Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 495-500

HANS VON KOCH (*)

Dimostrazione elementare della unimodalità dei polinomi di Gauss (**)

1 - Introduzione

Per il calcolo delle c.d. somme gaussiane, Gauss [4] ha introdotto per i numeri interi non negativi n e k i polinomi $\left[{n \atop k}\right] \in \boldsymbol{Z}[X]$, a cui è stato dato il suo nome. Si ricorda $\left[{n \atop k}\right] = 0$ se $n < k$, $\left[{n \atop 0}\right] = 1$ e $\left[{n \atop k}\right] = \prod_{l=1}^{k} (1 - X^{n-k+l})/(1 - X^l)$ se $0 < k \leqslant n$. Se scriviamo $n = k + r$ con $r \geqslant 0$, secondo la formula di ricorrenza,

$$\left[{r+k \atop k}\right] = \left[{r+k-1 \atop k}\right] + X^r \left[{r+k-1 \atop k-1}\right]$$

con le condizioni iniziali $\left[{r \atop 0}\right] = \left[{k \atop k}\right] = 1$ si ha che il polinomio $\left[{r+k \atop k}\right]$ è di grado rk con coefficienti positivi interi, e $\left[{r+k \atop k}\right](1) = \binom{r+k}{k}$. Cayley [1] e Sylvester [10] fecero uso dei polinomi gaussiani per enumerare taluni invarianti: cioè scrivendo $\left[{r+k \atop k}\right] = \sum_{s=0}^{rk} a_s X^s$ la differenza $a_s - a_{s-1}$, in cui $1 \leqslant s \leqslant rk/2$ indica il numero dei semiinvarianti linearmente indipendenti di grado r e peso s di una forma binaria di grado k (cfr. [3]). In seguito alla reciprocità dei poli-

(*) Indirizzo: Mathematisches Institut der Technischen Universität München, Germany.

(**) Sono grato al professore sig. W. HEISE che mi ha ispirato il presente lavoro e i cui consigli sono stati in ogni fase di grande aiuto. — Ricevuto: 21-IX-1981.

nomi gaussiani, di facile prova), ossia $a_s = a_{kr-s}$ $(0 \leqslant s \leqslant kr)$ dal predetto risultato ne deriva in particolare che i coefficienti a_s formano una successione unimodale, cioè $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_l \geqslant a_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{kr}$, con una l appropriata.

Detti coefficienti presentano un interesse per il calcolo combinatorio, perchè si è verificato, fra l'altro, che a_s è il numero di partizioni di s che consistono al massimo in r parti, la cui grandezza non superi il numero k. Da allora si è alla ricerca di una prova combinatoria della unimodalità dei polinomi gaussiani. Per ciò che riguarda la teoria degli invarianti non è stato possibile di interpretare sinora in senso combinatorio nè le vecchie riprove (cfr. [**3**], [**5**], [**8**], [**10**]) nè le nuove (es. [**9**]). Nel mentre ad es. Elliot, Hilbert e Schur operavano colle equazioni differenziali di Caley-Aronhold, Springer si valeva della completa riducibilità di ogni rappresentazione razionale di $SL(2, \boldsymbol{C})$ e della esplicita cognizione dei componenti irriducibili. Hughes [**6**] ha fornito una prova basantesi sulla teoria delle algebre di Lie specialmente sui risultati di Dynkin [**2**], [**7**]. Tutte queste prove sono technicamente laboriose. Per tale motivo vogliamo indicare ora una prova, in cui il teorema di Steinitz rappresenta l'unico elemento non combinatorio.

2 - Terminologia

Salvo indicazione contraria le lettere latine minuscole rappresentano in questo e nei paragrafi seguenti numeri interi. Inoltre siano fissati $k \geqslant 0$ e $r \geqslant 0$. Le partizioni λ del numero s al massimo in r parti non superanti k formano l'insieme

$$\Lambda_s := \{\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \in \boldsymbol{N}_0^{k+1} : \sum_{n=0}^{k} \lambda_n = r, \sum_{n=0}^{k} n\lambda_n = s\} .$$

Se $s < 0$ oppure $s > kr$ ovviamente $\Lambda_s = \emptyset$ e se $0 \leqslant s \leqslant kr$ si ha $|\Lambda_s| < \infty$. L'unimodalità dei polinomi gaussiani $\left[\begin{smallmatrix} k+r \\ r \end{smallmatrix}\right]$ si ritrae semplicemente dalla asserzione

$$|\Lambda_{s-1}| \leqslant |\Lambda_s| \qquad \text{se} \qquad 1 \leqslant s \leqslant \frac{kr}{2} .$$

A base della dimostrazione sta l'idea di trovare una applicazione lineare iniettiva di uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{Q}$ con base Λ_{s-1}, in uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{Q}$ con base Λ_s.

All'uopo V sia lo spazio vettoriale su $\boldsymbol{Q}$ che viene generato dall'insieme $L := \{\lambda \in \boldsymbol{Z}^{k+1} : \sum_{n=0}^{k} \lambda_n = r\}$. V lo si può descrivere come l'insieme di tutte le somme formali $\sum_{\lambda \in F} q_\lambda \lambda$, in cui $q_\lambda \in \boldsymbol{Q}$ per ogni $\lambda \in F$, dove F percorre tutti i sottoinsiemi finiti di L. V è costruito in modo che L rappresenti una base di V. $\langle \Lambda_s \rangle$ sia il sottospazio generato dall'insieme $\Lambda_s \subseteq L$. Tale sottospazio è di dimensione finita e ha Λ_s come base.

3 - Dimostrazione

Siano $1 \leqslant n \leqslant k$ e $f_n, g_n \colon L \to L$ le applicazioni definite da

$$\begin{array}{c}
(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} - 1, \lambda_n + 1, \dots, \lambda_k) \\
\uparrow g_n \\
(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, \qquad \lambda_n, \dots, \lambda_k) \\
\downarrow f_n \\
(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} + 1, \lambda_n - 1, \dots, \lambda_k) .
\end{array}$$

Essendo $1 \leqslant n$, $m \leqslant k$ ne segue ovviamente

(1) $$f_m g_n = g_n f_m$$ (2) $$f_n g_n = Id_L$$

e per ogni $\lambda \in \Lambda_s$ vale

(3) $$\lambda_n \neq 0 \Rightarrow f_n \lambda \in \Lambda_{s-1}, \qquad \lambda_{n-1} \neq 0 \Rightarrow g_n \lambda \in \Lambda_{s+1} .$$

Inoltre siano $F, G \colon V \to V$ endomorfismi definiti da

$$F\lambda := \sum_{n=1}^{k} n \lambda_n f_n \lambda , \qquad G\lambda := \sum_{n=1}^{k} (k + 1 - n) \lambda_{n-1} g_n \lambda$$

e da prolungamento lineare.

In questa definizione, a seguito di (3), i fattori λ_n e λ_{n-1} danno luogo rispettivamente a $F\langle \Lambda_s \rangle \subseteq \langle \Lambda_{s-1} \rangle$ e $G\langle \Lambda_s \rangle \subseteq \langle \Lambda_{s+1} \rangle$ e in questo modo otteniamo generalmente per $t \geqslant 0$

(4) $$F^t \langle \Lambda_s \rangle \subseteq \langle \Lambda_{s-t} \rangle , \qquad G^t \langle \Lambda_s \rangle \subseteq \langle\langle \Lambda_{s+t} \rangle .$$

L'asserzione decisiva della presente dimostrazione è

(5) $$\forall v \in \langle \Lambda_s \rangle \qquad (GF - FG) v = (2s - kr) v .$$

Dimostrazione. Basta verificare l'affermazione per i vettori λ appartenenti alla base Λ_s. Si ottengono le equazioni

$$GF\lambda = \sum_{n,m} m\lambda_m(k+1-n)(f_m\lambda)_{n-1} g_n f_m \lambda\,,$$

$$FG\lambda = \sum_{n,m} (k+1-n)\,\lambda_{n-1} m(g_n\lambda)_m f_m g_n \lambda\,.$$

Per (1) la differenza risulta

$$\sum_{n,m} [\lambda_m(f_m\lambda)_{n-1} - \lambda_{n-1}(g_n\lambda)_m] m(k+1-n) f_m g_n \lambda\,.$$

Studiamo l'espressione nella parentesi quadra

$$n = m-1\colon [...] = \lambda_{n+1}\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1}\lambda_{n+1} = 0\,,$$

$$n = m\colon \qquad [...] = \lambda_n(\lambda_{n-1}+1) - \lambda_{n-1}(\lambda_n+1) = \lambda_n - \lambda_{n-1}\,,$$

$$n = m+1\colon [...] = \lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}-1) - \lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}-1) = 0\,,$$

$$n \neq m-1, m, m+1\colon [...] = \lambda_m\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1}\lambda_m = 0\,.$$

Siccome, nel caso in cui è $n \neq m$ tutti gli addendi sono nulli e poichè $f_n g_n \lambda = \lambda$ in fine resta

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{k} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) n(k+1-n)\lambda \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{k} \lambda_n n(k+1-n) - \sum_{n=1}^{k} \lambda_{n-1} n(k+1-n)\Big)\lambda \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{k} \lambda_n n(k+1-n) - \sum_{n=0}^{k} \lambda_n (n+1)(k-n)\Big)\lambda \\
&= \sum_{n=0}^{k} \big(n(k+1-n) - (n+1)(k-n)\big)\lambda_n\lambda = \sum_{n=0}^{k} (2n-k)\lambda_n\lambda \\
&= \Big(2\sum_{n=0}^{k} n\lambda_n - k\sum_{n=0}^{k}\lambda_n\Big)\lambda = (2s-kr)\lambda\,.
\end{aligned}$$

(6) Sia $1 \leqslant s \leqslant \dfrac{kr}{2}$, $v \in \langle\Lambda_{s-1}\rangle \cap \operatorname{Kern} G$ e $0 \leqslant t \leqslant s$; allora esiste un $l_t \neq 0$ soddisfacente a $G^t F^t v = l_t v$.

Dimostrazione per induzione rispetto a t.

$t=0$: banale. Sia allora $1 \leqslant t \leqslant s$. In questo caso

$$\begin{aligned} GF^t v &= (GF^t - F^t G)v \qquad (Gv = 0) \\ &= \sum_{i=1}^{t} (F^{i-1} G F^{t-i+1} - F^i G F^{t-i}) v = \sum_{i=1}^{t} F^{i-1}(GF - FG) F^{t-i} v \\ &= \sum_{i=1}^{t} F^{i-1} [2(s-1-(t-i)) - kr] \, F^{t-i} \, v, \end{aligned}$$

come segue da (5) e da $F^{t-i}v \in \langle \Lambda_{s-1-(t-i)} \rangle$ per (4).

L'espressione fra parentesi quadra è negativa, poichè, secondo la premessa, $i \leqslant t$ e $2s - kr \leqslant 0$. Quindi si ha $GF^t v = (\sum_{i=1}^{t} 2(s-1-t+i) - kr) F^{t-1} v$ e $(\sum \ldots) \neq 0$. Applicando G^{t-1} a questa equazione, per l'ipotesi d'induzione, si ha il risultato cercato.

Se $1 \leqslant s \leqslant kr/2$, $v \mapsto Gv$ è una applicazione lineare iniettiva di $\langle \Lambda_{s-1} \rangle$ in $\langle \Lambda_s \rangle$. Infatti, se $v \in \langle \Lambda_{s-1} \rangle \cap \operatorname{Kern} G$ da un lato si ha $G^s F^s v = l_s v$ con $l_s \neq 0$ e dall'altro si ha $F^s v \in \langle \Lambda_{-1} \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$ che significa $G^s F^s v = 0$ e quindi $v = 0$.

Allora $|\Lambda_{s-1}| = \dim \langle \Lambda_{s-1} \rangle \leqslant \dim \langle \Lambda_s \rangle = |\Lambda_s|$ è valido (teorema di Steinitz) e quindi segue l'unimodalità dei polinomi gaussiani $\left[{r+k \atop k} \right]$.

4 - Annotazioni

(1) Invece di $\boldsymbol{Q}$ ovviamente avremmo potuto adoperare qualunque corpo di caratteristica nulla. Con rispetto ai puristi, persino $\boldsymbol{Z}$ sarebbe bastato. Tutto resta valido, se intendiamo V come gruppo abeliano libero su L. In questo caso $\langle \Lambda_s \rangle$ è un gruppo abeliano libero di rango $|\Lambda_s|$. Infatti, i nostri calcoli coinvolgono solo numeri interi.

(2) Con qualche calcolo in più la dimostrazione può essere data anche tramite la suriettività dell'applicazione $v \mapsto Fv$ di $\langle \Lambda_s \rangle$ su $\langle \Lambda_{s-1} \rangle$, $1 \leqslant s \leqslant kr/2$.

(3) La reciprocità dei polinomi gaussiani si riconosce immediatamente dalla biiezione Φ: $\Lambda_s \to \Lambda_{kr-s}$, $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \mapsto (\lambda_k, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0)$. Φ fornisce un isomorfismo tra gli spazi vettoriali corrispondenti o anche un automorfismo di V, e inoltre si ha $\Phi = \Phi^{-1}$, $F = \Phi G \Phi$, $G = \Phi F \Phi$.

Da questo riconosciamo che nel caso $kr/2 < s \leqslant kr$ le applicazioni $v \mapsto Fv$ forniscono iniezioni di $\langle A_s \rangle$ in $\langle A_{s-1} \rangle$ o anche $v \mapsto Gv$ forniscono suriezioni di $\langle A_{s-1} \rangle$ su $\langle A_s \rangle$. Naturalmente questo è ciò che ci si aspetta da F e G.

Bibliografia

[1] A. Cayley, *A second memoir upon quantics*, Coll. Math. Papers, Cambridge University Press 1889.

[2] E. B. Dynkin, *Maximal subgroups of the classical groups: Supplement*, Amer. Math. Soc. Transl. 2 (1957), 245-378.

[3] E. B. Elliot, *Algebra of Quantics*, Chelsea, New York 1964.

[4] C. F. Gauss, *Untersuchungen über höhere Arithmetik: Summierung gewisser Reihen von besonderer Art*, Springer, Berlin 1889.

[5] D. Hilbert, *Über die Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete*, Math. Ann. **30** (1887), 15-29.

[6] J. W. B. Hughes, *Lie algebraic proofs of some theorems on partitions*, in « Number Theory and Algebra » (Editor: H. Zassenhaus), Academic Press, New York 1977.

[7] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Wiley (Interscience), New York 1962.

[8] I. J. Schur, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Springer, Berlin 1968.

[9] T. A. Springer, *Invariant Theory*, Springer, New York 1977.

[10] J. J. Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*, Coll. Math. Papers, Chelsea, New York 1973.

* * *