Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 453-466

RODOLFO SALVI (*)

Disequazioni variazionali per i fluidi viscosi incomprimibili non omogenei (**)

1 - Introduzione

Nei lavori di S. N. Antonzev and A.V. Kajikov [**1**] e di A.V. Kajikov [**3**] sono state studiate le equazioni del flusso dei fluidi viscosi incomprimibili che sono non omogenei nel senso che la densità non è costante, ovvero è stato studiato il sistema

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &\varrho\,(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})-\mu\Delta\boldsymbol{u}=\varrho\boldsymbol{f}-\nabla p\,,\\ &\frac{\partial\varrho}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\varrho=0\,,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\,. \end{aligned}$$

I risultati di tali lavori sono stati, in seguito, esposti da J. L. Lions in $[\mathbf{5}]_{1,2}$ ove è stata data una completa dimostrazione della esistenza di una soluzione debole del sistema (1.1) nel caso tridimensionale con densità $0<\alpha\leqslant\varrho(x,t)\leqslant\beta$ (un teorema di esistenza per $0\leqslant\varrho(x,t)\leqslant\beta$ è stato dato da J. Simon in [**7**]); in [**3**] con le stesse tecniche usate in [**1**] è stata dimostrata l'esistenza di una soluzione forte nel caso bidimensionale. Osserviamo, inoltre, che nel caso bidimensionale, l'esistenza ed unicità di una soluzione classica del sistema (1.1) è stata dimostrata da A.V. Kajikov [**3**] e da O. A. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov in [**4**].

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 24-II-1981.

Per il sistema (1.1) possono essere considerati problemi che sono stati studiati per il sistema di Navier-Stokes classico $(\varrho(x, t) = \text{costante})$, dato che questo ultimo sistema è un caso particolare del primo.

In particolare possono essere considerate disequazioni variazionali associate al sistema (1.1) (per le disequazioni variazionali associate al sistema di Navier-Stokes classico cfr. [**2**], [**5**]$_3$, [**6**]).

In questo lavoro si studia, nel caso tridimensionale, una disequazione variazionale associata al sistema (1.1) con $0 \leqslant \varrho(x, t) \leqslant \beta$ relativa ad un convesso indipendente dal tempo.

In **2** si precisa il quadro funzionale e si dà la nozione di soluzione debole della disequazione variazionale.

In **3** con una approssimazione di tipo Galerkin, si dimostra l'esistenza di una soluzione debole della disequazione.

2 - Forma debole della disequazione variazionale

Sia Ω un insieme aperto limitato di R^3 con contorno Γ. Nel cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$, $T < \infty$, le equazioni del flusso dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei sono

$$\varrho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \varrho f - \nabla p\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\varrho = 0 \qquad \text{(equazione di continuità)}\,, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{2.3}$$

ove $\boldsymbol{u} = (u_i, 1 \leqslant i \leqslant 3)$ è la velocità, ϱ la densità e p la pressione. In (2.1) $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \sum_j u_j(\partial\boldsymbol{u}/\partial x_j)$.

Si introducono i seguenti classici spazi funzionali $\mathscr{V} = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in (\mathscr{D}(\Omega))^3, \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\}$, $V = \{\text{chiusura in } (H^1(\Omega))^3 \text{ di } \mathscr{V}\}$, $H = \{\text{chiusura in } (L^2(\Omega))^3 \text{ di } \mathscr{V}\}$, dove $\mathscr{D}(\Omega) =$ funzioni C^∞ in Ω a supporto compatto e $H^1(\Omega)$ spazio di Sobolev di ordine uno.

Si pone, inoltre, $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \int_\Omega (\partial u_i/\partial x_j)(\partial v_i/\partial x_j)\,dx$, $\|\boldsymbol{u}\| = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$, $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$, $\|\boldsymbol{u}\|_0 = |\boldsymbol{u}| = \int_\Omega u_i u_i\,dx$, (si usa la convenzione della somma rispetto agli indici ripetuti).

Si considera il seguente spazio vettoriale

$$\Phi = \left\{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in L^2(0, T; V);\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega));\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega))\right\}.$$

Sia, inoltre, K un convesso chiuso in H con $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ [1], $0 \in K$.

Consideriamo il sistema

$$(2.4)\qquad \left(\varrho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\right)+\int_\Omega \varrho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,dx+\mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \geqslant (\varrho \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{v}\in K$$

$$(2.5)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u})=0\,,$$

con le condizioni iniziali

$$(2.6)\qquad \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x)\,, \qquad\qquad (2.7)\qquad \varrho(x,0)=\varrho_0(x)\,,$$

e le condizioni al contorno

$$(2.8)\qquad \boldsymbol{u}=0 \quad \text{su } \Sigma\,, \qquad \Sigma=\Gamma\times(0,T)\,.$$

Diamo la nozione di soluzione debole: *si dice che* $(\boldsymbol{u}, \varrho)$ *è soluzione debole del sistema* (2.4), ..., (2.8) *se verifica le seguenti relazioni*

$$(2.9)\qquad \int_\Omega^T\left\{\left(\varrho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\right)+\int_\Omega \varrho u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,dx+\mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-(\varrho f, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\right\}dt$$

$$\geqslant -\left|\sqrt{\varrho(0)}\,(\boldsymbol{v}(0)-\boldsymbol{u}(0))\right|^2,$$

$$(2.10)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u})=0\,,$$

$$\boldsymbol{u}\in L^2(0,T;V),\quad \boldsymbol{u}\in K,\quad \varrho\in L^\infty(Q),\quad \forall \boldsymbol{v}\in\Phi,\quad \boldsymbol{v}\in K\,.$$

La disequazione (2.9) si deduce dalla (2.4) (formalmente) nel seguente modo. Moltiplichiamo (2.5) per $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$, integriamo in t e sommiamo il corrispondente risultato alla disequazione (2.4), così otteniamo

$$(2.11)\qquad \int_0^T\left\{\left(\frac{\partial(\varrho \boldsymbol{u})}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\right)-\int_\Omega \varrho u_j u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,dx+\mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-(\varrho f, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\right\}dt \geqslant 0.$$

---

[1] L'ipotesi $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ è fatta per semplicità, ma non è determinante.

Aggiungendo e togliendo alla (2.11) $\int_0^T(\partial\varrho\boldsymbol{v}/\partial t, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t$ si ha

$$\int_0^T\{(\frac{\partial\varrho\boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-\int_\Omega \varrho u_j u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x+\mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-(\varrho f, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\}\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \int_0^T(\frac{\partial\varrho(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.12}$$

Ora

$$\int_0^T(\frac{\partial\varrho(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T(\varrho\frac{\partial(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t+\tfrac{1}{2}\int_0^T((\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t+\tfrac{1}{2}\int_0^T((\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\mathrm{d}t,$$

e dalla equazione di continuità si ha

$$\int_0^T(\boldsymbol{v}\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t=-\int_0^T(\int_\Omega v_i(\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^T((\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t=-\int_0^T(\int_\Omega(\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t\,,$$

per cui la (2.12) diventa

$$\begin{aligned}\int_0^T\{(\varrho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})&-\int_\Omega v_i\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x+\tfrac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i^2\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega\varrho u_i u_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x+\mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-(\varrho f, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\}\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\tfrac{1}{2}|\sqrt{\varrho(T)}\,(\boldsymbol{u}(T)-\boldsymbol{v}(T))|^2-\tfrac{1}{2}|\sqrt{\varrho(0)}\,(\boldsymbol{v}(0)-\boldsymbol{u}(0))|^2\,.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Ora

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega v_i\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x+\tfrac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial\varrho u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\varrho u_i u_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\varrho u_j v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\varrho u_j v_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho u_j(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\frac{\partial(u-v)_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega\varrho u_i u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho u_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\varrho u_j(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

per cui la (2.13) diventa

$$\int_0^T \{ (\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \int_\Omega \varrho u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \eta \, dx + \mu a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - (\varrho f, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \} \, dt$$

$$\geqslant - | \sqrt{\varrho(0)} \, (\boldsymbol{v}(0) - \boldsymbol{u}(0)) |^2 .$$

3 - Esistenza di una soluzione debole del problema (2.6), ..., (2.10).

Dimostriamo il seguente

Teorema. *Si assume che* $f \in L^2(0, T; H)$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$, $\varrho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \varrho_0(x) \leqslant \beta$, $\boldsymbol{u}_0 \in k$. *Allora esistono funzioni* $\boldsymbol{u}$, ϱ *tali che*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V) , \qquad \varrho \in L^\infty(Q) , \qquad \boldsymbol{u} \in k$$

e soddisfano (2.6), ..., (2.10) $\forall \boldsymbol{v} \in \Phi$, $\boldsymbol{v} \in k$.

Sia P_k l'operatore di proiezione su k e si pone

$$\beta(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - P_k \boldsymbol{v} . \tag{3.1}$$

L'operatore β è monotono ed emicontinuo ed inoltre valgono le relazioni

(3.2) $\quad (\boldsymbol{v} - P_k \boldsymbol{v}, P_k \boldsymbol{v}) \geqslant 0$, $\qquad$ (3.3) $\quad (\boldsymbol{v} - P_k \boldsymbol{v}, P_k \boldsymbol{v} - \boldsymbol{h}) \geqslant 0 \;\; \forall \boldsymbol{h} \in k$.

Si considera, ora, una famiglia di «approssimazioni interne» V_m di V. Si assume che

(3.4) $\quad V_m$ è un sottospazio di V di dimensione m,

(3.5) $\quad \forall \boldsymbol{v} \in V$ esiste una successione $\boldsymbol{v}_m \in V_m$ tale che $\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v}$ in V,

(3.6) $\quad$ tutte le componenti delle funzioni $\boldsymbol{v}$ in V_m appartengono a $C^1(\overline{\Omega})$.

Poichè V è denso in H ed $\boldsymbol{u}_0 \in H$, è possibile trovare $\boldsymbol{u}_{0m} \in V_m$ tale che $\boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0$ in H per $m \to \infty$.

Sia $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ una base di V_m; consideriamo il seguente sistema

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad &\left(\varrho_m \frac{\partial \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{w}_k\right) + \int_\Omega \varrho_m u_j \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} w_{ik}\,\mathrm{d}x + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_k) + m(\beta(\boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{w}_k)\\ &= (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_k)\,,\end{aligned}$$

$$(3.8)\qquad \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} + u_{jm} \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} = 0\,,$$

$$(3.9)\qquad \boldsymbol{u}_m(0) = \boldsymbol{u}_{0m} \quad \text{ove } \boldsymbol{u}_{0m} \in V_m\,, \qquad \boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{in } H\,,$$

$$\begin{aligned}(3.10)\qquad &\varrho_m(0) = \varrho_{0m} \quad \text{ove} \quad \varrho_{0m} \in C^1(\bar{\Omega})\\ &1/m \leqslant \varrho_{0m} \leqslant \beta\,, \quad \varrho_{0m} \to \varrho_0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega)\,.\end{aligned}$$

Il sistema (3.7), ..., (3.10) ammette una soluzione almeno in un intervallo $(0, t_m)$ sufficientemente piccolo (cfr. [**5**]$_1$).

Con stime a priori standard si mostra l'esistenza della soluzione in $(0, T)$. Tali stime si ottengono nel seguente modo. Posto $\boldsymbol{u}_m = \sum_{k=1}^{m} c_{km}(t)\,\boldsymbol{w}_k$, moltiplicando (3.7) per $c_{km}(t)$ e sommando per k da 1 a m, si ottiene (si usa la notazione $(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$)

$$\begin{aligned}(3.11)\qquad &\int_\Omega \varrho_m \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{u}_m)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho_m u_{jm} \frac{\partial}{\partial x_j} (\boldsymbol{u}_m)^2\,\mathrm{d}x + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m) + m(\beta(\boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{u}_m)\\ &= (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)\,.\end{aligned}$$

Moltiplichiamo (3.8) per $(\boldsymbol{u}_m)^2/2$ ed integriamo su Ω, si ha

$$(3.12)\qquad \int_\Omega \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} \frac{(\boldsymbol{u}_m)^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial \varrho_m}{\partial x_j} u_{jm} \frac{(\boldsymbol{u}_m)^2}{2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Aggiungendo la (3.12) alla (3.11) si ha

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \varrho_m \frac{(\boldsymbol{u}_m)^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varrho_m u_{jm} \frac{(\boldsymbol{u}_m)^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m) + m(\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m)\\ &\qquad + m(\boldsymbol{u} - P_k \boldsymbol{u}_m, P_k \boldsymbol{u}_m)\\ (3.13)\qquad &= (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)\,.\end{aligned}$$

Integrando la (3.13) rispetto a t si ha

$$\int_0^T \Big(\int_\Omega \varrho_m \frac{(\boldsymbol{u}_m)^2}{2}\, dx\Big)\, dt + \mu \int_0^T a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m)\, dt + m \int_0^T |\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m|^2\, dt + m \int_0^T (\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m, P_k \boldsymbol{u}_m)\, dt$$

$$= \int_0^t (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)\, dt + \varrho_{0m} \frac{|\boldsymbol{u}_{0m}|^2}{2}\,. \tag{3.14}$$

Dalla (3.14) si deduce

$$\|\sqrt{\varrho_m}\, \boldsymbol{u}_m\|_{L^\infty(0,T;H)} < c_1\,, \qquad \int_0^T \|\boldsymbol{u}_m\|^2\, dt \leqslant c_2$$

$$m \int_0^T |\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m|^2\, dt \leqslant c_3\,, \qquad m \int_0^T (\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m, P_k \boldsymbol{u}_m)\, dt \leqslant c_4\,,$$

c_1, c_2, c_3, c_4 sono costanti indipendenti da m, da cui

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}_m \underset{L^2(0,T;V)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{3.15}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt{\varrho_m}\, \boldsymbol{u}_m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} \alpha \qquad \text{nella topologia debole } (*)\,, \tag{3.16}$$

$$\lim_{m\to\infty} (\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m) \underset{L^2(Q)}{=} 0 \qquad \text{nella topologia forte}\,, \tag{3.17}$$

dalla (3.17) si ha $\boldsymbol{u} - P_k \boldsymbol{u} = 0$ ovvero $\boldsymbol{u} \in k$.

Dalle stime sopra ottenute si ha

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m \boldsymbol{u}_m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} \gamma \qquad \text{nella topologia debole } (*)\,,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m u_{im} u_{jm} \underset{L^2(0,T;L^{3/2}(\Omega))}{=} \eta_{ij} \qquad \text{nella topologia debole}\,.$$

Consideriamo, ora, la parte principale del teorema che consiste nella dimostrazione delle seguenti relazioni

$$\gamma = \varrho \boldsymbol{u}\,, \tag{3.18}$$ $$\eta_{ij} = \varrho u_i u_j\,. \tag{3.19}$$

Dalla (3.8) si ha che $\partial\varrho_m/\partial t$ appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (indipendentemente da m) per cui

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m \underset{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}{=} \varrho \qquad \text{nella topologia forte}\,, \tag{3.15$'$}$$

allora la (3.15) implica la (3.18).

Mostriamo la (3.19). A tale scopo diamo l'enunciato di un risultato di compattezza dimostrato in [7].

« *Siano* $B_0 \subset B \subset B_1$ *tre spazi di Banach (le immersioni sono continue) e* β_0, β_1 *riflessivi e l'immersione* $B_0 \to B_1$ *è compatta; sia inoltre* δ *una funzione da* R_+ *a* R_+ *tale che* $\delta(h) \to 0$ *per* $h \to 0$. *Si pone*

$$W = \{v \mid v \in L^p(0, T; B_0);\ \sup_{0<h<T} \operatorname{ess} \frac{1}{\delta(h)} \|v_h - v\|_{L^p(0,T-h;\,B_1)} < \infty\} ,$$

ove $v_h(t) = v(t+h)$, $1 < p < \infty$, *e si munisce* W *della sua norma naturale; allora l'immersione di* W *in* $L^2(0, T; B)$ *è compatta.* »

Mostriamo, dapprima, che esiste una costante c tale che

$$\int_0^{T-h} |\sqrt{\varrho_m(t+h)}\,(\boldsymbol{u}_m(t+h) - \boldsymbol{u}_m(t))\,|^2\,\mathrm{d}t \leqslant ch \tag{3.20}$$

$\forall h$ con $0 < h < T$ e c indipendente da m ed h.

Sia $\boldsymbol{u}_{hm} = 1/h \int_{t-h}^{t} \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s$, dalla (3.7) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_h^T \{(\varrho_m \frac{\partial \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{u}_{hm}) + \int_\Omega \varrho_m u_{jm} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} u_{ihm}\,\mathrm{d}x + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{hm})\\ + m(\boldsymbol{u}_m - P_k \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{hm}) - (\varrho_m f, \boldsymbol{u}_{hm})\}\,\mathrm{d}t = 0 .\end{aligned} \tag{3.21}$$

Valutiamo, ora, singolarmente ogni termine della (3.21). Ora

$$\begin{aligned}\int_0^T (\frac{\partial}{\partial t} \varrho_m\ \boldsymbol{u}_m, \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t &= (\varrho_m(T)\,\boldsymbol{u}_m(T), \frac{1}{h} \int_{T-h}^{T} \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s)\\ &- (\varrho_m(h)\,\boldsymbol{u}_m(h), \frac{1}{h} \int_0^h \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s) - \frac{1}{h} \int_h^T (\varrho_m \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_m(t-h))\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant |\varrho_m(T)\,\boldsymbol{u}_m(T)|\,|\frac{1}{h} \int_{T-h}^{T} \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s| + |\varrho_m(h)\,\boldsymbol{u}_m(h)|\,|\frac{1}{h} \int_0^h \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s|\\ &- \frac{1}{h} \int_h^T (\varrho_m \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_m(t-h))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$< \tilde{c} \frac{1}{\sqrt{h}} (\int_0^T |\boldsymbol{u}_m(s)|^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} \int_h^T (\varrho_m(t)\,\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_m(t-h))\,\mathrm{d}t . \tag{3.22}$$

Il primo termine della (3.22) è minore di $c_1/\sqrt{h}$ (tutte le costanti c_i sono indipendenti da m e h). Consideriamo il secondo termine della (3.22).

$$\frac{1}{h}\int_h^T(\varrho_m \boldsymbol{u}_m(t),\, \boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}_m(t-h))\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{h}\int_h^T \int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m)^2\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)\boldsymbol{u}_m(t)\boldsymbol{u}_m(t-h)\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t)(^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t-h)-\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t))\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(3.23)}\qquad = \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t-h)-\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aggiungendo e togliendo alla (3.23) $1/2h\int_h^T\int_\Omega \varrho_m(t-h)(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ si ottiene che (3.23) è uguale a

$$\text{(3.24)}\qquad \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t-h)(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t))\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega(\varrho_m(t)-\varrho_m(t-h)((\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t-h)-\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\mathrm{d}t.$$

Con un cambiamento di variabile si ha che i primi due termini della (3.24) verificano la seguente relazione

$$\frac{1}{2h}\int_0^{T-h}\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2h}\int_h^T\Bigl(\int_\Omega \varrho_m(t)(\boldsymbol{u}_m(t))^2\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t \leqslant c_2/\sqrt{h}$$

dato he $\sqrt{\varrho_m(t)}\,\boldsymbol{u}_m(t)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^\infty(0, T; H)$ indipendente da m.

Ora, dalla relazione di continuità, dopo averla integrata su t da $t-h$ a t e moltiplicata per $(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2$ si ha

$$\int_h^T \Big(\int_\Omega (\varrho_m(t) - \varrho_m(t-h)\big((\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_h^T \Big(\int_\Omega \Big(\int_{t-h}^t \boldsymbol{u}_m(s)\varrho_m(s)\,\mathrm{d}s\Big)_j \cdot u_{im}(t-h)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,u_{im}(t-h)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t\,;$$

applicando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\Big|\int_h^T \Big(\int_\Omega (\varrho_m(t) - \varrho_m(t-h)\big((\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leqslant \int_h^T \Big(\|\boldsymbol{u}_m(t-h)\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|\boldsymbol{u}_m(t-h)\| \cdot \Big\|\int_t^{t-h} \varrho_m(t) u_m(s)\,\mathrm{d}s\Big\|_{L^4(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_h^T \Big(\|\boldsymbol{u}_m\|^2 \cdot \int_t^{t-h} \|\varrho_m(s)\boldsymbol{u}_m(s)\|_{L^4(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant c_2 \int_h^T \Big(\|\boldsymbol{u}_m\|^2 \cdot \sqrt{h}\,\Big(\int_0^T \|\boldsymbol{u}_m\|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\,\mathrm{d}t,$$

da cui si deduce che

$$\frac{1}{2h}\int_h^T \Big(\int_\Omega (\varrho_m(t) - \varrho_m(t-h))(\boldsymbol{u}_m(t-h))^2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_3}{\sqrt{h}}\,,$$

e finalmente, si ha

$$\int_h^T \Big(\frac{\partial}{\partial t}\,\varrho_m(t)\boldsymbol{u}_m(t),\ \boldsymbol{u}_{mh}(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant c_1 + \frac{c_4}{\sqrt{h}} - \frac{1}{h}\int_h^T \big|\sqrt{\varrho_m(t)}\,\big(\boldsymbol{u}_m(t-h) - \boldsymbol{u}_m(t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}t.$$

Valutiamo, ora, il secondo termine della (3.21).

$$\int_h^T \Big|\int_\Omega \varrho_m u_{jm}\,\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j}\,u_{ihm}\,\mathrm{d}x\Big|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c\int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|\boldsymbol{u}_m(t)\| \cdot \|\boldsymbol{u}_{hm}(t)\|_{L^4(\Omega)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c}{h}\int_h^T \Big(\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \cdot \int_{t-h}^t \|\boldsymbol{u}_m(s)\|\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{c}{\sqrt{h}}\int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \Big(\int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(s)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_5}{\sqrt{h}}\,.$$

Valutiamo il terzo termine della (3.21).

$$\int_h^T a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{hm})\,\mathrm{d}t = \int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\| \cdot \|\boldsymbol{u}_{mh}(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{h}} \int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\| \cdot \Big(\int_h^T \|\boldsymbol{u}_m(s)\|\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_6}{\sqrt{h}}\,.$$

Valutiamo il quarto termine della (3.21).

$$m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\,\boldsymbol{u}_m(t), \frac{1}{h}\int_{t-h}^t \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), \frac{1}{h}\int_{t-h}^t (\boldsymbol{u}_m(s) - P_k\,\boldsymbol{u}_m(s)))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$+ m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), \frac{1}{h}\int_{t-h}^t P_k\boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s - P_k\,\boldsymbol{u}_m(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$+ m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), P_k\boldsymbol{u}_m(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora $1/h\int_{t-h}^t P_k\boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s$ appartiene al convesso k per cui

$$m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), \frac{1}{h}\int_{t-h}^t P_k\boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s - P_k\,\boldsymbol{u}_m(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

e dato che

$$m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), P_k\boldsymbol{u}_m(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant c\,,$$

si ha

$$m\int_h^T \Big(\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t), \frac{1}{h}\int_{t-h}^T \boldsymbol{u}_m(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{m}{h}\int_h^T \Big(|\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t)| \cdot \int_{t-h}^t |\boldsymbol{u}_m(s) - P_k\boldsymbol{u}_m(s)|\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t + c_7$$

$$\leqslant \frac{m}{\sqrt{h}}\int_0^T \Big(|\boldsymbol{u}_m(t) - P_k\boldsymbol{u}_m(t)| \cdot \Big(\int_h^T |\boldsymbol{u}_m(s) - P_k\boldsymbol{u}_m(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\,\mathrm{d}t + c_7$$

$$\leqslant c_7 + \frac{c_8}{\sqrt{h}}\,.$$

Valutiamo l'ultimo termine della (3.21).

$$\left|\int_h^T (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_{hm})\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_h^T \|\varrho_m f\|_{V'} \cdot \|\boldsymbol{u}_{hm}\|\,\mathrm{d}t \leqslant c_h\sqrt{h}\,.$$

Così, finalmente, si ha che il primo membro della (3.21) è maggiorato da

$$\frac{c_{10}}{\sqrt{h}} - \frac{1}{h}\int_h^T |\sqrt{\varrho_m(t)}\,(\boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_m(t-h)|^2)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\,,$$

per cui

$$\int_0^{T-h} |\sqrt{\varrho_m(t+h)}\,(\boldsymbol{u}_m(t+h) - \boldsymbol{u}_m(t))|^2\,\mathrm{d}t \leqslant c\sqrt{h} \tag{3.25}$$

e la (3.21) è dimostrata.

Ora, dato che $\varrho_m(t)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^\infty(Q)$ indipendente da m si ha

$$\int_0^{T-h} |\varrho_m(t-h)\,(\boldsymbol{u}_m(t+h) - \boldsymbol{u}_m(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant c\sqrt{h}\,. \tag{3.26}$$

Siccome $\partial\varrho_m/\partial t$ appartiene ad un insieme limitato in $L^\infty(0, T; H^{-1})$ indipendente da m, si ha

$$\|\varrho_m(t+h) - \varrho_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant ch\,. \tag{3.27}$$

Poichè il prodotto $\varrho_m(t)\,\boldsymbol{h}_m(t)$ è continuo da $H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to W^{-1,r}$ con $r<\frac{3}{2}$ ($W^{-1,r}$ è il duale dell'usuale spazio di Sobolev $W^{1,r'}$ con $1/r + 1/r' = 1$), sommando (3.26) e (3.27) si ottiene

$$\|\varrho_m(t+h)\,\boldsymbol{u}_m(t+h) - \varrho_m(t)\,\boldsymbol{u}_m(t)\|_{L^2(0,T-h;\,W^{-1,r}(\Omega))} \leqslant c\sqrt{h}\,.$$

Dato che $\varrho_m(t)\ \boldsymbol{u}_m(t)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ indipendente da m, dal teorema di compattezza sopra esposto si ha che $\varrho_m(t)\,\boldsymbol{u}_m(t)$ appartiene ad un insieme relativamente compatto in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ per cui

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m(t)\,\boldsymbol{u}_m(t) \underset{L^2(0,T;\,H^{-1}(\Omega))}{=} \varrho(t)\,\boldsymbol{u}(t) \quad \text{nella topologia forte}\,; \tag{3.28}$$

così dalla (3.15) e (3.28) si ricava la (3.19).

Mostriamo, ora, che le funzioni $(\boldsymbol{u}, \varrho)$ date dalle (3.15), (3.15)′ sono soluzioni del sistema (2.6), ..., (2.10).

Sia $\boldsymbol{v}(t)$ un generico vettore in Φ tale che $\boldsymbol{v}(t) \in k$ e sia $\boldsymbol{v}_m(t)$ la sua proiezione in V_m. Poichè $\boldsymbol{v}_m(t) \to \boldsymbol{v}(t)$ fortemente in $L^2(Q)$ si ha che definitivamente $\boldsymbol{v}_m(t) \in k$, cioè esiste un m_0 tale che $\forall m > m_0$, $\boldsymbol{v}_m(t) \in k$; ora, scelto $m > \overline{m} > m_0$ si ha

$$\int_0^T \Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho_m \boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m \Big) + \int_\Omega \varrho_m u_{jm} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} (\boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m)_i \, dx + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m)$$

$$+ m(\beta(\boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m) - (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m) \Big\} \, dt = 0 \, .$$

Dato che $m(\beta(\boldsymbol{u}_m), \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m) \leqslant 0$, si ha

$$\int_0^T \Big\{ \Big(\frac{\partial \varrho_m \boldsymbol{u}_m}{\partial t}, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m \Big) - \int_\Omega \varrho \boldsymbol{u}_{jm} u_{im} \frac{\partial (\boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u})_i}{\partial x_j} \, dx + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m)$$

$$- (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m) \Big\} \, dt \geqslant 0 \, .$$

Ripetendo lo stesso procedimento per ricavare la (2.9) dalla (2.4) si ha

$$\int_0 \Big\{ \Big(\varrho_m \frac{\partial \boldsymbol{v}_m}{\partial t}, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m \Big) + \int_\Omega \varrho_m u_{jm} \frac{\partial v_{im}}{\partial x_j} (\boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m)_i \, dx + \mu a(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m)$$

$$- (\varrho_m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_{\overline{m}} - \boldsymbol{u}_m) \Big\} \, dt \geqslant - \big| \sqrt{\varrho_m(0)} \, (\boldsymbol{v}_{\overline{m}}(0) - \boldsymbol{u}_m(0)) \big|^2 \, .$$

Con procedimenti standard, passando al limite in m, si ha che $\boldsymbol{u}$ soddisfa (2.9) e $\varrho(x, t)$ soddisfa (2.10).

Il teorema è così dimostrato.

Bibliografia

[1] S. N. Antonzev and A. V. Kajikov, *Mathematical study of flows of non homogeneous fluids*, Novosibirsk Lecture of the University 1973.

[2] M. Biroli, *Sur l'inéquation d'évolution de Navier-Stokes*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **52** (1972), 811-820.

[3] A. V. Kajikov, *Resolution of boundary value problems for non homogeneous viscous fluids*, Dokl. Akad. Nauk. **216** (1974), 1008-1010.

[4] O. A. Ladyzenskaja and V. A. Solonnikov, *Unique solvability of an initial boundary value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids*, J. Soviet Math. **9** (1978), 697-749.

[5] J. L. LIONS: [•]$_1$ *Problems connected with Navier-Stokes, non-linear evolution equations* (Editor G. Crandall), Academic Press 1978; [•]$_2$ *Boundary value problems of mathematical physics. Contemporary development in continuum mechanics and partial differential equations* (G. M. de La Penha and L. A. Medeiros Editors), North-Holland Publishing Company 1978; [•]$_3$ *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod, Paris 1969.

[6] G. PROUSE, *On a unilateral problem for the Navier-Stokes equations*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **52** (1972), 337-342.

[7] J. SIMON, *Ecoulement d'un fluide non-homogène avec densité initiale s'annullant*, C. R. Acad. Sci. **287** (1978), 1009-1012.

Summary

We prove the existence of a solution of a variational inequality connected with the equations of a viscous incompressible non-homogeneous fluid.

* * *