2)a_3 + a_2(1-a_3)}, \qquad p(A/B) = a_2,$$

$$p(B/C) = \frac{a_3}{a_2 a_3 + (1-a_2)a_3 + (1-a_3)a_2}, \quad \text{e quindi} \quad p(A/C) = p(A/B)p(B/C).$$

Se invece $a_2 = 0$, per la (β) di (iiii)''' anche $p(A/C) = 0$.

Infine, se $a_2 \neq 0$ e $a_3 = 0$, poichè dalla (β) risulta $p(A/C) = 0$, deve essere $p(H_2/H_1 + H_2) = 0$ oppure $p(H_2/H_2 + H_3) = 0$; infatti, se così non fosse, scrivendo $p(A/C)$ mediante la (α) in termini di $p(\cdot/H_i + H_2)$, essa risulterebbe diversa da zero, contrariamente a quanto supposto.

Da quanto detto segue $p(H_2/H_1 + H_2 + H_3) = 0$, $p(B/C) = 0$ e quindi la (iii)'.

3 - Costruzione di probabilità condizionate

Premettiamo ai teoremi un lemma che già di per sè assicura « indipendenza » e « componibilità » di più informazioni probabilistiche su sottoalgebre di $\mathscr{P}(\Omega)$.

Lemma. *Data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$, sia $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ una famiglia di eventi incompatibili di probabilità nulla e sia $\mathscr{G}$ l'algebra generata da $\mathscr{H}$. Se p è una probabilità condizionata completa su $\mathscr{G}$, per cui $p(H/\Omega) = 0$, per ogni $H \in \mathscr{H}$ e, per ogni $H_i \in \mathscr{H}$, p_i: $\mathscr{P}(H_i) \to [0, 1]$ è una probabilità, allora esiste ed è unica una probabilità condizionata P: $\mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{G}^0 \to [0, 1]$ che estende p, π, p_i.*

Dim. Si definisca P come segue

$$(6) \qquad P(E/H_1 + \ldots + H_n) = \sum_{i=1}^{3} p_i(EH_i)p(H_i/H_1 + \ldots + H_n) \quad \text{per ogni } E \in \mathscr{P}(\Omega)$$

e $H_i \in \mathscr{H}$,

$$(7) \qquad P(E/K) = \pi(E) \quad \text{per } E \in \mathscr{P}(\Omega) \text{ e } K = \mathscr{C}(H_1 + \ldots + H_n).$$

Se P: $\mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{G}^0 \to [0, 1]$ è una probabilità condizionata che estende p, π e p_i, deve verificare (6) e (7) e quindi P è univocamente determinata.

D'altra parte la funzione P, definita da (6) e (7), è una probabilità condizionata: la verifica della (i) e della (ii) è immediata; per la (iii) si fa una verifica diretta distinguendo il caso in cui G è unione finita di elementi di $\mathscr{H}$ dal caso in cui G è complementare di un'unione finita di elementi di $\mathscr{H}$.

Si verifica inoltre facilmente che P estende p, π e p_i.

La seguente proposizione, che è una conseguenza immediata del Lemma e del Teorema di estensione di Dubins [4], risponde ad un caso particolare del primo tipo di problemi posti nell'introduzione: la distribuzione di probabilità vincola la probabilità condizionata ad un evento di probabilità nulla?

Proposizione 4. *Sia data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$ e sia $H \in \mathscr{P}(\Omega)$, tale che $\pi(H) = 0$. Se p è una probabilità su $\mathscr{P}(H)$, allora esiste una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$, che è estensione di π e di p.*

I teoremi 3, 4, 5, 6 danno una risposta globale ai quesiti posti nell'introduzione in quanto dimostrano l'esistenza di probabilità condizionate che « accolgono » informazioni su classi di eventi, a partire da una probabilità qualunque (nei teoremi non si fanno ipotesi sulla probabilità data!). Facciamo notare che nella dimostrazione dei teoremi si costruiscono effettivamente le probabilità condizionate con le caratteristiche richieste.

Teorema 3. *Data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$ e una famiglia $\mathscr{H}$ di eventi incompatibili $H_i \in \mathscr{P}(\Omega)$, tali che $\pi(H_i) = 0$, esiste una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$, estensione di π, rispetto alla quale gli H_i sono tutti equivalenti in probabilità.*

Dim. Sia $\mathscr{G}$ l'algebra generata dagli H_i. Definiamo una probabilità condizionata p su $\mathscr{G} \times \mathscr{G}^0$ nel modo seguente

$$p(H_i/H_1 + \ldots + H_n) = 1/n \qquad \text{per } H_i \in \mathscr{H},$$

$$p(H/K) = 0 \qquad \text{per } K = \mathscr{C}(H_1 + \ldots + H_n) \text{ e } H, H_j \in \mathscr{H}.$$

Si verifica facilmente che la p estesa per additività gode delle proprietà (i), (ii), (iii).

Per il Lemma precedente esiste una probabilità condizionata P su $\mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{G}^0$ estensione di p e di π.

Per il teorema di Dubins la P può essere estesa ad una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$. La definizione di p ci assicura l'equivalenza in probabilità degli $H \in \mathscr{H}$.

Teorema 4. *Data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$ e una famiglia $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ di eventi incompatibili e di probabilità nulla, esiste una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$, che estende π e rispetto alla quale gli elementi di $\mathscr{H}$ sono tutti zeri di ordine diverso.*

Dim. Sia $\mathscr{G}$ l'algebra generata da $\mathscr{H}$; indiciamo la famiglia $\mathscr{H}$ con un insieme totalmente ordinato e definiamo $p\colon \mathscr{G} \times \mathscr{G}^0 \to [0, 1]$ nel modo seguente: se $H_i \in \mathscr{H}$ e F è un insieme finito di indici contenente j poniamo

$$p(H_j/\sum_{i \in F} H_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \max F \\ 0 & \text{se } j \neq \max F ; \end{cases}$$

se K è complementare di una unione finita di elementi di $\mathscr{H}$ poniamo

$$p(H_i/K) = 0 \quad \text{e} \quad p(K/E) = 1 \qquad \text{per ogni } E \in \mathscr{G}^0 .$$

Si verifica facilmente che p è una probabilità condizionata.

Tramite il Lemma dimostrato in questo paragrafo si costruisce la probabilità condizionata $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{G}^0 \to [0, 1]$, estensione di p e π.

Qualunque probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$ che estenda P è tale che gli insiemi H_i risultano tutti zeri di ordine diverso.

Nel Teorema 5 dimostriamo che è possibile costruire un modello in cui certi eventi di probabilità nulla sono tutti dello stesso ordine ma a due a due non equivalenti; ci sono però limiti sulla cardinalità della famiglia di tali eventi, come mostra la Proposizione 5. Vogliamo notare invece che nei casi esaminati precedentemente non si hanno limiti sulla cardinalità.

Proposizione 5. *Data una probabilità condizionata completa p su $\mathscr{P}(\Omega)$, una famiglia $\mathscr{H}$, di eventi incompatibili che abbiano tutti lo stesso ordine e siano a due a due non equivalenti in probabilità, è tale che* card $(\mathscr{H}) \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Dim. Fissato $H \in \mathscr{H}$, definiamo $\varphi\colon \mathscr{H} \to [0, 1]$, ponendo $\varphi(K) = p(K/H+K)$. Poichè gli elementi di $\mathscr{H}$ sono tutti dello stesso ordine, $\varphi(K) \neq 0$ per tutti i $K \in \mathscr{H}$.

La φ è iniettiva; infatti, se per due eventi K_1 e K_2 fosse $\varphi(K_1) = \varphi(K_2)$, si avrebbe per gli stessi $p(H/H + K_1) = p(H/H + K_2)$. Da questo e dalla (1), scritta per H, K_1, K_2, segue $p(K_1/K_1 + K_2) = p(K_2/K_1 + K_2)$ e quindi l'equivalenza di K_1 e K_2.

Teorema 5. *Data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$ e una famiglia $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ di eventi incompatibili di probabilità nulla, tale che* card $(\mathscr{H}) \leqslant 2^{\aleph_0}$, *esiste una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$ che estende π e, rispetto alla quale, gli elementi di $\mathscr{H}$ risultano zeri dello stesso ordine, ma a due a due non equivalenti in probabilità.*

Dim. Sia data $H: X \to \mathscr{H}$ con X sottoinsieme di $\boldsymbol{R}$ e H biunivoca, e sia $\mathscr{G}$ l'algebra generata dagli $H(x)$. Assegnata una funzione $f: X \to \boldsymbol{R}$, positiva e strettamente monotona, definiamo

$$p\big(H(x_i)/H(x_1) + \ldots + H(x_n)\big) = \frac{f(x_i)}{f(x_1) + \ldots + f(x_n)} \qquad \text{per } H(x_i) \in \mathscr{H}.$$

Se $K = \mathscr{C}\big(H(x_1) + \ldots + H(x_n)\big)$ poniamo $p(H/K) = 0$.

La p, estesa per additività su tutta l'algebra $\mathscr{G}$, verifica gli assiomi (i), (ii), (iii)$'$.

Per la probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$, estensione di π e della probabilità condizionata ora definita su $\mathscr{G} \times \mathscr{G}^0$, gli insiemi $H(x)$ sono tutti dello stesso ordine ma a due a due non equivalenti; infatti, per come è stata definita p, per ogni $i \neq j$ si ha $0 \neq p\big(H(x_i)/H(x_i) + H(x_j)\big) \neq \frac{1}{2}$.

Teorema 6. *Data una probabilità π su $\mathscr{P}(\Omega)$ e una famiglia $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, di eventi incompatibili e di probabilità nulla, per ogni partizione di $\mathscr{H}$ in famiglie $\mathscr{H}_i$ (dove i varia in un insieme qualunque I), esiste una probabilità condizionata completa su $\mathscr{P}(\Omega)$ estensione della π e, rispetto alla quale $H_i \in \mathscr{H}_i$ è di ordine diverso da $H_j \in \mathscr{H}_j$, se $i \neq j$, mentre H e K sono dello stesso ordine se $H, K \in \mathscr{H}_i$.*

Dim. Si assegni in I un ordinamento totale.

Per ogni $i \in I$ sia $f_i: \mathscr{H}_i \times \mathscr{H}_i \to (0, 1)$ una funzione che verifichi le seguenti proprietà:

(a) $f_i(x, y) = 1 - f_i(y, x)$,

(b) $f_i(x, y) f_i(y, z) f_i(z, x) = f_i(y, x) f_i(z, y) f_i(x, z)$ per ogni $x, y, z \in \mathscr{H}_i$.

Notiamo dapprima che tali funzioni esistono: si consideri ad esempio

$$f_i(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(y)} \qquad \text{con } \varphi: \mathscr{H}_i \to (0, 1).$$

Sull'algebra $\mathscr{G}$ generata da $\mathscr{H}$, definiamo una probabilità condizionata completa come segue: dato un numero finito di famiglie $\mathscr{H}_i$ e in ognuna di queste un numero finito di insiemi $H_1^i, \ldots, H_{n(i)}^i \in \mathscr{H}_i$, poniamo

$$p(H_k^s / \sum_{i,j} H_j^i) = 0$$

se s non è il massimo degli indici considerati;

$$p(H_k^s / \sum_{i,j} H_j^i) = p(H_k^s / \sum_{j=1}^{n(s)} H_j^s) = \frac{f_s(H_k^s, H_1^s)}{f_s(H_1^s, H_k^s)} \left[\sum_{j=1}^{n(s)} \frac{f_s(H_j^s, H_1^s)}{f_s(H_1^s, H_j^s)}\right]^{-1}$$

se s è il massimo degli indici.

Si noti che, poichè f_i è strettamente positiva, il terzo membro della uguaglianza ha senso.

Si noti inoltre che la definizione è ben posta, poichè è indipendente dall'ordine degli H_j, cioè

$$\frac{f(H_k, H_1)}{f(H_1, H_k)} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f(H_j, H_1)}{f(H_1, H_j)}\right]^{-1} = \frac{f(H_k, H_2)}{f(H_2, H_k)} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f(H_j, H_2)}{f(H_2, H_j)}\right]^{-1}. \tag{8}$$

Nella (8) abbiamo tralasciato l'indice s della famiglia per semplicità di notazione.

Dimostriamo (8) per induzione su n: per $n = 2$ la verifica è immediata. Per $n > 2$, posta l'ipotesi induttiva, la (8) risulta equivalente a

$$\frac{f(H_1, H_k)}{f(H_k, H_1)} \frac{f(H_n, H_1)}{f(H_1, H_n)} = \frac{f(H_2, H_k)}{f(H_k, H_2)} \frac{f(H_n, H_2)}{f(H_2, H_n)}. \tag{9}$$

L'uguaglianza segue applicando la (b) alla (9) scritta sotto forma di prodotto e moltiplicata per $f(H_1, H_2) f(H_2, H_1)$.

Si noti che, in particolare, se $H_1, H_2 \in \mathscr{H}_i$, dalla proprietà (a) segue immediatamente che $p(H_1/H_1 + H_2) = f(H_1, H_2)$.

Si estenda ora p per additività sull'algebra generata da $\mathscr{H}$. La verifica che p così definita è una probabilità condizionata è immediata qualora si usi il Teorema 2.

Per il Lemma di questo paragrafo e per il già citato Teorema di Dubins, esiste una probabilità condizionata completa che estende p e π; questa, per come è stata definità p, gode delle proprietà richieste.

Il Teorema 6 riassume in qualche modo i teoremi 3, 4, 5. Ci è sembrato però interessante dare singolarmente le dimostrazioni dei precedenti teoremi perchè in essi si mette in risalto la costruzione (unica!) delle probabilità richieste.

Bibliografia

[1] G. Coletti e G. Regoli, *Sul confronto tra eventi di probabilità nulla*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste (in corso di stampa).

[2] B. De Finetti, *Probability, Induction, Statistic*, Wiley 1972.

[3] L. E. Dubins, *Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations*, Ann. Probab. **3** (1975), 89-99.

Summary

In this paper we prove that there exists a complete conditional probability (following Dubins [**3**]*), with arbitrary conditions on the probability distribution and zero probability events.*

For this purpose, we state some properties and characterizations of conditional probability, and then we construct the conditional probabilities verifying the required conditions.

* * *