Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 501-508

SILVANA MARCHI (*)

Condizioni necessarie di equi-as-quasi periodicità (**)

Introduzione

In questa nota si danno due condizioni necessarie di equi-as-quasi periodicità [2] per una famiglia $\mathscr{F}$ di funzioni vettoriali (di variabile reale $t \in [0, +\infty)$). Precisamente in **1** si dimostra che le funzioni estremi, superiore ed inferiore, della famiglia $\mathscr{F}$ risultano as-quasi periodiche (Th. 1-2).

In **2** si dimostra che se la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da soluzioni di una equazione diff. vett. ord. del primo ordnie in forma normale, allora $\mathscr{F}$ risulta stabile (Th. 3).

In **3** si dà infine un esempio di una famiglia cui possono applicarsi le affermazioni ottenute.

1 – Considereremo una famiglia $\mathscr{F}$ di funzioni reali $f(t)$, definite e continue in $I = [0, +\infty)$.

Diremo che $\mathscr{F}$ gode della proprietà $\mathscr{P}$ quando, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste $l(\varepsilon) > 0$ e, per ogni $f(t)$ di $\mathscr{F}$ esiste $T(\varepsilon, f) \geqslant 0$, tali che, per ogni $a \in I$, l'intervallo $[a, a + l]$ contiene almeno un $\tau = \tau(\varepsilon, l, a)$ in corrispondenza al quale ogni funzione $f(t)$ di $\mathscr{F}$ soddisfa la relazione $|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \geqslant T(\varepsilon, f)$.

Si dimostra (cfr. [2], Oss. 3.1) che se è verificata tale condizione, allora la scelta di $T(\varepsilon, f)$ può farsi indipendentemente da f. Pertanto nel seguito, parlando della proprietà $\mathscr{P}$ supporremo sempre $T(\varepsilon, f) = T(\varepsilon)$.

Gli elementi di tale famiglia risultano funzioni as-quasi periodiche [3] onde, posto $f(t) = p(t) + q(t)$, con $p(t)$ quasi periodica e $q(t)$ infinitesima per

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università di Parma, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricevuto: 27-IX-1981.

$t \to +\infty$, indicheremo con P l'insieme delle funzioni $p(t)$ e $\mathscr{Q}$ l'insieme delle funzioni $q(t)$ ottenute da tale decomposizione al variare di $f(t)$ in $\mathscr{F}$.

Si dimostra in [**2**] che le funzioni $p(t)$ sono equi-quasi periodiche (1), mentre le funzioni $q(t)$ sono equi-infinitesime per $t \to +\infty$, come risulta se si procede come in [**1**], p. 27, tenendo conto di quanto sopra asserito.

Nel presente paragrafo intendiamo dimostrare quanto segue.

Teorema 1. *Se $\mathscr{F}$ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ e se per ogni $t \in I$ esiste finito* $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} f(t)$, *allora* $v(t) = \sup\limits_{f \in \mathscr{F}} f(t)$ *è as-quasi periodica.*

Teorema 2. *Se $\mathscr{F}$ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ e se per ogni $t \in I$ esiste finito* $\inf\limits_{f \in \mathscr{F}} f(t)$, *allora* $w(t) = \inf\limits_{f \in \mathscr{F}} f(t)$ *è as-quasi periodica.*

A tale scopo, fissata arbitrariamente una famiglia G di funzioni $g(t)$ reali, $t \in \boldsymbol{R}$, premettiamo le seguenti definizioni e i seguenti lemmi.

Def. 1. Per ogni funzione $g(t)$ di G, per ogni $\tau \in R$, definiamo $v_g(\tau) = \sup\limits_{t} |g(t+\tau) - g(t)|$.

Def. 2. Per ogni funzione $g(t)$ di G, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo $\mathscr{T}(g, \varepsilon) = \{\tau \in \boldsymbol{R} \,|\, v_g(\tau) < \varepsilon\}$.

Def. 3. Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo $\mathscr{T}(G, \varepsilon) = \bigcap\limits_{g \in G} \mathscr{T}(g, \varepsilon)$.

Def. 4. Per ogni $\tau \in \boldsymbol{R}$ definiamo $\bar{g}(\tau) = \sup\limits_{g \in G} v_g(\tau)$.

---

(1) Invero è (v. [**2**], 2.1-(A)) $\forall \varepsilon > 0\ \exists l_1(\varepsilon/4) > 0\ \forall a \in I\ \exists \tau_1(\varepsilon/4) \in [a, a+l]$ per cui $|p(t+\tau_1) - p(t)| < \varepsilon/4$ per ogni $p(t) \in P$, per ogni $t \geqslant 0$. Inoltre, fissata comunque $p(t) \in P$, in corrispondenza ad ε $\exists l_2(\varepsilon/4)$ $\forall a \in \boldsymbol{R}$ $\exists \tau(\varepsilon/4) \in [a, a+l]$ per cui $|p(t+\tau) - p(t)| < \varepsilon/4$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$, essendo $p(t)$ quasi periodica.

Sia ora $\sigma < 0$ e sia τ_2 il quasi periodo di $p(t)$ appartenente a $[-\sigma, -\sigma + l]$, $l = l_1 \vee l_2$, tale che $\sigma + \tau_2 > 0$.

Avremo allora $|p(\sigma + \tau_1) - p(\sigma)| < |p(\sigma + \tau_1) - p(\sigma + \tau_1 + \tau_2)| + |p(\sigma + \tau_1 + \tau_2) + p(\sigma + \tau_2)| + |p(\sigma + \tau_2) - p(\sigma)| < \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$.

Dunque $\forall \varepsilon > 0\ \exists l(\varepsilon) > 0\ \forall a \in I\ \exists \tau \in [a, a+l]$, tale che, per ogni $p(t) \in P$ $|p(t+\tau) - p(t)| < \varepsilon$, per ogni $t \in \boldsymbol{R}$.

Sia ora $a < 0$, τ un quasi periodo in $[-a-l, -a]$ e $\sigma \in R$ arbitrario, Posto $\bar{\tau} = -\tau$ sarà $\bar{\tau} \in [a, a+l]$ e, posto $\sigma = t + \tau$ sarà $t = \sigma + \bar{\tau}$.

Dunque $|p(\sigma) - p(\sigma + \bar{\tau})| < \varepsilon$ $\forall \sigma \in \boldsymbol{R}$, $\forall p(t) \in P$, e questa relazione prova l'equi-quasi periodicità delle funzioni di P.

Def. 5. Un sottoinsieme S di I (risp. $\boldsymbol{R}$) si dice *relativamente denso in* I (risp. $\boldsymbol{R}$) se esiste un numero positivo l tale che $[a, a+l] \cap S \neq \phi$ per ogni $a \in I$ (risp. $\boldsymbol{R}$).

Osserviamo che, in base alle definizioni precedenti la famiglia $\mathscr{F}$ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ sse $\forall \varepsilon > 0$ l'insieme $\mathscr{T}(\mathscr{F}, \varepsilon)$ è relativamente denso in I, e che le funzioni di P risultano equi-quasi periodiche sse $\forall \varepsilon > 0$ l'insieme $\mathscr{T}(P, \varepsilon)$ è relativamente denso in $\boldsymbol{R}$.

Lemma 1. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *è* $\mathscr{T}(\bar{g}, \varepsilon) \subset \mathscr{T}(G, \varepsilon)$.

Dim. Sia $\tau \in \mathscr{T}(\bar{g}, \varepsilon)$. Dunque $|\bar{g}(\tau)| = |\bar{g}(\tau + 0) - \bar{g}(0)| < \varepsilon$ (2), da cui, essendo $\bar{g}(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$ (3), si ha $\bar{g}(\tau) < \varepsilon$.

Allora $v_g(\tau) < \varepsilon$ per ogni $g(t)$ di G e quindi $\tau \in \mathscr{T}(g, \varepsilon)$, per ogni $g(t)$ di G, ovvero $\tau \in \mathscr{T}(G, \varepsilon)$.

Lemma 2. *Le funzioni* $g(t)$ *di* G *sono equi-uniformemente continue sse, per ogni* $\varepsilon > 0$, $\mathscr{T}(G, \varepsilon)$ *contiene un intorno dello zero.*

Dim. Siano le funzioni $g(t)$ equi-uniformemente continue, cioè

(I) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall t', t'' \in \boldsymbol{R} \; \forall g \in G$, se $|t' - t''| < \delta$ allora $|g(t') - g(t'')| < \varepsilon$.

Sia, per fissare le idee, $t' > t''$. Poniamo allora $t'' = t$ e $\tau = t' - t$ così che $t' = t + \tau$ e la (I) si scrive

(II) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in \boldsymbol{R} \quad \forall g \in G$, se $|\tau| < \delta$ allora $|g(t+\tau) - g(t)| < \varepsilon$

ovvero

(III) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ se $|\tau| < \delta$ allora $\tau \in \mathscr{T}(G, \varepsilon)$ cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathscr{T}(G, \varepsilon)$ contiene un intorno dello zero. Ripetendo ora le implicazioni precedenti da (III) a (I) si ottiene che (III) implica (I) e così il lemma è dimostrato.

Corollario 1. *Sia* $g(t)$ *funzione reale,* $t \in R$. *Si ha* $g(t)$ *uniformemente continua sse* $\mathscr{T}(g, \varepsilon)$ *contiene un intorno dello zero, per ogni* $\varepsilon > 0$.

Lemma 3. *Se* $\mathscr{F}$ *soddisfa la proprietà* $\mathscr{P}$ *allora le funzioni* $p(t)$ *del corrispondente insieme* P *sono equi-uniformemente continue.*

Dim. Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, è per ipotesi $\mathscr{T}(P, \varepsilon) \neq \phi$. Sia perciò $\tau \in \mathscr{T}(P, \varepsilon)$. Allora, per ogni $p(t) \in P$ è $v_p(\tau) < \varepsilon$ e quindi $\bar{p}(\tau) < \varepsilon$. Ne segue

(2) $v_g(0) = 0$ per ogni $g(t)$ di G, da cui $\bar{g}(0) = 0$.

(3) $v_g(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in R$, per ogni $g(t)$ di G.

che $\mathscr{T}(\overline{p}, \varepsilon)$ è relativamente denso in $\boldsymbol{R}$, e perciò, se $\overline{p}(t)$ è continua, $\overline{p}(t)$ è quasi periodica. In tal caso essa risulta uniformemente continua e quindi $\mathscr{T}(\overline{p}, \varepsilon)$ contiene un intorno dello zero.

Ma $\mathscr{T}(\overline{p}, \varepsilon) \subset \mathscr{T}(P, \varepsilon)$, per cui $\mathscr{T}(P, \varepsilon)$ contiene un intorno dello zero, e si ha quindi la tesi. Dimostriamo ora che $\overline{p}(t)$ è continua. Si ha che $\overline{p}(t)$ è continua sse essa è continua nella origine. Infatti si ha $\overline{p}(t+s) \leqslant \overline{p}(t) + \overline{p}(s)$ (4), e quindi

$$\overline{p}(s) = \overline{p}(o) + \overline{p}(s) = \lim_{t\to 0}(\overline{p}(t) + \overline{p}(s)) \geqslant \lim_{t\to 0}\overline{p}(t+s) = \lim_{t\to 0}\overline{p}(-t+s)$$
$$\geqslant \lim_{t\to 0}(\overline{p}(s) - \overline{p}(t))\ (^5) = \overline{p}(s)\,.$$

Se ora $\{\alpha'_n\}$ è una successione reale tale che $\alpha'_n \to 0$ per $n \to +\infty$, e $\overline{p}(\alpha_n) \geqslant \varepsilon$ per un certo $\varepsilon > 0$, prendiamo $\{\alpha_n\} \subseteq \{\alpha'_n\}$ tale che $\{p(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente in t per ogni $p \in P$ [**2**]. Per ogni $p \in P$, $\{p(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente a $p(t)$, e quindi $v_p(\alpha_n)$ tende a zero e $\overline{p}(\alpha_n)$ tende a zero. Si ha allora una contraddizione.

Def. 6. Dato un insieme $E \subseteq \boldsymbol{R}$ e data una successione $\{\alpha_n\}$ di numeri reali, diremo che la successione $\{g(t+\alpha_n)\}$ *converge uniformemente rispetto a* $t \in E$ *e rispetto alla funzione* $g(t)$ *di* G se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n', n'' \geqslant n_\varepsilon,\ \forall g \in G\ \forall t \in E$ $|g(t+\alpha_{n'}) - g(t+\alpha_{n''})| < \varepsilon$.

Lemma 4. *Se le funzioni* $g(t)$ *di* G *sono equi-quasi periodiche, allora ogni successione* $\{\alpha'_n\}$ *di numeri reali ammette una sottosuccessione* $\{\alpha_n\}$ *tale che* $\{g(t+\alpha_n)\}$ *converge uniformemente rispetto a* $t \in \boldsymbol{R}$ *ed alla funzione* $g(t)$ *di* G.

Dim. $\bar{g}(t)$ è quasi periodica (cfr. Lemma 1), quindi $\{\alpha'_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{\alpha_n\}$ tale che $\{\bar{g}(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente, cioè $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon)$ $\forall n$, $m \geqslant N(\varepsilon)$ $\forall t \in \boldsymbol{R}$ $|\bar{g}(t+\alpha_n) - \bar{g}(t+\alpha_m)| < \varepsilon$ ovvero, per cambiamento di variabile, $|\bar{g}(t+\alpha_n-\alpha_m) - \bar{g}(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in \boldsymbol{R}$. Ne segue, per $t = 0$, $\bar{g}(\alpha_n - \alpha_m) < \varepsilon$, e quindi $v_g(\alpha_n - \alpha_m) < \varepsilon$ per ogni $g(t) \in G$. Ma ciò equivale a $\sup_t |g((t+\alpha_n-\alpha_m) - g(t)| < \varepsilon$ per ogni $g(t) \in G$ e quindi, per cambiamento di variabile, $|g(t+\alpha_n) - g(t+\alpha_m)| < \varepsilon$ per ogni $t \in R$ ed ogni $g(t) \in G$, ovvero la tesi.

Lemma 5. *Se* $\mathscr{F}$ *soddisfa la proprietà* $\mathscr{P}$ *allora ogni successione* $\{\alpha'_n\}$ *di numeri reali positivi tale che* $\alpha'_n \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$ *contiene una successione* $\{\alpha_n\}$ *tale che* $\{f(t+\alpha_n)\}$ *converge uniformemente rispetto a* $t \in I$ *ed alla funzione* $f(t)$ *di* $\mathscr{F}$, *e viceversa.*

---

(4) $v_p(t+s) \leqslant v_p(t) + v_p(s)$ per ogni $p \in P$, per definizione. Quindi $\overline{p}(t+s) \leqslant \sup_p \{v_p(t) + v_p(s)\} = \sup_p v_p(t) + \sup_p v_p(s) = \overline{p}(t) + \overline{p}(s)$.

(5) $\overline{p}(-\tau) = -\overline{p}(\tau)$ per ogni τ.

Dim. Se $\mathscr{F}$ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$, allora le funzioni $p(t)$ del corrispondente insieme P sono equi-quasi periodiche. Per il Lemma 3 esiste perciò una sottosuccessione $\{\alpha_n\}$ di $\{\alpha_n'\}$ tale che $\{p(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente in t e in $p(t)$, cioè $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n, m>N(\varepsilon)$ $\forall t\in \boldsymbol{R}$ $\forall p(t)\in P$ $|p(t+\alpha_n) - p(t+\alpha_m)|<\varepsilon/4$. D'altra parte le funzioni $q(t)$ del corrispondente insieme $\mathscr{Q}$ sono equi-convergenti a zero per $t\to+\infty$, onde $\forall\varepsilon>0$ $\exists t_\varepsilon$ $\forall t', t''$ $\forall q(t)\in\mathscr{Q}$, se $t', t''\geqslant t_\varepsilon$ allora $|q(t')-q(t'')|<\varepsilon/4$ e quindi, per ogni t, se $\alpha_n, \alpha_m\geqslant t_\varepsilon$, $|q(t+\alpha_n) - q(t+\alpha_m)|<\varepsilon$.

Se ora $M(\varepsilon)\in\boldsymbol{N}$ è tale che $M(\varepsilon)\geqslant N(\varepsilon)$ e che $\alpha_n, \alpha_m\geqslant t_\varepsilon$ per $n, m\geqslant M(\varepsilon)$, allora, se $n, m\geqslant M(\varepsilon)$ si ha contemporaneamente $\forall t\in\boldsymbol{R}$ $\forall p(t)\in P$ $\forall q(t)\in\mathscr{Q}$, $|p(t+\alpha_n)-p(t+\alpha_m)|<\varepsilon/4$, $|q(t+\alpha_n)-q(t+\alpha_m)|<\varepsilon/4$ onde $\forall t\in\boldsymbol{R}$ $\forall f(t)\in\mathscr{F}$ $|f(t+\alpha_n)-f(t+\alpha_m)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

Dim del Teorema 1. Dimostriamo anzitutto che $v(t)$ è continua. Invero $|v(t)-v(t_0)|\leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|$ $\forall t, t_0\in I$ (6).

Ora avendosi, per $t\to t_0$, $f(t)\to f(t_0)$ per ogni $f(t)$ di $\mathscr{F}$, sarà $\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|\to 0$ per $t\to t_0$ e quindi $|v(t)-v(t_0)|\to 0$ per $t\to t_0$. Ciò premesso, sia $\{\alpha_n'\}$ una successione divergente di numeri reali positivi. Per il Lemma 5 esiste una successione $\{\alpha_n\}\subseteq\{\alpha_n'\}$ tale che $\{f(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente rispetto a $t\in I$ e rispetto alla funzione $f(t)$ di $\mathscr{F}$. Vale a dire, per la (6), che $\{v(t+\alpha_n)\}$ converge uniformemente in I, per cui il teorema è dimostrato (cfr. [**3**], p. 27).

Dim. del Teorema 2. Si ottiene procedendo come nella dimostrazione precedente (7).

Corollario 2. *Se $\mathscr{F}$ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ e se, per ogni $t\in I$ esistono finiti $v(t)=\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t)$ e $w(t)=\inf\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t)$, allora le funzioni $f(t)$ di $\mathscr{F}$ sono equi-limitate.*

---

(6) Per ogni $t, t_0\in I$ si ha $|v(t)-v(t_0)|\leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|$.

Invero, fissata una qualunque funzione $f(t)$ di $\mathscr{F}$ si ha $f(t_0)=f(t_0)-f(t)+f(t) \leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t_0)-f(t)|+\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t)$, quindi $\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t_0)\leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t_0)-f(t)|+\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t)$ onde $v(t_0) - v(t)\leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t_0)-f(t)|$.

Scambiando t con t_0 si ottiene la tesi.

(7) Per ogni $t, t_0\in I$ si ha $|w(t)-w(t_0)|\leqslant\inf\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|\leqslant\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|$. Invero, come nella nota precedente, si ottiene $w(t_0)\leqslant\inf\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t_0)-f(t)|+\inf\limits_{f\in\mathscr{F}}f(t)$, onde $w(t)-w(t_0) \leqslant\inf\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(t)-f(t_0)|$.

Scambiando t con t_0 si ottiene la tesi.

Dim. $v(t)$ e $w(t)$ sono as-quasi periodiche e quindi limitate. Dalla loro definizione segue la tesi.

2 – Consideriamo una equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t, x) , \tag{1}$$

dove x ed f sono funzioni reali (vettoriali); la funzione $f(t, x)$ è definita e continua in $I \times \Omega$, dove Ω è un insieme aperto e connesso di $\boldsymbol{R}$ e $I = [0, +\infty)$, ed è tale da assicuare la continua dipendenza dal dato iniziale per la soluzione in I del problema di Cauchy con punto iniziale $t = 0$ associato all'equazione (1). Dato $x_0 \in \boldsymbol{R}$, la soluzione in I di (1) per $(0, x_0)$ sarà denotata $G(t, 0, x_0)$ con $G(0, 0, x_0) = x_0$. La funzione $G(t, 0, x_0)$ è continua in $I \times \{0\} \times \Omega$ e uniformemente continua in $J \times \{0\} \times K$ per ogni coppia di insiemi compatti $J \subset I$ e $K \subset \Omega$, onde, indicata con χ una famiglia di soluzioni di (1), se l'insieme $\{x(0); x \in \chi\}$ è limitato, allora

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in \chi$, se $|x(0) - y(0)| < \delta$ allora $|x(t) - y(t)| < \varepsilon \; \forall t \in J$.

Consideriamo ora il seguente tipo di stabilità per una famiglia di funzioni.

Def. 7. Una famiglia F di funzioni reali, definite in I si dice *stabile* (nel futuro), se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f_1, f_2 \in F$, se $|f_1(0) - f_2(0)| < \delta$ allora $|f_1(t) - f_2(t)| < \varepsilon \; \forall t \in I$.

Vale allora la seguente proprietà

Teorema 3. *Se la famiglia χ soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ e l'insieme dei valori iniziali $\{x(0)/x \in \chi\}$ è limitato, allora la famiglia χ è stabile.*

Dim. Si procede analogamente a [4], p. 414, tenendo conto della proprietà (2) di dipendenza continua dal dato iniziale delle soluzioni di (1) e della condizione

(3) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists T_0 = T_0(\varepsilon) > 0 \; \exists l = l(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall t > T_0 + l \; \exists t' \in [T_0, \; T_0 + l]$ per cui $|x(t) - x(t')| < \varepsilon/3 \quad \forall x < \chi$ ottenuta, sempre seguendo [4], (p. 414), in virtù della nota [1].

3 - Un esempio di insieme che verifica la proprietà $\mathscr{P}$

Consideriamo dapprima la seguente definizione.

Def. 8. Una famiglia G, di funzioni (reali) vettoriali, definite in $I = [0, +\infty)$ si dice *fortemente stabile* in I (nel futuro), se $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ $\forall\alpha, \beta \in I\ \forall g \in G$ se $\|g(\alpha) - g(\beta)\| < \delta$ allora $\forall t \in I\ \|g(t + \alpha) - g(t + \beta)\| < \varepsilon$.

Vediamo subito un esempio di insieme fortemente stabile in I; consideriamo l'equazione differenziale (1) dove $x(t)$ ed $f(t, x)$ sono funzioni (reali) vettoriali definite rispettivamente in I ed in $I \times \Omega$ dove $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}$ è aperto e connesso, e $N > \|f\| > M$ con N ed M costanti positive.

Sia χ un insieme di soluzioni di (1). In virtù delle ipotesi fatte, si ha: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \sigma M$ ($\sigma = \sigma(\varepsilon)$ è quello relativo alla equi-uniforme continuità delle soluzioni di (1)) tale che $\forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in \chi$, se $\|x(\alpha) - x(\beta)\| < \delta$ (e quindi $|\alpha - \beta| < (\delta/M) = \sigma$), allora, $\forall t \in I$, $\|x(\alpha + t) - x(\beta + t)\| < \varepsilon$. Onde χ è fortemente stabile.

Sia ora G un insieme fortemente stabile in I di funzioni equilimitate vettoriali.

Se G è finito o numerabile supponiamo le funzioni di G solo limitate. Sia $\{\alpha_n\}$ una successione divergente di numeri reali positivi. Fissata ad arbitrio $g \in G$, la successione $\{g(\alpha_n)\}$ è limitata, per cui $\exists\{\alpha'_n\} \subseteq \{\alpha_n\}$ tale che $\{g(\alpha'_n)\}$ converge. Se G è finito o numerabile, al più sfruttando il procedimento diagonale, si può affermare l'esistenza di una successione $\{\beta_n\} \subseteq \{\alpha_n\}$ tale che $\{g(\beta_n)\}$ converge (uniformemente rispetto a $g \in G$).

Fissato $\varepsilon > 0$, sia ora $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ il valore che corrisponde ad ε per la forte stabilità di $G (\delta \leqslant \varepsilon)$. In corrispondenza a δ esiste η tale che $\forall n, m \geqslant \eta$, $\forall g \in G\ \|g(\beta_n) - g(\beta_m)\| < \delta$. Ne segue, per la forte stabilità di G, $\|g(t + \beta_n) - g(t + \beta_m)\| < \varepsilon\ \forall t \in I$ onde G soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$ per il Th. 2.

Se G è più che numerabile, allora G contiene almeno una sottofamiglia più che numerabile che gode della proprietà $\mathscr{P}$. Invero, essendo le funzioni di G equilimitate, l'insieme $X = \{g(t), t \in I, g \in G\}$ è limitato e quindi totalmente limitato (essendo contenuto in $\boldsymbol{R}$). Allora $\forall\varepsilon > 0$ esistono $m(\varepsilon)$ vettori $y_1, y_2, \ldots, y_m$, tali che ogni vettore di X appartiene a un intorno di raggio $\delta/2$ di uno dei vettori $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dove $\delta = \delta(\varepsilon)$ corrisponde all'ε della forte stabilità di G. Scelti ad arbitrio $m+1$ numeri $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$, distinti, per ogni $g \in G$ esiste almeno una coppia t_i, t_j, con $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1$, per cui $g(t_i)$, $g(t_j)$ stanno nello stesso intorno. Quindi, poichè una infinità più che numerabile divisa per 2^{m+1} è ancora una infinità più che numerabile, per ogni coppia t_i, t_j, esiste almeno una sottofamiglia G_{ij} più che numerabile di G tale che per ogni $g \in G_{ij}$, $g(t_i)$ e $g(t_j)$ stanno nello stesso intorno, onde $|g(t_i) - g(t_j)| < \delta$ e quindi

$\|g(t+t_i)-g(t+t_j)\|<\varepsilon$ per ogni $t\geqslant 0$, cioè t_i-t_j (supponendo $t_i\geqslant t_j$) è un as-quasi periodo comune a tutte le $g\in G_{ij}$. Poichè ripetendo una infinità numerabile di volte questo procedimento si ottiene ancora una famiglia più che numerabile, la tesi è provata.

Osservazione 1. Le funzioni dell'insieme G ora considerato sono inoltre equi-quasi periodiche (tutte se G è finito o numerabile, oppure a meno di considerarne una sottofamiglia più che numerabile se G è più che numerabile): basta sostituire I con $\boldsymbol{R}$ e considerare successioni reali $\{\alpha_n\}$ qualunque.

Bibliografia

[1] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Lectures Notes in Math., **377**, Springer Verlag 1974.

[2] S. Marchi, *Alcune proprietà su insiemi di funzioni as-quasi periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 65-71.

[3] C. Risito, *Existence theorems for almost periodic solutions of periodic systems*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-A (1979), 412-417.

[4] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer Verlag 1975.

* * *