Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 9-13

MARIA CORINNA MARINO e LUIGIA PUCCIO (*)

Sul parametro $\Delta_s(G)$ di un grafo planare (**)

1 - Introduzione

La definizione di *colorazione di specie superiore* d'un grafo $G = (V, S)$ è stata introdotta da F. Speranza, [**5**]$_1$. In una tale *colorazione* L_s la minima distanza tra vertici di uguale colore è $s+1$. In modo ovvio si definisce il *numero s-cromatico* γ_s di G.

Successivamente S. Antonucci [**1**] e M. Gionfriddo [**3**]$_{1,2,3}$ si sono occupati di problemi relativi a queste colorazioni. In [**3**]$_1$ indicata con d_s la *s-densità* d'un grafo G (cioè la densità di G^s) e posto $\Delta_s = \gamma_s - d_s$ (è sempre $\Delta_s \geqslant 0$) si dimostra che

$$(1) \qquad \forall s \geqslant 3 \quad \forall h \in N \quad \exists G \textit{ planare tale che } \Delta_s(G) \geqslant \left[\frac{[(s-1)/2]^* (h+1)}{2}\right]^*,$$

ove $[r]^*$, per r reale, indica il minimo intero non minore di r, mentre $[r]$ indicherà il massimo intero non maggiore di r. In [**3**]$_3$ si dimostra che

$$(2) \qquad \forall h \in N \quad \exists G_h \textit{ tale che } \quad \Delta_2(G_h) = h .$$

Per $h \geqslant 3$, i grafi G_h che figurano nella (2) non sono planari. Inoltre, dalla (1) e dalla (2) segue che

$$(3) \qquad \sup_{s \geqslant 2} \Delta_s(G) = +\infty, \qquad\qquad (3)' \qquad \sup_{s \geqslant 3,\, G \in \mathcal{P}} \Delta_s(G) = +\infty,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.
(**) M.C. Marino ha eseguito il lavoro nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.); L. Puccio ha eseguito il lavoro nell'ambito del G.N.I.M.(C.N.R.). — Ricevuto: 22-XII-1980.

dove $\mathscr{P}$ indica la classe dei grafi planari. In $[\mathbf{3}]_3$ si segnala il problema della determinazione del sup $\Delta_2(G)$ per G planare, problema di particolare interesse se si confrontano i risultati ottenuti in $[\mathbf{3}]_1$ per $s \geqslant 3$ (cfr. la (1)) con quelli ben noti per $s = 1$.

In questo lavoro, dopo aver dato una generalizzazione di un teorema ottenuto da M. Gionfriddo in $[\mathbf{3}]_2$, ed utile per il seguito, si dimostra che per ogni $h \in N$ esiste almeno un grafo planare G con $\Delta_2(G) = h$, e quindi

$$\sup_{G \in \mathscr{P}} \Delta_2(G) = +\infty . \tag{4}$$

Per il caso $s = 2$ si hanno, dunque, risultati analoghi a quelli ottenuti in $[\mathbf{3}]_1$ per $s \geqslant 3$ e non a quelli che si hanno per $s = 1$.

Nel seguito, dato un grafo non orientato $G = (V, S)$ s'indicherà con G^s il grafo tale che $V(G^s) = V(G)$, $\{x, y\} \in S(G^s)$ se e solo se $d(x, y) \leqslant s$ in G. Inoltre, se $x \in V$ sarà $T_s(x) = \{v \in V : d(x, v) \geqslant s + 1\}$.

2 - Un risultato sulle colorazioni L_s

Sia $G = (V, S)$ un *grafo non orientato, finito* e C un insieme qualsiasi i cui elementi saranno detti *colori*. Se K è un'applicazione di V in C, si dirà che K è una *colorazione* L_s *di* G se

$$\forall (x, y) \in V^2 \qquad x \neq y \,, \quad K(x) = K(y) \Rightarrow d(x, y) \geqslant s + 1 \,.$$

Se in ogni componente connessa di G non vi sono vertici di ugual colore, si dirà che K è una colorazione L_∞ di G. Si supporrà, tuttavia, che i grafi considerati nel seguito siano tutti *connessi*, poichè ciò non lede la generalità dei risultati ottenuti. Il *numero s-cromatico di* G sarà il minimo numero γ_s di colori necessario per poter definire in G una colorazione L_s. Sarà, inoltre, $d_s = \text{Max}\,\{|X| : X \subseteq V, \operatorname{diam} X \leqslant s\}$; d_s si dirà la *s-densità* di G.

Sia $\mathscr{F}_s = \{X : X \subseteq V, \operatorname{diam} X \leqslant s\}$. Si ha il seguente

Teorema 2.1. *Sia* $G = (V, S)$ *un grafo nel quale esiste una partizione* $\boldsymbol{P} = \{X_1, X_2, X_3\}$ *di* V *tale che*

(i) $X_1, X_2 \in \mathscr{F}_s$ *e* $\operatorname{diam}_G X_3 \leqslant s$ (¹);

(ii) $|X_1| = |X_2| = d_s$;

(iii) $\forall (u, v) \in X_3^2 \;\; T_s(u) \cap X_i = T_s(v) \cap X_i \neq \emptyset$ *con* $i = 1, 2$;

(iv) $\forall u \in X_3$ diam $\big(T_s(u) \cap (X_1 \cup X_2)\big) \leqslant s$.

(¹) $\operatorname{diam}_G X$ rappresenta la massima distanza tra i vertici di X nel grafo G.

Si ha

$$\Delta_s(G) \geqslant [\frac{|X_3|+1}{2}].$$

Dim. Sia K una colorazione L_s di G. Osserviamo, intanto, che per il Teor. 3.1 di [**3**]$_2$ si ha $\Delta_s(G) \geqslant 1$.

Dimostriamo, dapprima, che se $W = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una qualsiasi terna di vertici distinti di V non si ha in alcun caso $K(v_1) = K(v_2) = K(v_3)$. In altre parole, se $C(\alpha) = \{x \in V : K(x) = \alpha\}$ allora per ogni $\alpha \in K(V)$ si ha $|C(\alpha)| \leqslant 2$. Infatti, per la (i), la tesi è immediata se è verificata una delle condizioni $|W \cap X_i| \geqslant 2$ per $i = 1, 2, 3$.

Sia, dunque, $|W \cap X_i| = 1$. Più precisamente sia, per fissare le idee, $v_i \in X_i$ per $i = 1, 2, 3$.

Se $v_1 \in X_1 - T_s(v_3)$ [risp. $v_2 \in X_2 - T_s(v_3)$] allora $d(v_1, v_3) \leqslant s$ [risp. $d(v_2, v_3) \leqslant s$] e quindi $K(v_1) \neq K(v_3)$ [risp. $K(v_2) \neq K(v_3)$]. Necessariamente è, dunque, $v_1 \in X_1 \cap T_s(v_3)$ e $v_2 \in X_2 \cap T_s(v_3)$. In tal caso è però $d(v_1, v_2) \leqslant s$, da cui $K(v_1) \neq K(v_2)$. Per cui si ha $|C(\alpha)| \leqslant 2$ per ogni $\alpha \in K(V)$. Segue allora $\gamma_s \geqslant [(|V|+1)/2]$.

Inoltre, poichè $\Delta_s = \gamma_s - d_s$ e $|V| = 2d_s + |X_3|$, si ha

$$\Delta_s \geqslant [\frac{|V|+1}{2}] - d_s = [d_s + \frac{|X_3|+1}{2}] - d_s = [\frac{|X_3|+1}{2}].$$

Da cui la tesi.

3 - Determinazione del parametro Δ_s per grafi planari

Dimostriamo il seguente

Teorema 3.1. *Esiste una successione di grafi planari $\{G_h\}_{h \in N}$ tali che $\Delta_s(G_h)_h = h$, per ogni $h \in \boldsymbol{N}$ e per ogni $s \geqslant 2$.*

Dim. Siano $h \in \boldsymbol{N}$, $s \geqslant 2$, qualsiasi. Sia $G_h = (V, S)$ il grafo *planare* così definito: posto $k = 2h - 1$ siano

$$V = \bigcup_{i=1}^{2s+1} A_i \cup B,$$

dove: $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,k-1}\}$ per $i = 1, 2, \ldots, 2s$, $i \neq s+1$; $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$ per $i = s+1, 2s+1$; $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{2s+1}\}$ ed $S = \bigcup_{i=1}^{2s} (A_i \times \{b_i, b_{i+1}\}) \cup (A_{2s+1} \times \{b_1, b_{2s+1}\}) \cup \{(b_i, b_{i+1}),\ i = 1, \ldots, 2s;\ i \neq s+1\}$.

$P\{X, Y, Z\}$ costituisce una partizione di V verificante le ipotesi del Teorema 2.1 se

$$X = \{b_1, b_2, \ldots, b_{s+1}\} \cup (\bigcup_{i=1}^{s} A_i), \quad Y = \{b_{s+2}, \ldots, b_{2s+1}\} \cup (\bigcup_{i=s+1}^{2s} A_i), \quad Z = A_{2s+1}.$$

Si ha infatti

(i) $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y = d(b_1, b_{s+1}) = d(a_{s+1,1}, b_{2s+1}) = s$, $\operatorname{diam}_G Z = 2 \leqslant s$,

(iii) $\forall z \in Z \quad T_s(z) \cap X = \{b_{s+1}\} \cup A_s$, $T_s(z) \cap Y = A_{s+1}$,

(iv) $\operatorname{diam}(A_s \cup A_{s+1} \cup \{b_{s+1}\}) = 2 \leqslant s$.

Osservato che $|X| = |Y| = sk + 1$, dimostriamo la (ii), ossia che $d_s = sk+1$. Sia $W \in \mathscr{F}_s$ (ovviamente $W \neq \emptyset$). Se $J = Z$ [risp. $J = A_{s+1}$], proviamo che nel caso $J \cap W \neq \emptyset$ si ha $|W| \leqslant sk + 1$. Se $W \cap X = W \cap Y = \emptyset$, la tesi è immediata. Sia, dunque $W \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$.

Se $\max\{d(J, x) : x \in X \cap W\} = m \geqslant 0$ $(m \leqslant s)$ (dove s'intende $m = 0$ per $X \cap W = \emptyset$), allora $\max\{d(J, y) : y \in Y \cap W\} = s - m$. Ne segue

$$\begin{aligned} |W| &\leqslant |\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i| + m + |J| + |\bigcup_{i=s+m+2}^{2s} A_i| + s - m \\ &= (m-1)(k-1) + m + k + (s-m-1)(k-1) + s - m \\ &= (sk+1) + 1 - k \leqslant sk + 1. \end{aligned}$$

A questo punto si perviene alla tesi osservando che se $W \cap Z = W \cap A_{s+1} = \emptyset$, e posto $W_1 = W \cup Z$, $W_2 = W \cup A_{s+1}$, necessariamente si ha $W_1 \in \mathscr{F}_s$ oppure $W_2 \in \mathscr{F}_s$. In conclusione, se $W_i \in \{W_1, W_2\} \cap \mathscr{F}_s$, allora $|W| \leqslant |W_i| \leqslant sk + 1$. Per cui risulta $d_s = sk + 1$.

Per il Teorema 2.1 si ha pertanto

$$\Delta_s > \frac{k+1}{2} = h.$$

Dimostriamo che esiste una colorazione L_s di G_h mediante $d_s + h$ colori distinti. Procediamo nel seguente modo:

(a) attribuiamo $sk + 1$ colori distinti ai vertici di X ed altri h ad h vertici di Z;

(b) ai rimanenti vertici Z assegnamo $h - 1$ dei colori già dati ai vertici di A_s;

(c) ai vertici di A_{s+1} associamo gli h colori assegnati ai vertici di Z in (a) ed $h-1$ dei colori assegnati ai vertici di A_1;

(d) per $j = 1, 2, \ldots, s-1$, assegnamo ai vertici di A_{2s-j+1} $h-1$ colori non ancora utilizzati tra quelli dati ai vertici di A_{s-j+1} e $h-1$ colori assegnati ai vertici di A_{s-j} (per $j = s-1$ s'intende che gli $h-1$ colori di A_1 sono quelli rimasti dopo aver effettuato la colorazione descritta in (c));

(e) per $i = 1, 2, \ldots, s$ assegnamo a b_{s+i+1} il colore attribuito a b_i.

Si ottiene così una colorazione L_s di G_h con $d_s + h$ colori e pertanto $\Delta_s(G_h) = h$.

Dal Teorema 3.1 segue che per G planare ed $s \geq 2$

$$\sup \Delta_s(G) = +\infty .$$

Si risolve così il problema 1 segnalato in [**3**]$_3$.

Osserviamo, inoltre, che i grafi descritti nel Teorema 3.1 sono tali che la successione dei valori del parametro $\Delta_s(G)$, per s fissato, coincide sempre con la successione dei numeri naturali. Ciò non accade, invece, per i grafi descritti in [**3**]$_1$; infatti già per $s = 6$ si ha che i valori di $\Delta_6(G)$ sono $3n$ e $3n+1$ per $n \in \boldsymbol{N}$.

Bibliografia

[**1**] S. Antonucci, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[**2**] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[**3**] M. Gionfriddo: [•]$_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454; [•]$_2$ *Su un problema relativo alle colorazioni L_2 d'un grafo planare e colorazioni L_s*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 151-160; [•]$_3$ *Sul parametro $\Delta_s(G)$ d'un grafo L_s-colorabile e problemi relativi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 1-7.

[**4**] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading 1960.

[**5**] F. Speranza: [•]$_1$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, suppl. fasc. 3 (1975), 53-62; [•]$_2$ *Sur les colorations des graphes orientés*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-A (1979), 517-522.

Summary

We prove that for every $s \geq 2$ and for every $h \in \boldsymbol{N}$ there exist planar graphs G such that $\Delta_s(G) = h$.

* * *