Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 59-65

CARLA LUPPI (*)

Su alcune varietà notevoli di algebre di Heyting topologiche (**)

Premessa

In [4]₁ si è definito il concetto di algebra di Heyting topologica (AHT) e si è osservato (cfr. Teorema 3.3 e Lemma 3.1) che le AHT costituiscono una varietà (HT) contenente sia la varietà BT delle algebre di chiusura sia quella, che indicheremo con HM, delle algebre di Heyting cilindriche di dimensione 1.

Nella presente nota si è esaminato dapprima il rapporto fra la varietà HT e la varietà BT + HM generata da BT $\cup$ HM e si è poi confrontata la varietà BT + HM con la classe delle AHT rappresentabili (cfr. $[4]_2$). A tale scopo si è osservato che alla varietà BT + HM è applicabile un noto lemma di Jónsson che ha fornito lo spunto per individuare alcune equazioni valide in BT + HM, attraverso le quali si è potuto concludere che BT + HM non coincide nè con HT nè con la classe delle AHT rappresentabili.

L'interesse si è poi rivolto alla ricerca di equazioni che definiscano la varietà BT + HM ed inoltre al problema di stabilire se BT + HM sia finitamente assiomatizzabile.

Il suddetto lemma di Jónsson ha suggerito di affrontare il problema cercando, per ogni $\mathscr{H} \in$ BT + HM, una $\mathscr{H}_1 \in$ BT ed una $\mathscr{H}_2 \in$ HM tali che $\mathscr{H}$ sia immergibile in $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$. Con questa indagine si sono individuate *due* equazioni indipendenti, la (7) e la (8), che definiscono BT + HM come sottovarietà di HT.

Si è ottenuta così una soluzione completa per i problemi posti.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 24-II-1981.

1 - Alcuni richiami

Richiamiamo ora alcuni noti risultati di algebra universale, utili per il seguito. Se V è una varietà, indichiamo con $\Delta(V)$ la seguente condizione di Jónsson: per ogni algebra $\mathscr{A} \in V$ il reticolo delle congruenze di $\mathscr{A}$ è distributivo.

Lemma (di Jónsson). Se V_0, V_1 sono varietà tali che $\Delta(V_0 + V_1)$, allora ogni algebra di $V_0 + V_1$ è isomorfa al prodotto sottodiretto di una algebra di V_0 e una algebra di V_1 ed in particolare ogni algebra sottodirettamente irriducibile di $V_0 + V_1$ appartiene a V_0 oppure a V_1.

Teorema A. Un'algebra è sottodirettamente irriducibile sse ha una minima congruenza non banale.

Ricordiamo (cfr. [2]) che una famiglia $\{q_j\}_{j\in J}$ di congruenze su una algebra $\mathscr{A}$ è separante se $\bigcap_{j\in J} q_j = \Delta$.

Teorema B. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra con una famiglia separante di congruenze $\{q_j\}_{j\in J}$; allora $\mathscr{A}$ è isomorfa ad un prodotto sottodiretto delle $\mathscr{A}/q_j$.

2 - Alcune conseguenze del lemma di Jónsson

Dimostriamo anzitutto che per $\mathrm{BT} + \mathrm{HM}$ vale la condizione di Jónsson; a tale scopo enunciamo il seguente

Teorema 1. *Vale* $\Delta(\mathrm{HT})$.

Dim. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una AHT, sia $\mathscr{C}(H)$ il reticolo delle congruenze di H e $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ il reticolo delle congruenze di $\mathscr{H}$. Da un noto risultato di algebra universale si ha che $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ è un sottoreticolo di $\mathscr{C}(H)$, in quanto H è sottogiacente ad $\mathscr{H}$.

D'altra parte è ben noto che $\mathscr{C}(H)$ è distributivo, come del resto si può facilmente verificare, operando sui filtri.

Corollario. *Vale* $\Delta(\mathrm{BT} + \mathrm{HM})$.

Dim. Da $[4]_1$ (cfr. Lemma 3.1 e Teorema 3.4) segue $\mathrm{HT} \supseteq \mathrm{BT} + \mathrm{HM}$; dal Teorema 1 segue quindi l'asserto.

Dal Lemma di Jónsson segue che se $\mathscr{H} \in \mathrm{BT} + \mathrm{HM}$ allora $\mathscr{H}$ è isomorfa ad una sottoalgebra di un prodotto diretto di una algebra $\mathscr{H}_1 \in \mathrm{BT}$ e un'algebra $\mathscr{H}_2 \in \mathrm{HM}$. Ciò fornisce uno strumento per ottenere alcune proprietà di $\mathscr{H}$; ad esempio indicata con $\varphi\colon \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ una immersione e con p_1 e p_2 le proiezioni da $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ rispettivamente in $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$, si ha

Lemma 1. *Per ogni* $a \in H$

(i) *a è denso sse* $p_1\varphi(a) = 1$ *e* $p_2\varphi(a)$ *è denso;*

(ii) *se a è denso allora $I(a)$ è clopen;*

(iii) *se a è denso e chiuso allora a è clopen;*

(iv) *un denso della forma $I(a) \cup -I(a)$ è aperto (quindi per* (ii) *clopen);*

(v) *se a è regolare e aperto allora la sua chiusura è un regolare.*

Dim. (i) Segue osservando che a è denso sse $\varphi(a)$ è denso e che l'unico denso di una algebra di Boole è 1. Per quanto riguarda la dimostrazione di (ii)-(v) la tecnica dimostrativa è la stessa; ci limitiamo a dimostrare (iii) e (v); d'altra parte (cfr. Teorema 2) le (ii)-(v) si possono dimostrare per altra via.

Indichiamo con K_1 e K_2 gli operatori di chiusura di $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$.

(iii) Si osserva che $p_2\varphi(a)$ è chiuso e quindi, essendo $\mathscr{H}_2 \in$ HM, clopen. D'altra parte, da (i) segue $p_1\varphi(a) = 1$; dunque $\varphi(a)$ è clopen e quindi a è clopen, essendo φ iniettiva.

(v) Si ha $\varphi(K(a)) = \langle K_1 p_1 \varphi(a), K_2 p_2 \varphi(a)\rangle$; essendo φ iniettiva, basta dimostrare che $\varphi(K(a))$ è regolare e quindi $--K_2 p_2 \varphi(a) = K_2\, p_2\, \varphi(a)$. Quest'ultima segue tenendo presente che $p_2\varphi(a)$ è clopen e $a = --a$.

Le proprietà (ii)-(v) del lemma precedente sono traducibili in equazioni che sono valide in BT + HM.

Teorema 2. *In* BT + HM *vale*

(1) $$KI(x \cup -x) = I(x \cup -x)\,,$$

(2) $$IK(x \cup -x) = K(x \cup -x)\,,$$

(3) $$I(I(x) \cup -I(x)) = I(x) \cup -I(x)\,,$$

(4) $$KI(-x) = --KI(-x)\,.$$

Dim. Basta osservare che le equazioni valgono sia in BT che in HM.

Osservazione. Il Teorema 2 fornisce semplici condizioni necessarie affinchè una AHT appartenga alla varietà BT + HM. Ad esempio le AHT in

Fig. 1 e Fig. 2 non appartengono a BT + HM [1].

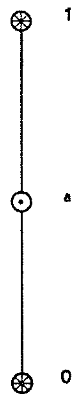

Fig. 1

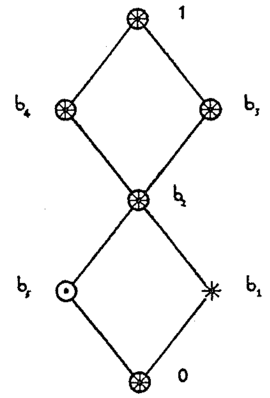

Fig. 2

Infatti nella AHT di Fig. 1 non vale la (1), perchè l'elemento denso a non soddisfa la (ii) del Lemma 1. Analogamente nell'algebra di Fig. 2 non vale la (4) giacchè l'elemento regolare b_5 non soddisfa la (v) del Lemma 1. Naturalmente per la AHT di Fig. 1, si poteva giungere alla stessa conclusione ricorrendo al Lemma di Jónsson, in quanto si tratta di un'algebra sottodirettamente irridudibile (come segue dal Teorema A), che non appartiene nè a BT nè ad HM.

Dall'osservazione precedente seguono i due seguenti teoremi.

Teorema 3. *La varietà* HT *contiene propriamente* BT + HM.

Teorema 4. *Esistono* AHT *rappresentabili che non appartengono a* BT + HM.

Dim. Le algebre di Fig. 1 e Fig. 2 sono finite, quindi (fortemente) rappresentabili (cfr. [**4**]$_2$).

3 - La varietà BT + HM

Osserviamo dapprima che c'è un isomorfismo fra le congruenze delle AHT e gli I-filtri (cfr. [**4**]$_1$).

---

(1) Conveniamo che i punti, che nelle figure 1 e 2 sono cerchiati, siano aperti, mentre quelli che sono stellati siano chiusi.

Lemma 2. *Sia* $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ *una* AHT; *il reticolo delle congruenze di* $\mathscr{H}$ *è isomorfo al reticolo* $\nabla(\mathscr{H})$ *degli* I*-filtri di* $\mathscr{H}$.

Dim. Sia $\mathscr{C}(H)$ il reticolo delle congruenze di H, sia $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ il sottoreticolo delle congruenze di $\mathscr{H}$ e $\nabla(H)$ il reticolo dei filtri di H. È noto che $\mathscr{C}(H)$ e $\nabla(H)$ sono isomorfi; indicato con $\varphi\colon \mathscr{C}(H) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \nabla(H)$ il consueto isomorfismo, dal Teorema 4.4 di [4]$_1$ segue che $\varphi|_{\mathscr{C}(\mathscr{H})}$ è un isomorfismo fra $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ e $\nabla(\mathscr{H})$.

Enunciamo ora una utile caratterizzazione di HM come sottovarietà di HT.

Lemma 3. HM *è la sottovarietà di* HT *determinata dalle due seguenti equazioni*:

(5) $\quad KI(x) = I(x)\,,$ $\qquad\qquad$ (6) $\quad IK(x) = K(x)\,.$

Dim. Sia $\mathscr{H} \in$ HM; tenendo presente il Teorema 3.4 di [4]$_1$, basta dimostrare che (6) implica $K(x \cap K(y)) = K(x) \cap K(y)$. Ci limitiamo a dimostrare $K(x) \cap K(y) \leqslant K(x \cap K(y))$.

Si ha $x \leqslant (z \Rightarrow (x \cap z)) \leqslant I(z) \Rightarrow K(x \cap z)$, da cui segue $K(x) \cap I(z) \leqslant K(x \cap z)$, essendo $I(z) \Rightarrow K(x \cap z)$ chiuso. Ponendo $K(y)$ al posto di z, si ha $K(x) \cap IK(y) \leqslant K(x \cap K(y))$. Per (6) si ha $K(x) \cap K(y) \leqslant K(x \cap K(y))$.

Per ogni $\mathscr{H} \in$ HT, poniamo ora

$$\mathscr{S} = \{KI(x) \Rightarrow I(x) \colon x \in H\} \cup \{K(x) \Rightarrow IK(x) \colon x \in H\}\,,$$

e indichiamo con D il filtro dei densi di H.

Lemma 4. *Sia* $\mathscr{H} \in$ HT; *sia* ∇_1 *l'*I*-filtro generato da* D *e* ∇_2 *l'*I*-filtro generato da* $\mathscr{S}$. *Allora si ha*

(i) $\mathscr{H}/\nabla_1 \in$ BT, $\qquad\qquad$ (ii) $\mathscr{H}/\nabla_2 \in$ HM.

Dim. (i) Basta osservare che H/∇_1 è un'algebra di Boole, e questo è noto (cfr. [**5**]).

(ii) Poichè $\mathscr{H}/\nabla_2 \in$ HT, basta dimostrare che in essa valgono (5) e (6) per $x \in \mathscr{H}/\nabla_2$. Ci limitiamo a dimostrare $KI(x) \leqslant I(x)$ o equivalentemente $KI(x) \Rightarrow I(x) = 1$. Basta dimostrare $KI(y) \Rightarrow I(y) \in \nabla_2$, per ogni $y \in H$, e ciò segue dalla definizione di ∇_2. La (6) si prova in modo analogo.

Ci chiediamo sotto quali condizioni gli I-filtri introdotti nel Lemma 4 costituiscano una famiglia separante di I-filtri.

Teorema 5. *Una condizione sufficiente perchè* $\nabla_1 \cap \nabla_2 = \{1\}$ *è che in* $\mathscr{H}$ *valgano*

$$I(x \cup -x) \cup (KI(y) \Rightarrow I(y)) = 1 , \tag{7}$$

$$I(x \cup -x) \cup (K(y) \Rightarrow IK(y)) = 1 . \tag{8}$$

Dim. Osserviamo che se $d \in D$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono generatori di ∇_2 si ha, tenendo presenti le equazioni (7) e (8) e la proprietà distributiva, $I(d) \cup (\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i) = 1$; da cui segue che se $x \in \nabla_1 \cap \nabla_2$, allora $x = 1$.

Teorema 6. *In* BT + HM *valgono le equazioni* (7) *e* (8).

Dim. Basta osservare che (7) e (8) valgono in BT e in HM.

Teorema 7. *Sia* $\mathscr{H}$ *una* AHT *che soddisfa le equazioni* (7) *e* (8). *Allora* $\mathscr{H} \in$ BT + HM.

Dim. L'asserto segue dal Teorema 5, Teorema B e Lemma 4.

Osservazione. Dal Teorema B e Teorema 6 segue che la condizione del Teorema 5 oltre che sufficiente è anche necessaria.

Teorema 8. *Le equazioni* (7) *e* (8) *sono indipendenti e definiscono* BT + HM *come sottovarietà di* HT.

Dim. Per dimostrare che (7) e (8) sono indipendenti, basta considerare una catena con la topologia I-discreta e K-condensata: in essa vale (8) mentre non vale (7), e considerare una catena con la topologia K-discreta e I-condensata: in essa vale (7) e non vale (8).

Sia Σ l'insieme delle equazioni costituito da (7), (8) e dalle equazioni che definiscono HT; sia V la varietà definita da Σ. Dal Teorema 6 segue BT + HM $\subseteq V$; dal Teorema 7 segue V $\subseteq$ BT + HM, quindi V = BT + HM.

Bibliografia

[1] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive lattices*, University of Missouri Press 1974.

[2] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper & Row, New York 1965.

[3] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distributive,* Math. Scand. **21** (1967), 110-121.

[4] C. Luppi: [•]$_1$ *Algebre di Heyting topologiche,* Le Matematiche **32** (1977), 5-22; [•]$_2$ *Sul problema della rappresentabilità per le* AHT, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 91-106.

[5] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics,* Warsaw 1963.

Summary

In this note we compare the varieties HT *and* BT+HM, *and we show that* BT+HM *is a subvariety of* HT *which is definable with two indipendent equations.*

* * *