Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 67-75

LIVIA D'APUZZO (*)

Caratterizzazioni delle successioni di Cauchy e teoremi di punto unito (**)

In questo lavoro si caratterizzano le successioni di Cauchy e si deducono dalle caratterizzazioni date alcuni teoremi che, relativamente ad uno spazio metrico (S, d) e ad una applicazione τ di S in S, forniscono, una volta prefissati un punto x di S ed una iterata τ^s di τ, condizioni sufficienti a che la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ converga ad un punto unito di τ^s.

In particolare, si ritrova un risultato di M. L. Diviccaro che implica un teorema di punto unito di S. Reich.

1 – Conveniamo di indicare in questo numero e nei successivi con (S, d) uno spazio metrico.

Allo scopo di dare sinteticamente alcune caratterizzazioni delle successioni di Cauchy di punti di (S, d), indicata con $(x_n)_{n\in N}$ [1] una successione di punti di (S, d), consideriamo, con riferimento ad un generico numero reale positivo ε, le seguenti proprietà:

(a) *esistono due numeri reali positivi r ed η, il primo maggiore di ε, il secondo minore di ε, ed un intero positivo h tali che*

$$d(x_{m+h}, x_{n+h}) < \eta \qquad \forall m, n \in N: \mathrm{d}(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[;$$

(b) *esistono due numeri reali positivi r ed η, il primo maggiore di ε, il secondo minore di ε, ed un intero posito h tali che, per ogni coppia (m, n) di interi*

(*) Indirizzo: Via Rodolfo Falvo 20, 80127 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 10-III-1981.

[1] Con N denotiamo l'insieme degli interi positivi.

positivi per la quale risulti $d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[$, *esiste un intero positivo* h' *minore o uguale ad* h *per il quale si ha*

$$d(x_{m+h'}, x_{n+h'}) < \eta ;$$

(c) *esistono due numeri reali positivi* r *ed* η, *il primo maggiore di* ε, *il secondo minore di* ε, *e due interi positivi* h *e* k *tali che, per ogni coppia* (m, n) *di interi positivi maggiori di* k *per la quale risulti* $d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[$, *esiste un intero positivo* h' *minore o uguale ad* h *per il quale si ha*

$$d(x_{m+h'}, x_{n+h'}) < \eta .$$

Sussiste la seguente proposizione.

(1.1) *Per una successione* $(x_n)_{n\in N}$ *di punti di* (S, d) *sono equivalenti le seguenti condizioni*:

(A) *la successione* $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ *è infinitesima ed ogni numero reale positivo* ε *gode della proprietà* (a);

(B) *la successione* $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ *è infinitesima ed ogni numero reale positivo* ε *gode della proprietà* (b);

(C) *la successione* $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ *è infinitesima ed ogni numero reale positivo* ε *gode della proprietà* (c);

(D) *la successione* $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ *è infinitesima ed esiste un numero reale positivo* ε_0 *tale che ogni numero reale positivo* ε *minore di* ε_0 *gode della proprietà* (c);

(E) *la successione* $(x_n)_{n\in N}$ *è di Cauchy.*

Dim. Basta dimostrate la seguente catena di implicazioni.

(A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D) $\Rightarrow$ (E) $\Rightarrow$ (A), ed essendo evidenti le implicazioni (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D), è sufficiente dimostrare che (D) $\Rightarrow$ (E) e che (E) $\Rightarrow$ (A).

Dimostriamo che (D) $\Rightarrow$ (E).

Supponiamo per assurdo che, nella ipotesi che (D) sia vera, la successione $(x_n)_{n\in N}$ non sia di Cauchy: esistono allora un numero reale positivo ε minore di ε_0 e due successioni di interi positivi $(m_p)_{p\in N}$ ed $(n_p)_{p\in N}$ tali che

$$(1)\qquad \begin{aligned} &m_p > n_p \geqslant p \quad \text{e} \quad d(x_{m_p}, x_{n_p}) > \varepsilon \qquad \forall p \in N\,, \\ &\lim_p d(x_{m_p}, x_{n_p}) = \varepsilon \text{ (2)}. \end{aligned}$$

Considerati allora i numeri r, η, h e k di cui alla (c) e relativi al suddetto ε ed un intero positivo $\overline{p} > k$ tale che $d(x_{m_p}, x_{n_p}) < r$ $\forall p \geqslant \overline{p}$, denotiamo, per ogni $p \geqslant \overline{p}$, con h_p un intero positivo minore o uguale ad h per cui risulti $d(x_{m_p+h_p}, x_{n_p+h_p}) < \eta$; si ha allora, per ogni $p \geqslant \overline{p}$,

$$\begin{aligned} d(x_{m_p}, x_{n_p}) &< \sum_{i=0}^{h_p-1} d(x_{m_p+i}, x_{m_p+i+1}) + \eta + \sum_{i=0}^{h_p-1} d(x_{n_p+i}, x_{n_p+i+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{h-1} d(x_{m_p+i}, x_{m_p+i+1}) + \eta + \sum_{i=0}^{h-1} d(x_{n_p+i}, x_{n_p+i+1})\,. \end{aligned}$$

Passando quindi al limite per $p \to +\infty$ si ha, considerando che la successione $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ è infinitesima, $\varepsilon \leqslant \eta$, il che è assurdo.

Dimostriamo ora la implicazione (E) $\Rightarrow$ (A).

L'essere $(x_n)_{n\in N}$ una successione di Cauchy comporta che $\forall \eta > 0$ $\exists \delta > 0$: $d(x_p, x_q) < \eta$ $\forall p, q > \delta$, e pertanto anche $\forall \eta > 0$ $\exists \delta > 0$: $d(x_{m+h}, x_{n+h}) < \eta$ $\forall m, n \in N$ e $\forall h \in N$: $h > \delta$, ed è quindi evidentemente verificata la (A).

---

(2) Allo scopo di dimostrare quanto affermato, procediamo come segue (per un ragionamento analogo cfr. [**1**], pag. 460): se $(x_n)_{n\in N}$ non è di Cauchy esistono un numero reale $\varepsilon < \varepsilon_0$ e, per ogni $p \in N$, due interi μ_p e n_p tali che $\mu_p > n_p \geqslant p$ e $d(x_{\mu_p}, x_{n_p}) > \varepsilon$. Posto allora

$$m_p = \min\{m \in N: m > n_p \geqslant p, d(x_m, x_{n_p}) > \varepsilon\}\,,$$

risulta evidentemente, per ogni $p \in N$, $m_p - 1 \geqslant n_p \geqslant p$, $d(x_{m_p-1}, x_{n_p}) \leqslant \varepsilon$, e quindi anche

$$\varepsilon < d(x_{m_p}, x_{n_p}) \leqslant d(x_{m_p-1}, x_{m_p}) + d(x_{m_p-1}, x_{n_p}) \leqslant d(x_{m_p-1}, x_{m_p}) + \varepsilon\,,$$

da cui, essendo $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ infinitesima e risultando $\lim_p m_p = +\infty$, si ha $\lim_p d(x_{m_p}, x_{n_p}) = \varepsilon$.

Osservazioni. Possiamo rilevare che l'enunciata proprietà (a) è equivalente alla seguente

(a)$'$ *esistono un intero positivo* h *ed una applicazione* ψ *di* $[0, +\infty[$ *in* $[0, +\infty]$ *tali che*

$$\lim_{t\to\varepsilon^+}{}'' \psi(t) < \varepsilon \quad e \quad d(x_{m+h}, x_{n+h}) \leqslant \psi(d(x_m, x_n)) \qquad \forall m, n \in N: x_m \neq x_n .$$

Infatti, nella ipotesi che per un numero reale positivo ε sia verificata la (a)$'$, denotato con η un numero di $]\lim''_{t\to\varepsilon^+} \psi(t), \varepsilon[$, esiste un numero reale r maggiore di ε tale che

$$\psi(d(x_m, x_n)) < \eta \qquad \forall m, n \in N: d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[;$$

risulta conseguentemente

$$d(x_{m+h}, x_{n+h}) < \eta \qquad \forall m, n \in N: d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[,$$

e pertanto ε gode della (a).

Per dimostrare che, viceversa, la (a)$'$ discende dalla (a), osserviamo che, indicato per ogni intero positivo h e per ogni numero reale non negativo t, con $X_{t,h}$ l'insieme costituito da 0 e dai numeri $d(x_{m+h}, x_{n+h})$ tali che $d(x_m, x_n) = t$, e detta ψ_h la funzione definita dall'essere $\psi_h(t) = \sup X_{t,h}$ per ogni $t \geqslant 0$, risulta

$$d(x_{m+h}, x_{n+h}) \leqslant \psi_h(d(x_m, x_n)) \qquad \forall h \in N \text{ e } \forall m, n \in N ,$$

e, inoltre, se ε è un numero reale positivo godente della proprietà (a), esiste un intero positivo h tale che

$$\lim_{t\to\varepsilon^+}{}'' \psi_h(t) < \varepsilon .$$

Può essere ancora utile osservare che nell'implicazione (A) $\Rightarrow$ (E) è essenziale ognuna delle condizioni seguenti:

(a_1) *la successione* $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\in N}$ *è infinitesima*;

(a_2) *ogni numero reale positivo* ε *gode della proprietà* (a).

A tal fine, basta tener presente, da un lato, il caso in cui d è una metrica

a due valori, 0 e c, e $(x_n)_{n\in N}$ è una successione non definitivamente costante ([3]
e, dall'altro, il caso in cui, nella retta reale, $(x_n)_{n\in N}$ è la serie armonica.

Analoghe osservazioni possono essere fatte relativamente alle implicazioni (B) $\Rightarrow$ (E), (C) $\Rightarrow$ (E) e (D) $\Rightarrow$ (E).

2 – È utile ricavare dalla proposizione (1.1) la seguente che fornisce una condizione sufficiente a che la successione $(x_n)_{n\in N}$ di punti di (S, d) sia una successione di Cauchy.

(2.1) *È di Cauchy ogni successione $(x_n)_{n\in N}$ di punti di (S, d) per la quale risulti infinitesima la successione $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ ed esistano tre interi positivi, h, μ e ν, tali che*

$$(2)\qquad d(x_{m+h}, x_{n+h})\leqslant\alpha\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_m, x_{m+\mu}) + \beta\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_n, x_{n+\nu}) + \gamma\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_m, x_n)\qquad \forall m, n\in N: x_m\neq x_n\,,$$

con α, β e γ applicazioni di $[0, +\infty[$ in sè per le quali risulti, in corrispondenza di ogni numero reale positivo ε:

$$(3)\qquad l_{1,\varepsilon}=\lim_{t\to\varepsilon^+}{}''\,\alpha(t)<+\infty\,,\qquad l_{2,\varepsilon}=\lim_{t\to\varepsilon^+}{}''\,\beta(t)<+\infty\,,\qquad l_{3,\varepsilon}=\lim_{t\to\varepsilon^+}{}''\,\gamma(t)<1\ ({}^4)\,.$$

Dim. Osserviamo che in conseguenza delle (3) si ha che, in corrispondenza di ogni numero reale positivo ε, detti l un numero reale maggiore di $l_{1,\varepsilon}$ e di $l_{2,\varepsilon}$ e δ un numero reale di $]l_{3,\varepsilon}, 1[$, esiste un numero reale r maggiore di ε per il quale risulta

$$\alpha(t)<l\,,\qquad \beta(t)<l\,,\qquad \gamma(t)\cdot t<\delta\varepsilon\qquad \forall t\in\,]\varepsilon, r[\,.$$

Indicato con ε' un numero reale positivo tale che $2l\varepsilon'+\delta\varepsilon<\varepsilon$, per la supposta convegenza a 0 di $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ esiste un intero positivo k tale che

---

([3]) In tal caso, considerando l'applicazione ψ definita dall'essere $\psi(c) = c = \psi(0)$ e $\psi(t) = 0$ per ogni numero reale positivo t diverso da c, è facile provare che ogni numero reale positivo ε gode della (a)' e quindi della equivalente proprietà (a).

([4]) Tale teorema sarà dimostrato usufruendo della implicazione (C) $\Rightarrow$ (E) (cfr. (1.1)). Osserviamo esplicitamente che esso continua a sussistere, e ciò è evidente qualora si tenga presente l'implicazione (D) $\Rightarrow$ (E), se si suppone l'esistenza di un numero reale positivo ε_0 tale che la condizione (2) sia verificata per ogni coppia (m, n) di interi positivi per la quale si abbia $d(x_m, x_n)\in\,]0, \varepsilon_0[$ e con α, β e γ applicazioni di $[0, \varepsilon_0[$ in $[0, +\infty[$ verificanti le (3) per ogni numero reale positivo $\varepsilon<\varepsilon_0$.

Analoghe osservazioni possono farsi, ovviamente, per i teoremi che si dedurranno da (2.1).

per $n > k$ e per $p = \mu, \nu$ risulti $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon'$; si ha perciò che

$$d(x_{m+h}, x_{n+h}) \leqslant \alpha\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_m, x_{m+\mu}) + \beta\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_n, x_{n+\nu})$$

$$+ \gamma\big(d(x_m, x_n)\big)\, d(x_m, x_n) < 2l\varepsilon' + \delta\varepsilon \qquad \forall m, n > k\colon d(x_m, x_n) \in \,]\varepsilon, r[\,,$$

e pertanto è verificata la condizione (C) di (1.1).

Allo scopo di enunciare sinteticamente una ulteriore proposizione che pure fornisce una condizione sufficiente a che la successione $(x_n)_{n\in N}$ di punti di (S, d) sia di Cauchy, consideriamo, qualunque siano l'applicazione φ di $[0, +\infty[$ in sè e l'intero positivo p, e con riferimento ad un generico numero reale positivo ε, la seguente proprietà

($d_{p,\varphi}$) *esistono due numeri reali positivi r ed η, il primo maggiore di ε, il secondo minore di ε, tali che risulti $\varphi(t_p) < \eta$ per ogni p-upla $(t_1, \dots, t_p)$ di numeri reali positivi soddisfacenti alle condizioni*

$$\varepsilon < t_1 < r \qquad t_i \leqslant \varphi(t_{i-1}) \qquad \textit{per } i = 2, \dots, p \ (^5)\,.$$

Indichiamo poi, per ogni intero positivo u, con $\mathscr{F}_u$ l'insieme delle applicazioni φ di $[0, +\infty[$ in sè tali che ogni numero reale positivo ε gode di una almeno delle proprietà $(d_{1,\varphi}), \dots, (d_{u,\varphi})$.

Ciò premesso, usufruendo ancora della (1.1), dimostriamo la seguente proposizione.

(2.2) *È di Cauchy ogni successione $(x_n)_{n\in N}$ di punti di (S, d) per la quale risulti infinitesima la successione $\big(d(x_n, x_{n+1})\big)_{n\in N}$ ed esistano due interi positivi u e q tali che, per una opportuna applicazione φ di $\mathscr{F}_u$, risulti*

$$d(x_{m+q}, x_{n+q}) \leqslant \varphi\big(d(x_m, x_n)\big) \qquad \forall m, n\colon x_m \neq x_n \ (^6)\,.$$

---

(5) Evidentemente la proprietà $(d_{1,\varphi})$ è equivalente alla seguente $\lim''_{t\to\varepsilon^+} \varphi(t) < \varepsilon$. Osserviamo inoltre che il numero reale positivo ε gode della proprietà (d_2, φ) se esiste un numero reale $r > \varepsilon$ tale che $\varphi(t) < \varepsilon$ (risp. $\varphi(t) \leqslant \varepsilon$) $\forall t \in \,]\varepsilon, r[$, e posto $\omega = \sup \varphi(]0, \varepsilon[)$ (risp. $\omega = \sup \varphi(]0, \varepsilon])$), risulta $\omega < \varepsilon$.

Invero, nelle ipotesi suddette, se η è un numero di $]\omega, \varepsilon[$, qualunque sia la coppia (t_1, t_2) di numeri reali positivi tali che $\varepsilon < t_1 < r$, $t_2 \leqslant \varphi(t_1)$, risulta $\varphi(t_2) \leqslant \omega < \eta$.

(6) Nel caso $u = 1$, la (2.2) è una immediata conseguenza della (2.1), risultando in tal caso verificate le ipotesi della (2.1) con α e β funzioni identicamente nulle e γ definita dall'essere $\gamma(t) = \varphi(t)/t$ $\forall t > 0$, e $\gamma(0) = 0$, e con $h = q$.

Dim. A norma di (1.1) è sufficiente dimostrare che, se ε è un numero reale positivo, esistono due numeri reali positivi r ed η, il primo maggiore di ε, il secondo minore di ε, tali che, per ogni coppia (m, n) di interi positivi per la quale risulti $d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[$, esista un intero positivo $h' \leqslant uq$ tale che $d(x_{m+h'}, x_{n+h'}) < \eta$.

Sia p un intero positivo non maggiore di u tale che ε goda della proprietà $(d_{p,\varphi})$, e siano r ed η i numeri di cui alla $(d_{p,\varphi})$; sia poi (m, n) una coppia di interi positivi tale che $d(x_m, x_n) \in]\varepsilon, r[$.

Orbene, se $p = 1$ risulta $d(x_{m+q}, x_{n+q}) \leqslant \varphi(d(x_m, x_n)) < \eta$.

Sia $p > 1$. Se risulta $d(x_{m+iq}, x_{n+iq}) \geqslant \eta$ per $i = 1, \dots, p-1$, poichè per $i = 1, \dots, p$ si ha $d(x_{m+iq}, x_{n+iq}) \leqslant \varphi(d(x_{m+(i-1)q}, x_{n+(i-1)q}))$, a norma della $(d_{p,\varphi})$ deve essere $d(x_{m+pq}, x_{n+pq}) < \eta$.

3 – Indichiamo d'ora in avanti con x un punto di S, con τ una applicazione di S in S e con $\Omega_{\tau,x}$ la τ-orbita di x (7), e ricordiamo che, secondo una definizione dovuta a M. L. Diviccaro (cfr. [**2**]), se σ è una applicazione di S in S, la coppia (x, d) si dice *σ-ammissibile* se per la successione $(\sigma^n(x))_{n\in N}$ sono equivalenti le seguenti proposizioni

(i) $(\sigma^n(x))_{n\in N}$ è di Cauchy;

(ii) $(\sigma^n(x))_{n\in N}$ converge ad un punto unito di σ.

Utilizzeremo in questo numero e nel successivo le proposizioni dimostrate in **2** per dedurne alcune proposizioni che forniscono condizioni sufficienti a che la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ converga verso un punto unito per una iterata τ^s di τ.

È una immediata conseguenza della proposizione (2.1) la seguente proposizione.

(3.1) *La successione $(d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x)))_{n\in N}$ sia infinitesima ed esistano quattro interi positivi s, h, μ e ν tali che (x, d) sia τ^s-ammissibile e risulti*

$$d(\tau^h(a), \tau^h(b)) \leqslant \alpha(d(a, b))\, d(a, \tau^\mu(a)) + \beta(d(a, b))\, d(b, \tau^\nu(b)) + \gamma(d(a, b))\, d(a, b) \qquad \forall (a, b) \in \Omega^2_{\tau,x},$$

(7) Con *τ-orbita* di x si indica l'insieme degli elementi della successione $(\tau^{n-1}(x))_{n\in N}$, dove τ^m è, per ogni intero non negativo m, la iterata m-esima di τ.

con α, β *e* γ *applicazioni di* $[0, +\infty[$ *in sè verificanti, in corrispondenza di ogni numero reale positivo, le* (3).

Allora la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ *converge ad un punto unito di* τ^s.

Dim. La successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ verifica le ipotesi della proposizione (2.1) e pertanto è di Cauchy; conseguentemente, risultando di Cauchy anche la successione $(\tau^{ns}(x))_{n\in N}$, quest'ultima converge per la supposta τ^s-ammissibilità ad un punto unito di τ^s, che è anche il limite della successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$, dal momento che questa è di Cauchy.

Corollario della proposizione dimostrata è il seguente risultato di M. L. Diviccaro (cfr. [**2**]), che a sua volta implica un teorema di punto unito di S. Reich (cfr. teor. 1 di [**3**]).

(3.2) *Risulti* (x, d) τ-*ammissibile e*

$$d(\tau(a), \tau(b)) \leq \alpha(d(a, b))\, d(a, \tau(a)) + \beta(d(a, b))\cdot d(b, \tau(b)) + \gamma(d(a, b))\cdot d(a, b)$$

$\forall (a, b) \in \Omega^2_{\tau,x}$: $a \neq b$, *con* α, β *e* γ *applicazioni di* $]0, +\infty[$ *in* $[0, 1[$ *tali che*

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) < 1 \quad \forall t > 0\,, \qquad \lim_{t\to\varepsilon^+}{}'' \left(\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)\right) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\,.$$

Allora la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ *converge ad un punto unito di* τ (8).

4 – Dalla proposizione (2.2) di **2** è facile dedurre la seguente proposizione.

(4.1) *Sia infinitesima la successione* $(d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x)))_{n\in N}$ *ed esistano due interi positivi, s e q, e, per un intero positivo u, una applicazione* φ *di* $\mathscr{F}_u$ *tali che* (x, d) *sia* τ^s-*ammissibile e risulti*

$$d(\tau^q(a), \tau^q(b)) \leq \varphi(d(a, b)) \qquad \forall (a, b) \in \Omega^2_{\tau,x}\,.$$

Allora la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ *converge ad un punto unito di* τ^s.

Dim. Osservato che la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ è di Cauchy in quanto relativamente ad essa sono verificate le ipotesi della proposizione (2.2), si ricava

(8) Invero, nelle ipotesi della (3.2), si può vedere, con un ragionamento seguito da Reich in [**3**] (cfr. dim. del teor. 1 di [**3**]) e ripreso da Diviccaro in [**2**], che la successione $(d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x)))_{n\in N}$ è infinitesima.

l'asserto con lo stesso ragionamento seguito per dimostrare la proposizione (3.1).

Dal momento che la coppia (x, d) è sicuramente τ^s-ammissibile se risulta (S, d) completo e la restrizione di τ^s a $\overline{\Omega}_{\tau,x}$ continua, dalla (4.1) si ricava facilmente la seguente proposizione.

(4.2) *Sia (S, d) completo e infinitesima la successione $\big(d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x))\big)_{n\in N}$, esistano due interi positivi, s e q, e, per un intero positivo u, una applicazione φ di $\mathscr{F}_u$ tali che risulti continua la restrizione di τ^s a $\overline{\Omega}_{\tau,x}$ e*

$$d\big(\tau^q(a), \tau^q(b)\big) \leqslant \varphi\big(d(a, b)\big) \qquad \forall (a, b) \in \Omega^2_{\tau,x} .$$

Allora la successione $\big(\tau^n(x)\big)_{n\in N}$ converge ad un punto unito di τ^s.

La proposizione (4.2) implica evidentemente la seguente proposizione.

(4.3) *Sia (S, d) completo e infinitesima la successione $\big(d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x))\big)_{n\in N}$; esistano inoltre un intero positivo s e, per un intero positivo u, una applicazione φ di $\mathscr{F}_u$ tali che*

$$d\big(\tau^s(a), \tau^s(b)\big) \leqslant \varphi\big(d(a, b)\big) \qquad \forall (a, b) \in \overline{\Omega}^2_{\tau,x} , \tag{4}$$

e

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0 . \tag{5}$$

Allora la successione $\big(\tau^n(x)\big)_{n\in N}$ converge ad un punto unito di τ^s.

Osservazione. Possiamo rilevare che se nella (4.3) sostituiamo alla (5) l'ipotesi più forte $\varphi(t) < t \;\; \forall t > 0$, e inoltre, ferme restando le altre ipotesi, supponiamo che la diseguaglianza di cui alla (4) sia verificata per ogni coppia (a, b) di punti di S, il limite della successione $\big(\tau^n(x)\big)_{n\in N}$ é l'unico punto unito di τ^s ed anche l'unico punto unito di τ. Invero, risultando nelle ipotesi suddette $d\big(\tau^s(a), \tau^s(b)\big) < d(a, b) \;\; \forall (a, b) \in S^2\colon a \neq b$, τ^s ha un unico punto unito x_0; pertanto dall'essere: $\tau^s\big(\tau(x_0)\big) = \tau\big(\tau^s(x_0)\big) = \tau(x_0)$, si deduce che $x_0 = \tau(x_0)$; d'altro canto, x_0 è l'unico punto unito di τ, perchè ogni altro punto di S che fosse unito per τ lo sarebbe anche per τ^s.

Bibliografia

[1] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, *On non linear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 458-464.

[2] M. L. Diviccaro, *Un teorema orbitale di punto fisso*, Le Matematiche **32** (1977), 63-70.

[3] S. Reich, *Fixed point of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital. **5** (1972), 26-42.

* * *