Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 47-57

MAURO SASSETTI (*)

Sulla caratterizzazione dei dati non omogenei in elastodinamica lineare (**)

Introduzione

In questo lavoro ci proponiamo di studiare il problema dell'elastodinamica lineare che descrive il moto di un corpo elastico sotto assegnati carichi, variabili nel tempo, e con assegnate condizioni al contorno ed iniziali.

Il problema, molto classico, solo recentemente ha trovato una soddisfacente sistemazione dal punto di vista della teoria esistenziale (cfr. Duvaut-Lions [**1**]).

Tuttavia, è ancora di interesse teorico e applicativo la ricerca delle condizioni di regolarità sui dati non omogenei del problema atte a garantire certe proprietà di regolarità delle soluzioni deboli; il grado di regolarità dei dati influisce non solo sulla regolarità delle soluzioni ma anche sul modo di dimostrare il teorema di esistenza. A ciò si aggiunge il fatto che è possibile definire in modo sistematico le condizioni di compatibilità tra dati iniziali e dati al contorno, condizioni necessarie a garantire l'esistenza di soluzioni.

Di questo lavoro è uscito un pre-print [**3**], a cui rimandiamo per le dimostrazioni; nella versione che qui si pubblica vengono ripresi e commentati i principali risultati.

1 - Formulazione classica del problema

Nella teoria lineare dell'elasticità il tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ e il tensore della deformazione linearizzato $\varepsilon(\boldsymbol{u})$, dove $\boldsymbol{u}$ indica il vettore degli spostamenti, sono

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica «L. Tonelli», Università, via F. Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 13-II-1981.

legati dalla legge

$$T_{ij} = a_{ijrs}\, \varepsilon_{rs}(\boldsymbol{u}) \, .$$

Gli a_{ijrs} sono i coefficienti di elasticità costanti e dotati delle seguenti proprietà di simmetria

$$a_{ijrs} = a_{rsij} = a_{jirs}$$

e di ellitticità

$$a_{ijrs}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{rs} \geqslant \alpha \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} \qquad \alpha = \text{cost} > 0 \quad \forall \varepsilon_{ij} \, .$$

(Qui, come nel seguito, conveniamo di intendere sommato da 1 a 3 l'indice ripetuto).

Consideriamo il problema di evoluzione nella teoria lineare dell'elasticità. Sia $\Omega \subset R^3$ un aperto limitato di frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, diciamo pure di classe C^∞. La formulazione classica del problema è

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{u}'' = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{f} \\ &T_{ij} = a_{ijrs}\, \varepsilon_{rs}(\boldsymbol{u}) \, , \end{aligned} \qquad \text{in } \mathscr{C} = \Omega \times (0, T)$$

dove $\boldsymbol{u}(t)$ indica la funzione $x \to \boldsymbol{u}(x, t)$, $\boldsymbol{u}''(t)$ è la derivata parziale $\partial^2 \boldsymbol{u}(t)/\partial t^2$, il vettore $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t)$ rappresenta la forza di massa, e $(0, T)$ è un intervallo finito di tempo. Sia Γ una porzione di $\partial\Omega$, che non escludiamo ridotta all'insieme vuoto $\emptyset$ oppure estesa a tutto $\partial\Omega$; supporremo, però, Γ di misura 2-dimensionale positiva se $\Gamma \neq \emptyset$. Ci limiteremo inoltre a considerare Γ non variabile nel tempo. Ciò posto, supporremo assegnati su Γ gli spostamenti e su $C\Gamma = \partial\Omega - \Gamma$ le tensioni

$$\text{(1.2)} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} \quad \text{su } \Gamma \, , \qquad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} \quad \text{su } C\Gamma \, ,$$

dove $\boldsymbol{U}$ indica un campo vettoriale su Γ con possibilità di dipendenza dal tempo, e $\boldsymbol{F}$ indica una densità superficiale di forze su $C\Gamma$, che può anche essa dipendere dal tempo. Aggiungiamo le condizioni all'istante iniziale

$$\text{(1.3)} \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \, , \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1 \qquad \text{in } \Omega \, .$$

2 - Formulazione debole

Del problema (1.1) con le condizioni (1.2), (1.3) si può dare, come è noto, una formulazione debole. Introduciamo a tale scopo alcune notazioni.

Se X è un insieme, X^3 indica il prodotto cartesiano di tre copie dell'insieme X. $H^m(\Omega)^3$ è lo spazio completamento di $C^m(\bar{\Omega})^3$ rispetto alla norma hilbertiana

$$\|w\|_m = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega \|D^\alpha w(x)\|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Data una funzione $w \in H^1(\Omega)^3$, indichiamo con $\gamma_0 w$ la traccia di w su $\partial\Omega$, generalizzazione della traccia su $\partial\Omega$ per funzioni $C^1(\bar{\Omega})^3$. Se $w \in H^1(\Omega)^3$, la traccia $\gamma_0 w$ sta in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$. Per questo risultato e per la definizione degli spazi $H^s(\Omega)$, $H^s(\partial\Omega)$ e $H^s(0, T; X)$ con $s \in R$ e con X spazio di Hilbert «non contenente i tempi», rimandiamo a Lions-Magenes [**2**]$_1$. Poniamo infine $H = L^2(\Omega)^3 = H^0(\Omega)^3$, $H^1 = H^1(\Omega)^3$, $H^2 = H^2(\Omega)^3$. Consideriamo ora lo spazio

$$V \equiv H^1_\Gamma(\Omega)^3 = \{v \in H^1 \colon \gamma_0 v = 0 \ \text{ su } \Gamma\}$$

e osserviamo che $V \subset H$, V denso in H con immersione continua, anzi compatta non appena $\partial\Omega$ ha un minimo di regolarità. Identificando H al suo duale, si ha $H \subset V'$, essendo V' lo spazio duale (forte) di V, e l'immersione è continua. Indichiamo con $(\, , \,)$ sia il prodotto scalare consueto in H che la dualità tra V e V' compatibile con tale prodotto scalare.

La forma bilineare

$$a(u, v) = \int_\Omega a_{ijrs}\, \varepsilon_{rs}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

continua su V, è simmetrica, cioè

$$a(u, v) = a(v, u) \qquad \forall u, v \in V, \tag{2.2}$$

e, supponendo verificata la maggiorazione di Korn, coerciva su V, cioè

$$a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geqslant \alpha \|v\|_1^2 \qquad \forall v \in V\,, \tag{2.3}$$

con $\alpha > 0$ e $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda > 0$ solo nel caso $\Gamma = \emptyset$; negli altri casi è $\lambda = 0$) (cfr. [**1**]).

La formula di Green fornisce

$$a(u, v) = \int_\Omega Eu \cdot v \, \mathrm{d}x + \int_{\sigma\Gamma} Lu \cdot v \, \mathrm{d}\Gamma \qquad \forall u \in H^2\,, \ \forall v \in V\,, \tag{2.4}$$

dove E è l'operatore definito da $Eu = -\operatorname{div} \boldsymbol{T}$ ed L è l'operatore frontiera definito da

$$Lu = \boldsymbol{Tn} .$$

Per ogni funzione

$$v \in C^\infty(\bar{\Omega})^3 \colon v = U \quad \text{su} \quad \Gamma , \tag{2.5}$$

moltiplichiamo scalarmente ambo i membri dell'equazione $Eu + u'' = f$ per $v - u(t)$. Si ottiene in tal modo

$$\big(Eu(t), v - u(t)\big) + \big(u''(t), v - u(t)\big) = \big(f(t), v - u(t)\big) . \tag{2.6}$$

Integrando per parti e poichè $v = u$ su Γ, si ottiene

$$\big(Eu(t), v - (t)\big) = \big(a(u(t), v - u(t)\big) - \int_{c\Gamma} F(t)\big(v - u(t)\big)\, d\Gamma .$$

Dunque, dalla (2.6) si ricava

$$\begin{aligned} \big(u''(t), v - u(t)\big) + a\big(u(t), v - u(t)\big) \\ = \big(f(t), v - u(t)\big) + \int_{c\Gamma} F(t)\cdot\big(v - u(t)\big)\, d\Gamma , \end{aligned} \tag{2.7}$$

per ogni funzione v verificante la (2.5); anzi, per chiusura, la (2.7) varrà per ogni funzione

$$v \in \mathscr{V} = \{w \in H^1 \colon \gamma_0 w = U \text{ su } \Gamma\} . \tag{2.8}$$

Introdotta una funzione

$$\Phi(t) \in \mathscr{V} , \tag{2.9}$$

con una facile sostituzione si vede che il problema assume la seguente formulazione debole: trovare una funzione $t \to u(t) \in V$ tale che

$$\big(u''(t), v\big) + a\big(u(t), v\big) = \big(\psi(t), v\big) \qquad \forall v \in V , \tag{2.10}$$

con le condizioni iniziali $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$, avendo posto

$$\big(\psi(t), v\big) = \big(f(t), v\big) + \int_{c\Gamma} F(t) v\, d\Gamma - \big(\Phi''(t), v\big) - a(\Phi(t), v) . \tag{2.11}$$

Osservazione 2.1. Naturalmente le eventuali soluzioni del problema (2.10) non risolvono il problema da cui siamo partiti nel senso classico. Se però una soluzione debole è sufficientemente regolare, allora, rimontando i conti fatti, si trova che essa risolve il problema originario. Osserviamo che, poichè la forma bilineare $a(u, v)$ è continua su V, le possiamo associare un operatore $\bar{E} \in \mathscr{L}(V, V')$, cioè un operatore $V \to V'$ lineare e continuo, definito da $a(u, v) = (\bar{E}u, v)$ $\forall u, v \in V$.

D'altra parte, è ben nota dalla teoria variazionale la possibilità di associare allo spazio V e alla forma $a(u, v)$ uno spazio $N \subset V$ e un operatore $\bar{\bar{E}}: N \to H$ tali che N è denso in H (ed anche in V), $\bar{\bar{E}}$ è chiuso.

$\bar{\bar{E}} \in \mathscr{L}(N, H)$ se su N si definisce la topologia indotta dalla norma del grafico (più fine di quella indotta da V), e vale inoltre la relazione $a(u, v) = (\bar{\bar{E}}u, v)$ $\forall u \in N$ $\forall v \in V$.

È ovvio che su N gli operatori $E, \bar{E}, \bar{\bar{E}}$ coincidono e si possono identificare con E; naturalmente, quando la classe su cui definiamo l'operatore è più o meno regolare, sappiamo precisare la natura dell'operatore stesso.

Ci proponiamo quindi di studiare il problema

$$(2.12) \qquad Eu + u'' = \psi \quad \text{su } \mathscr{C}, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad \text{in } \Omega .$$

Nel considerare soluzioni deboli, l'operatore che interviene è l'operatore $\bar{E}$. Viceversa, introducendo le soluzioni «forti», risolveremo il problema per l'operatore $\bar{\bar{E}}$: le soluzioni così ottenute risolvono il problema iniziale nel senso di una uguaglianza tra $Eu + u''$ e ψ in quasi tutti i punti di $\mathscr{C}$. Inoltre le condizioni al bordo sono contenute in parte nell'appartenenza a V, in parte nella formula di Green: se però la soluzione u è sufficientemente regolare e se pure $\partial\Omega$ è tale, allora le condizioni al bordo da formali diventano quelle consuete.

Osservazione 2.2. Per dare significato alla (2.8), cioè perchè definisca un insieme non vuoto, occorrerà supporre $U \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. Supporremo inoltre $F \in L^2(C\Gamma)^3$, in modo che l'applicazione $v \to \int_{C\Gamma} F(t) \cdot v \, d\Gamma$ abbia senso e sia continua su V.

3 - Primi risultati esistenziali

Un primo risultato di esistenza e unicità di soluzione è dato dal

Teorema 3.1. *Sotto le ipotesi fatte e se ψ, u_0, u_1 sono tali che*

$$(3.1) \qquad \psi \in L^2(0, T; H) = L^2(\mathscr{C})^3 , \qquad\qquad (3.2) \qquad u_0 \in V , \quad u_1 \in H ,$$

allora il problema (2.10), *con la posizione* (2.11), *ammette una ed una soluzione* $u(t)$ *dipendente con continuità dai dati con*

(3.3) $u \in L^\infty(0, T; V)$, (3.4) $u' \in L^\infty(0, T; H)$;

Osservazione 3.1. Poichè $E \in \mathscr{L}(V, V')$, da $u \in L^\infty(0, T; V)$ segue $Eu \in L^\infty(0, T; V')$ e quindi $u'' = \psi - Eu \in L^2(0, T; V')$. Ma allora $u \in C^0([0, T]; H)$ e $u' \in C^0([0, T]; V')$, e quindi hanno senso $u(0)$ e $u'(0)$.

Dim. del Teorema 3.1. La dimostrazione del teorema è classica e può essere trovata in [**2**]$_1$; essa viene effettuata in due passi successivi: nella prima parte si stabilisce una maggiorazione a priori per l'energia, nella seconda si applica questa maggiorazione per ottenere con il metodo di Faedo-Galerkin una soluzione, che dipende con continuità dai dati. L'unicità della soluzione viene provata a parte.

Un risultato più forte di quello indicato nell'Osservazione 3.1 è contenuto nel seguente teorema.

Teorema 3.2. *Sotto le ipotesi del Teorema* 3.1, *la soluzione* u *del problema è tale che* $u \in C^0([0, T]; V)$, $u' \in C^0([0, T]; H)$, *e l'applicazione* $\{\psi, u_0, u_1\} \to \{u, u'\}$ *è continua da* $L^2(0, T; H) \times V \times H$ *in* $C^0([0, T]; V) \times C^0([0, T]; H)$.

Per una dimostrazione completa di questo teorema rimandiamo ancora a [**2**]$_1$.

Il problema è dunque ricondotto a trovare sui dati f, U e F condizioni di regolarità sufficienti a garantire che risulti $\psi \in L^2(\mathscr{C})^3$.

Si vede subito che, nel caso di problema con dati al bordo omogenei, si ottiene la condizione

(3.5) $$f \in L^2(\mathscr{C})^3 .$$

Quando i dati sono non omogenei, non è possibile trovare condizioni di questa natura. Infatti, se è presente il termine di Neumann, non si può trovare una condizione di regolarità su F che garantisca la continuità di $v \to \int_{C\Gamma} F(t) \cdot v \, d\Gamma$ su V con la topologia indotta da H. Nel caso in cui sia non nullo il dato di Dirichlet, l'ipotesi da fare su U sarebbe quella di avere una sufficiente regolarità, in modo da garantire l'esistenza di una $\Phi(t) \in H^2$ con $L\Phi = 0$ su $C\Gamma$; il che, ad esempio, comporta che debba essere $U(t) \in H^{3/2}(\Gamma)^3$.

Per risolvere questa difficoltà, o nel secondo caso per trovare ipotesi meno forti sui dati, possiamo ricorrere al teorema che dimostreremo nel paragrafo successivo. Questo prova l'esistenza e unicità di soluzione del problema assegnato quando sia $\psi \in L^2(0, T; V')$. Ciò stabilito, è facile trovare le condizioni sui dati che implichino tale ipotesi. Ferma restando la (3.5), supporremo

$$F \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)^3) = L^2(\Sigma)^3 , \tag{3.6}$$

indicando con Σ la superficie laterale del cilindro $\mathscr{C}$: $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Inoltre

(3.7) U è restrizione a $\Gamma \times (0, T)$ di una $\tilde{U}$ tale che $\tilde{U}, \tilde{U}'' \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3)$.

Sotto l'ipotesi (3.3) si può infatti scegliere $\Phi \in L^2(0, T; H^1)$ con $\Phi'' \in L^2(0, T; H^1)$.

La verifica che sotto queste ipotesi è $\psi \in L^2(0, T; V')$ è ovvia, infatti

$$|(\psi(t), v)| \leqslant c\{\|f(t)\|_0 \|v\|_0 + \|F(t)\|_{L^2(\partial\Omega)^3} \|v\|_1 + \|\Phi''(t)\|_0 \|v\|_0 + \|\Phi(t)\|_1 \|v\|_1\} ,$$

e quindi

$$\|\psi(t)\|_{V'} \leqslant c\{\|f(t)\|_0 + \|F(t)\|_{L^2(\partial\Omega)^3} + \|\Phi''(t)\|_0 + \|\Phi(t)\|_1\} ,$$

da cui l'asserto.

4 - Un teorema di esistenza

Un modo di risolvere il problema sopra esposto può essere quello proposto da Duvaut-Lions [**1**], che consiste in un adattamento della dimostrazione del Teorema 3.1 sotto però l'ipotesi $\psi, \psi' \in L^2(0, T; V')$. Per ottenere lo stesso risultato, ma sotto l'ipotesi più debole $\psi \in L^2(0, T, V')$, ci ricolleghiamo al metodo di trasposizione (cfr. Lions-Magenes [**2**]$_{\rm I}$).

Vale il seguente teorema.

Teorema 4.1. *Se $\psi \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in H$, $u_1 \in V'$, allora il problema* (2.12) *ammette una ed una sola soluzione u tale che $u \in L^2(0, T; H)$, $u' \in L^2(0, T; V')$, $u'' \in L^2(0, T; N')$; la soluzione dipende con continuità dai dati.*

Osservazione 4.1. Si può dimostrare (cfr. [**2**]$_{\rm I}$) un risultato analogo a quello del Teorema 3.2: sotto le ipotesi del Teorema 4.1 la soluzione u del problema è tale che $u \in C^0([0, T]; H)$, $u' \in C^0([0, T]; V')$; inoltre l'applicazione $\{\psi, u_0, u_1\} \to \{u, u'\}$ è continua da $L^2(0, T; V') \times H \times V'$ a $C^0([0, T]; H) \times C^0([0, T]; V')$.

Osservazione 4.2. Nel caso del problema di Neumann ($\Gamma = \emptyset$), i due teoremi 3.1 e 4.1 forniscono un risultato esistenziale senza stabilire alcuna distinzione tra il caso in cui le forze $f(t)$ e $F(t)$ costituiscano ad ogni istante un sistema equilibrato e il caso in cui questo non è verificato, a differenza di quanto avviene in elastostatica ove la condizione è necessaria per stabilire l'esistenza di una soluzione. Ricordiamo che questa condizione si può scrivere nella forma

$$(4.1)\qquad \big(f(t), p\big) + \int_{\partial\Omega} F(t)\cdot p\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad \forall p \in P\,,\ \forall t \in (0, T)\,,$$

avendo indicato con P lo spazio degli spostamenti rigidi: $P = \{p(x): p(x) = a + b\times x;\ a, b \in R^3\}$.
Vogliamo adesso vedere come si possono interpretare i risultati esistenziali nei due casi, a seconda, cioè se valga o meno la (4.1).

I *caso.* Supponiamo i dati iniziali abbastanza regolari, diciamo $u_0, u_1 \in H^1 = V$. Allora è possibile precisare la struttura della soluzione nel modo seguente

$$(4.2)\qquad u(t) = u_0 + tu_1 + w(t)\,,$$

con $w(t) \in {}^{\perp}P$ $\forall t$ (${}^{\perp}P$ = ortogonale di P in H).

Infatti, imponendo a (4.2) di essere soluzione, si ottiene

$$a\big(u_0 + tu_1 + w(t), v\big) + \big(w''(t), v\big) = \big(f(t), v\big) + \int_{\partial\Omega} F(t)\cdot v\,\mathrm{d}\Gamma \qquad \forall v \in V\,.$$

In particolare, dunque, poichè $a\big(u(t), p\big) = 0$ $\forall p \in P$, $\big(w''(t), p\big) = 0$ $\forall p \in P$, che, unita a $w(0) = w'(0) = 0$, dà l'asserto.

II *caso.* In questa situazione le forze applicate conferiscono al corpo elastico un moto rigido cui si sovrappongono delle deformazioni elastiche. Il moto risultante rende non più legittima la linearizzazione delle equazioni. Dunque, da un punto di vista matematico i risultati esistenziali sono corretti: quello che non è più corretto è il modello matematico da cui siamo partiti. Si dovrebbe per prima cosa determinare il moto rigido del solido. Ciò stabilito, in un riferimento legato al moto così determinato si può trattare il problema delle deformazioni elastiche, essendo allora legittima la linearizzazione; naturalmente alle forze $f(t)$ e $F(t)$ bisognerà aggiungere il sistema $\mathscr{F}$ costituito dalle forze di trascinamento e da quelle complementari: l'insieme delle forze $f(t), F(t), \mathscr{F}(t)$ costituisce ad ogni istante un sistema equilibrato.

5 - Soluzioni forti

Vogliamo adesso fornire delle condizioni sui dati perchè la soluzione trovata sia soluzione forte del problema, cioè $u \in L^2(0, T; H^2)$, $u'' \in L^2(\mathscr{C})^3$. Esamineremo la questione nel caso di problema di Dirichlet o di Neumann; nel caso di problema misto, lo studio del caso statico fa escludere la possibilità di utilizzare il metodo di regolarizzazione hilbertiana per trovare una soluzione forte; quello che si ottiene è una regolarità locale nell'intorno dei punti interni di Γ e di $C\Gamma$ (interni rispetto a $\partial\Omega$, naturalmente).

Consideriamo il caso omogeneo nei dati al bordo; si ha il seguente risultato.

Teorema 5.1. *Se $f \in H^1(0, T; H)$, $u_0 \in N$ e $u_1 \in H^1$, allora la soluzione del problema di Dirichlet o del problema di Neumann omogenei (soluzione che sappiamo esistere unica) è soluzione forte e si ha ancora la dipendenza continua dai dati.*

Osservazione 5.1. Supponendo $\partial\Omega$ abbastanza regolare, diciamo di classe C^2, la condizione $u_0 \in N$ significa $u_0 \in H^2 \cap H_0^1$ nel caso del problema di Dirichlet e $u_0 \in H^2$ con $Lu_0 = 0$ nel caso del problema di Neumann.

Per quanto riguarda il caso non omogeneo nei dati al bordo, indichiamo con B l'operatore frontiera che interviene nel problema (B è l'operatore di Dirichlet o quello di Neumann) e con g il dato al bordo.

Se u_0, u_1, g sono assegnati in modo tale che esista una funzione w verificante

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &E\omega + w'' = \varphi \in H^1(0, T; H)\,, \\ &Bw = g \qquad \text{su } \Sigma\,, \qquad\qquad w(0) = u_0\,, \quad w'(0) = u_1 \qquad \text{in } \Omega; \end{aligned}$$

allora, ponendo $u - w = \mathscr{U}$, il problema non omogeneo dato è equivalente al problema omogeneo

$$E\mathscr{U} + \mathscr{U}'' = f - \varphi\,, \qquad B\mathscr{U} = 0 \quad \text{su } \Sigma\,, \qquad \mathscr{U}(0) = \mathscr{U}'(0) = 0 \quad \text{in } \Omega;$$

in tal modo ci riconduciamo alla situazione studiata dal Teorema 5.1.

Per quanto riguarda le ipotesi sui dati che assicurino la risolubilità del problema (5.1), rimandiamo a [**2**]$_2$. È interessante notare che accanto a condizioni di regolarità (che non sono le migliori possibili) si troveranno anche delle relazioni di compatibilità tra i dati.

Come condizioni di regolarità imponiamo le seguenti

$$g \in H^1(0, T; H^{3/2}(\partial\Omega)^3) \cap H^{5/2}(0, T; L^2(\partial\Omega)^3) \quad \text{se B è l'operatore di Dirichlet;}$$

$$g \in H^1(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^3) \cap H^{3/2}(0, T; L^2(\partial\Omega)^3) \quad \text{se B è l'operatore di Neumann;}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega)^3; \qquad u_1 \in H^{3/2}(\Omega)^3 .$$

Otteniamo poi dalle relazioni di compatibilità (locali)

$$\left.\begin{aligned} Bu_0(x') &= g(x', 0) \qquad x' \in \partial\Omega \\ Bu_1(x') &= g'(x', 0) \qquad x' \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \text{se } B \text{ è l'operatore di Dirichlet;}$$

$$Bu_0(x') = g(x', 0) \qquad x' \in \partial\Omega \text{ se B è l'operatore di Neumann} .$$

L'interpretazione e la giustificazione di queste relazioni sono immediate.

Lo studio del problema in spazi deboli porta ad aggiungere a queste relazioni di compatibilità altre relazioni di natura non più locale come le precedenti, ma globale.

Osservazione 5.2. Tutti i risultati fin qui ottenuti sfruttano l'ipotesi che i coefficienti elastici a_{ijrs} si riferiscano ad un corpo elastico omogeneo, siano cioè delle costanti (oltre, naturalmente, all'ipotesi di simmetria e di ellitticità).

Una prima generalizzazione immediata ci porta a considerare il caso di corpo elastico non omogeneo, per il quale i coefficienti a_{ijrs} sono funzioni della x. I teoremi di esistenza per soluzioni deboli si adattano senza difficoltà supponendo $a_{ijrs} \in L^\infty(\Omega)$. Per quanto riguarda il teorema di esistenza per soluzioni forti occorrerà fare qualche ipotesi di differenziabilità sui coefficienti, diciamo $a_{ijrs}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.

Una ulteriore generalizzazione riguarda la possibilità di far dipendere i coefficienti anche dal tempo: $a_{ijrs} = a_{ijrs}(x, t)$. Si ottiene allora una famiglia di forme bilineari

$$a(t; u, v) = \int_\Omega a_{ijrs}(x, t)\, \varepsilon_{rs}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx$$

continue su V. Fatte le ipotesi di simmetria e di coercività su V uniforme rispetto al tempo, i teoremi di esistenza per soluzioni deboli si estendono supponendo la funzione $t \to a(t; u, v)$ di classe $C^1[0, T]$ $\forall u, v \in V$; l'unicità si dimostra come in **[2]**$_1$, nel Teorema 3.1. Per quanto riguarda il Teorema 4.1 e il Teorema 5.1, l'ipotesi da fare è che la funzione $t \to a(t; u, v)$ sia di classe $C^2[0, T]$ $\forall u, v \in V$.

Bibliografia

[1] G. Duvaut et J. L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris 1972.

[2] J. L. Lions et E. Magenes: $[\cdot]_1$ *Problèmes aux limites non homogènes et applications* (I), Dunod, Paris 1968; $[\cdot]_2$ *Problèmes aux limites non homogènes et applications* (II), Dunod, Paris 1968.

[3] M. Sassetti, *Sulla caratterizzazione dei dati non omogenei in elastodinamica lineare*, pre-print dell'Istituto Matematico «L. Tonelli», Università, Pisa 1981.

* * *