Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 361-371

CARLO DAPUETO (*)

Sull'aritmetizzazione della sintassi del primo ordine (**)

1 - Introduzione

In questo lavoro presentiamo alcune versioni generalizzate dei teoremi di incompletezza fino a prendere in considerazione, da una parte, una sottoteoria Π dell'aritmetica di Robinson N e, dall'altra, teorie con linguaggi e assiomatizzazioni «ricorsivamente enumerabili». Cerchiamo di dare una esposizione semplice e non ambigua, anche alla luce degli errori e delle interpretazioni «assolute» con cui i risultati di Gödel (specialmente il secondo teorema di incompletezza) vengono spesso presentati nei testi divulgativi (ad esempio, ignorando completamente le riflessioni suscitate da Feferman [**5**]) e che sono state in parte alimentate da alcune trattazioni superficiali in testi scientifici (ricordiamo, per esempio, la polemica di Wang [**13**], p. 338, contro Kleene [**8**], p. 211).

Per le notazioni e le definizioni seguiamo [**12**], a meno di alcune assunzioni esplicitamente formulate successivamente. In particolare, N è l'aritmetica di Robinson; P è la cosiddetta aritmetica del primo ordine di Peano; ω è l'insieme dei numeri naturali; a, b, i, j, m e n, F e G, Q e R, L e T, eventualmente con indici, sono, rispettivamente, numeri naturali, funzioni, insiemi (o relazioni), un linguaggio e una teoria del primo ordine; le lettere $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, le lettere $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, le lettere $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{w}$, eventualmente con indici, sono usate come variabili sintattiche (del primo ordine) per rappresentare, rispettivamente, espressioni, formule e variabili.

Introduciamo le seguenti ulteriori convenzioni. Con $L(T)$ indichiamo il linguaggio di T. Scriviamo $\boldsymbol{A} \in L$, $L_1 \subset L_2$ e $T_1 \subset T_2$ per affermare, rispetti-

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(**) Ricevuto: 18-XII-1980.

vamente, che A è una formula di L, che i simboli non-logici di L_1 sono simboli non-logici di L_2 e che i teoremi di T_1 sono teoremi di T_2. Se Γ è un insieme di formule di L e $L \subset L(T)$, allora EQ (Γ) indica l'insieme delle formule di L logicamente equivalenti a formule di Γ e $\mathrm{EQ}_T(\Gamma)$ indica l'insieme delle formule di $L(T)$ equivalenti in T a formule di Γ. Se $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ è l'insieme delle variabili libere di A e $\boldsymbol{x}_i$ precede $\boldsymbol{x}_{i+1}$ nell'ordine alfabetico, FV (A) rappresenta la sequenza $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Il numerale contenente $\boldsymbol{n}$ occorrenze del simbolo di successore si indica con $\bar{n}$. Se $A \in L$ e FV (A) $= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, $A[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ sta per $A_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n}[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$; se, inoltre, $L(N) \subset L$, $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sta per $A[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n]$.

2 - Formulazioni generalizzate del secondo teorema di incompletezza

Usando alcune idee sviluppate in [**7**]$_2$, stabiliamo una versione del secondo teorema di incompletezza (cfr. Teor. 1) che evita la seconda delle tre condizioni di derivabilità di Hilbert e Bernays ([**5**], vol. 2, p. 286) (le condizioni originali più o meno corrispondono, nell'ordine, alle condizioni (a), (c) e (b) sotto enunciate). Presentiamo anche una formulazione (cfr. Teor. 2) che include la seconda condizione (in una forma più debole di quella necessaria se per la dimostrazione si facesse uso — come in [**11**] — del risultato di Löb [**9**]); ciò ci consentirà di dare una versione generalizzata del primo teorema di incompletezza (cfr. n. **6**).

Teorema 1. *Supponiamo che:*

(1) *T sia consistente, $T_1 \subset T$, $L(N) \subset L(T_1)$ e $\lceil\cdot\rceil$ sia una funzione dall'insieme dei designatori di $L(T)$ in ω;*

(2) *esista* $\mathrm{Th} \in L(T)$ *con una sola variabile libera tale che per ogni $A \in L(T)$:*

(a) *se* $\vdash_T A$ *allora* $\vdash_{T_1} \mathrm{Th}(\lceil A\rceil)$, (b) $\vdash_{T_1} \mathrm{Th}(\lceil A\rceil) \to \mathrm{Th}(\lceil \mathrm{Th}(\lceil A\rceil)\rceil)$;

(3) *esiste $\delta \in \omega$ tale che* $\lceil\neg \mathrm{Th}(\delta)\rceil = \delta$.

Allora $\mathrm{Th}(\lceil \mathrm{Th}(\delta)\rceil) \to \neg \mathrm{Th}(\lceil\neg \mathrm{Th}(\delta)\rceil)$ *non è un teorema di T.*

Dim. Supponiamo che $\vdash_T \mathrm{Th}(\lceil \mathrm{Th}(\delta)\rceil) \to \neg \mathrm{Th}(\lceil\neg \mathrm{Th}(\delta)\rceil)$. Allora, per (3), $\vdash_T \mathrm{Th}(\lceil \mathrm{Th}(\delta)\rceil) \to \neg \mathrm{Th}(\delta)$. Da (b) segue che $\vdash_T \mathrm{Th}(\delta) \to \neg \mathrm{Th}(\delta)$, da cui $\vdash_T \neg \mathrm{Th}(\delta)$. Ma ciò, per (a) e (3), implica che $\vdash_T \mathrm{Th}(\delta)$: contraddizione.

Teorema 2. *Valgono le ipotesi del Teor.* 1 *fino alla condizione* (2) *compresa; supponiamo inoltre che*

(c) *se* $\vdash_T \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$, *allora* $\vdash_{T_1} \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{A} \urcorner) \rightarrow \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{B} \urcorner)$ (*per ogni* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in L(T)$);

(3)' *esiste* $\boldsymbol{D} \in L(T_1)$ *tale che* $\vdash_{T_1} \boldsymbol{D} \leftrightarrow \neg \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner)$.

Allora $\mathrm{Th}\,(\ulcorner \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner) \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Th}\,(\ulcorner \neg \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner) \urcorner)$ *non è un teorema di* T.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Teor. 1 (basta osservare che, per (c) e (3)', da $\vdash_T \mathrm{Th}\,(\ulcorner \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner) \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Th}\,(\neg \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner) \urcorner)$ segue che $\vdash_T \mathrm{Th}\,(\ulcorner \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner) \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Th}\,(\ulcorner \boldsymbol{D} \urcorner)$).

3 - Gödelizzazioni dei linguaggi del primo ordine

Def. 3. L è *finito* se l'insieme FS_L dei simboli funzionali e l'insieme PS_L dei simboli predicativi non-logici (il simbolo predicativo $=$ è un simbolo logico) sono finiti. L è *finitario* se i suoi simboli non-logici (così come quelli logici) sono costruiti utilizzando una quantità finita di segni; ovviamente, tale condizione equivale a richiedere che ogni simbolo funzionale n-ario abbia la forma f^n_m per qualche m e ogni simbolo predicativo non-logico n-ario abbia la forma A^n_m per qualche m. Siano $F_{1,L}$ e $F_{2,L}$ due applicazioni binarie parziali che a (m, n) associno, rispettivamente, — se esistono in L — f^m_n e A^m_n. L è *semieffettivo* (*effettivo*) se è finitario e se è possibile costruire una applicazione G_L dall'insieme dei simboli non-logici di L in ω tale che: (1) G_L sia iniettiva, (2) $G_L \circ F_{1,L}$ e $G_L \circ F_{2,L}$ siano calcolabili e, (3) $G_L(\mathrm{FS}_L)$ e $G_L(\mathrm{PS}_L)$ siano insiemi positivamente calcolabili (insiemi calcolabili).

Def. 4. L è *ricorsivamente enumerabile* — brevemente, r. e. — (*ricorsivo*) se soddisfa le condizioni richieste per essere semieffettivo (effettivo) così modificate: (2) va sostituita da (2)' $G_L \circ F_{1,L}$ e $G_L \circ F_{1,L}$ siano funzioni ricorsive parziali; (3) va sostituita da (3)' $G_L(\mathrm{FS}_L)$ e $G_L(\mathrm{PS}_L)$ siano insiemi r.e. (insiemi ricorsivi).

Def. 5. L sia semieffettivo (effettivo). Sia V la applicazione che, per ogni n, associa n alla n-esima variabile nell'ordine alfabetico; siano $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$ e k_4 numeri naturali differenti; siano K_1 e K_2 funzioni iniettive calcolabili da ω in $\omega - \{\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3, \mathrm{k}_4\}$ che enumerino insiemi calcolabili disgiunti. Allora, per ogni simbolo $\boldsymbol{u}$ di L chiamiamo *numero-simbolo* di $\boldsymbol{u}$ il numero $SN(\boldsymbol{u})$ dove $SN(\neg) = \mathrm{k}_1$, $SN(\rightarrow) = \mathrm{k}_2$, $SN(\exists) = \mathrm{k}_3$, $SN(=) = \mathrm{k}_4$, $SN(\boldsymbol{x}) = \mathrm{K}_1(V(\boldsymbol{x}))$ e, per ogni simbolo non-logico $\boldsymbol{v}$, $SN(\boldsymbol{v}) = \mathrm{K}_2(G_L(\boldsymbol{v}))$. Inoltre, sia H una funzione iniettiva calcolabile da $\bigcup_{n\in\omega}\omega^n$ in ω che enumera un insieme calcolabile; allora, per ogni designatore $\boldsymbol{u}$, se $\boldsymbol{u}$ è $\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\ldots\boldsymbol{u}_n$ ($\boldsymbol{v}$ è un simbolo di indice n e $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ sono designatori), chiamiamo *numero-espressione* di $\boldsymbol{u}$ il numero $\lceil\boldsymbol{u}\rceil$ dove $\lceil\boldsymbol{u}\rceil = H(SN(\boldsymbol{v}), \lceil\boldsymbol{u}_1\rceil, \ldots, \lceil\boldsymbol{u}_n\rceil)$. Per ogni scelta di G_L, k_i, K_i e H, diciamo che la applicazione $\lceil\cdot\rceil$ è una *gödelizzazione* di L.

Def. 6. L sia r.e. (o, in particolare, ricorsivo). V, k_i, K_i, SN, H e $\lceil\cdot\rceil$ soddisfino le condizioni della Def. 5 modificate sostituendo « calcolabile » con « ricorsivo ». Allora la gödelizzazione di $L\lceil\cdot\rceil$ viene detta *ricorsiva.*

Osservazione 7. Le definizioni 5 e 6 generalizzazo le usuali definizioni. Dunque, si possono facilmente dare per una teoria le definizioni di decidibilità e semidecidibilità, di decidibilità e semidicidibilità ricorsive, e di assiomatizzazione e assiomatizzabilità effettive, semieffettive, ricorsive e r.e.

4 - Numerabilità sintattica

Def. 8. Supponiamo che $L(N) \subset L(T)$, $F, R \subset \omega^{n+1}$, F sia una funzione n-aria, $\boldsymbol{A} \in L(T)$ e $\mathrm{FV}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1})$. Diciamo che $\boldsymbol{A}$ *numera (sintatticamente)* R in T se, per ogni $a_1, \ldots, a_{n+1}$, $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in R$ se e solo se $\vdash_T \boldsymbol{A}(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Diciamo che $\boldsymbol{A}$ *numera (sintatticamente) fortemente* F in T se $\boldsymbol{A}$ numera F in T e $\vdash_T \exists!\boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{A}$.

Osservazione 9. Se $\boldsymbol{A}$ numera in T la funzione n-aria F e per ogni $a_1, \ldots, a_n \vdash_T \exists!\boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{A}(a_1, \ldots, a_n)$, allora $\exists!\boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ numera fortemente F in T.

Def. 10. Sia Γ la minima classe di formule di $L(N)$ contenente le formule atomiche e che sia chiusa rispetto a $\mathbf{V}$, **&**, quantificazione esistenziale, quantificazione universale limitata e rispetto a $\neg$ ristretto alle formule senza occorrenze di $\exists$. Allora con BF indichiamo $\mathrm{EQ}(\Gamma)$ e diciamo che $\boldsymbol{A}$ è una B-*formula* se $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BF}$.

Def. 11. Π è la sottoteoria di N i cui assiomi non-logici sono $\boldsymbol{N7}$ e le istanze numeriche di $\boldsymbol{N1}, \ldots, \boldsymbol{N6}$, $\forall x\boldsymbol{N8}$ e $\forall x\boldsymbol{N9}$.

Teorema 12. *Sia T una estensione consistente di Π con assiomatizzazione r.e. Allora*

(1) *se F è ricorsiva esiste $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BF}$ che numera fortemente F in T,*

(2) *R è r.e. se e solo se esiste $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BF}$ che numera R in T.*

Dim. Per la prova di (1) rimandiamo ad un esame della dimostrazione del teorema di rappresentabilità (cfr. [**12**]). È sufficiente osservare, per $\boldsymbol{R3}$ (la minimalizzazione), che, se $F(a_1, \ldots, a_n) = \mu a_{n+1}(G(a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1}) = 0)$ e $\boldsymbol{A}$ con $\mathrm{FV}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+2})$ numera fortemente G in T, allora

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_{n+2}}[0] \mathbin{\&} \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}_{n+1} \rightarrow \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{y} > 0 \mathbin{\&} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{x}_{n+2}}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}])) ,$$

dove $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ non sono libere in $\boldsymbol{A}$, è una B-formula che numera F in T.

Il «se» di (2) segue dal fatto che in teoria con r.e. assiomatizzazione sono numerabili solo relazioni r.e. Per provare il «solo se» ricordiamo che per ogni relazione r.e. n-aria R è possibile costruire una relazione ricorsiva $n+1$-aria Q tale che $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ se e solo se per qualche a_{n+1} $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in Q$, così che se $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BF}$, $\mathrm{FV}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ e $\boldsymbol{A}$ numera K_Q, allora $\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{y}}[0]$ è una B-formula che numera R in T.

Teorema 13. *Se* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BF}$ *e* $\boldsymbol{A}'$ *è un'istanza numerica di* $\boldsymbol{A}$ *vera nel modello standard, allora* $\vdash_{\Pi} \boldsymbol{A}'$.

Dim. Possiamo supporre che $\boldsymbol{A} \in \Gamma$, dove Γ è l'insieme considerato in Def. 10. Procediamo per induzione sul numero delle occorrenze di $\forall$ e $\exists$. Indichiamo con $\forall_n$ (con $\exists_n$) l'insieme delle formule di Γ con al più n occorrenze di $\forall$ ($\exists$). Allora $\Gamma = \bigcup_{n,m \in \omega} (\forall_n \cap \exists_m)$. Indichiamo con $\Phi(\boldsymbol{A})$ la proposizione «se $\boldsymbol{A}'$ è un'istanza numerica di $\boldsymbol{A}$ vera, allora $\vdash_{\Pi} \boldsymbol{A}'$»; stiamo usando «vera» col significato «vera nel modello standard».

(1) Se $\boldsymbol{A} \in \exists_0$ si ha facilmente $\Phi(\boldsymbol{A})$ (ricordiamo che (○): $\forall \boldsymbol{x} < \bar{n} \boldsymbol{B}$ è equivalente in Π a $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{x}}[0] \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{x}}[\overline{n-1}]$ se $n > 0$ e a $0 = 0$ se $n = 0$).

(2) Se $\boldsymbol{A} \in \forall_0$, sia $\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{B}$ una forma prenessa di un'istanza numerica di $\boldsymbol{A}$ vera (il prefisso non contiene $\forall$ poichè $\neg$ precede solo formule prive di occorrenze di $\exists$); possiamo supporre che $\mathrm{FV}(\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$; allora esistono $a_1, \ldots, a_n$ tali che $\boldsymbol{B}(a_1, \ldots, a_n)$ è vera; $\Phi(\boldsymbol{A})$ segue dal precedente passo di dimostrazione e dal teorema di sostituzione.

(3) Sia $\boldsymbol{A} \in \forall_i \cap \exists_j$ con $i, j > 0$ e supponiamo che valga $\Phi(\boldsymbol{B})$ per ogni $\boldsymbol{B} \in \forall_{i-1} \cap \exists_{j-1}$.

Caso 1. In $\boldsymbol{A}$ c'è un'occorrenza di $\exists$ che non appartiene a sottoformule della forma $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{C}$. Possiamo costruire $\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{B}$ logicamente equivalente a $\boldsymbol{A}$ tale che ogni eventuale occorrenza di $\exists$ in $\boldsymbol{B}$ appartiene a sottoformule della forma $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{C}$. Allora ogni istanza numerica $\boldsymbol{A}'$ di $\boldsymbol{A}$ vera è logicamente equivalente a una formula $\exists x_1 \ldots \exists x_n B'$ tale che ogni istanza numerica di B' vera contiene una sottoformula della forma $\forall x < \overline{m} C$. Per ($\circ$) (cfr. il passo 1), possiamo ottenere una formula che appartiene a $\forall_{i-1} \cap \exists_{j-1}$ e che è equivalente in Π ad una istanza numerica di B' vera. $\vdash_{\Pi} A'$ segue dall'ipotesi induttiva e dal teorema di sostituzione.

Caso 2. Altrimenti. Possiamo procedere in modo simile a quanto fatto alla fine del Caso 1.

Osservazione 14. Se REF e RF sono gli insiemi, rispettivamente, delle RE-formule di [**5**] e delle R-formule di [**12**], è facile verificare, esaminando la procedura di traduzione utilizzata nella dimostrazione del teorema sulle estensioni per definizioni, che REF $\subset$ BF e RF $\subset$ BF. Si ha anche che $\mathrm{EQ}_P(\mathrm{REF}) = \mathrm{EQ}_P(\mathrm{RF}) = \mathrm{EQ}_P(\mathrm{BF})$. Se DF è l'insieme delle formule di $L(N)$ della forma $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$ con A atomica, ovviamente DF $\subset$ RF; per il teorema di Matijasevic (cfr. [**10**]) si ha che per ogni relazione r.e. R esiste una formula di DF che numera R in ogni teoria che include tutte le istanze numeriche di $N3, \ldots, N6$. È un problema aperto se $\mathrm{EQ}_P(\mathrm{DF}) = \mathrm{EQ}_P(\mathrm{BF})$; per ottenere ciò sarebbe sufficiente formalizzare in P la dimostrazione del teorema di Matijasevic, ma la difficoltà risiede nel fatto che la prova di un risultato intermedio (il lemma 1 di [**4**]) fa uso dello sviluppo in serie di Taylor (con resto di Lagrange).

5 - Una versione del teorema di Gödel-Feferman

Lemma 15. *Sia L r.e. e $L(N) \subset L$. Allora per ogni $A \in L$ con una sola variabile libera e per ogni gödelizzazione ricorsiva $\lceil \cdot \rceil$ possiamo trovare δ tale che $\delta = \lceil A(\delta) \rceil$.*

Dim. Sia u un nuovo simbolo funzionale 1-ario. Assegnamo ad esso un numero-simbolo $SN(u)$ (per esempio, $\mathrm{K}_1(0)$) differente dagli altri numeri-simbolo e estendiamo naturalmente $\lceil \cdot \rceil$ a una nuova gödelizzazione ricorsiva G. Sia B una formula che numera fortemente in N la funzione ricorsiva F così definita: $F(n) = G(A[u\overline{n}])$. Sia T la estensione per definizione di N formata introducendo u e l'assiona definente $uy = z \leftrightarrow B$, dove $\mathrm{FV}(B) = (y, z)$. Supponiamo che $\mathrm{FV}(A) = (x)$. Allora $\vdash_T u\overline{G(ux)} = \overline{G(A[u\overline{G(ux)}])}$, da cui, posto $\delta = \overline{F(G(ux))}$, poichè $\vdash_T \delta = u\overline{G(ux)}$, segue che $\delta = \overline{G(A(\delta))}$, cioè (poichè $A(\delta) \in L(N)$) $\delta = \lceil A(\delta) \rceil$.

Corollario 16. *Come nel Teor. 1 senza l'ipotesi* (3) *e aggiungendo l'ipotesi che* $L(T)$ *sia r.e. e che* $\lceil\cdot\rceil$ *sia ricorsiva.*

Consideriamo ora (nelle ipotesi del Cor. 16) la condizione (b) del Teor. 1. Supponendo che Th $\in$ BF, possiamo verificare (b) se dimostriamo che per ogni B-formula chiusa $\boldsymbol{B}$, $\vdash_{T_1} \boldsymbol{B} \to \mathrm{Th}\,(\lceil \boldsymbol{B} \rceil)$. Per ottenere questo risultato possiamo procedere formalizzando in T_1 i passi della dimostrazione del Teor. 13. Più precisamente, la versione formalizzata del Teor. 13 è: se $\boldsymbol{B} \in \mathrm{BF}$ e $\mathrm{FV}(\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, allora

$$(*) \qquad \vdash_{T_1} \boldsymbol{B} \to \exists \boldsymbol{z}(\mathrm{Th}\,[\boldsymbol{z}]\,\&\,\exists \boldsymbol{y}_1 \dots \exists \boldsymbol{y}_n(Sub_{1,\dots,n}\,[\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n, \overline{\lceil \boldsymbol{B} \rceil}, \boldsymbol{z}] \\ \&\, Num\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1]\,\&\dots\&\, Num\,[\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n])) \,,$$

dove $Sub_{i_1,\dots,i_k}$ numera fortemente in T_1 una funzione ricorsiva F tale che $F(\lceil \boldsymbol{u}_1 \rceil, \dots, \lceil \boldsymbol{u}_k \rceil, \lceil \boldsymbol{C} \rceil) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}_{i_1},\dots,\boldsymbol{x}_{i_k}}[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k]$ se $\mathrm{FV}(\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ e Num numera fortemente la funzione $n \mapsto \lceil \bar{n} \rceil$.

Analizziamo, per esempio, il caso in cui $\boldsymbol{B}$ è $\boldsymbol{x} = 0$; si ha che $\vdash_{T_1} \mathrm{Th}(\lceil 0 = 0 \rceil)\ \&\ Sub_1\,(\lceil 0 \rceil, \lceil \boldsymbol{x} = 0 \rceil, \lceil 0 = 0 \rceil)\ \&\ Num\,(0, \lceil 0 \rceil)$, da cui segue $(*)$.

Supponiamo che $\boldsymbol{B}$ sia $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Possiamo ottenere $(*)$ se dimostriamo che $\vdash_{T_1} Sub_{1,2}\,[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}, \overline{\lceil \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \rceil}, \boldsymbol{w}] \to \mathrm{Th}\,[\boldsymbol{w}]$; per ottenere questo teorema non è sufficiente che $Sub_{1,2}$ e Th rappresentino l'operazione di sostituzione in $L(T)$ e la nozione di teorema di T in modo «estensionalmente» corretto (cioè che siano rappresentazioni della rispettiva funzione e della rispettiva relazione mediante la Def. 8), ma devono rappresentarle correttamente anche dal punto di vista «intensionale» (cfr. [**5**]); cioè devono preservare formalmente in T_1 le proprietà sintattiche che legano la nozione di teorema di T e l'operazione di sostituzione in $L(T)$ non solo sui (numerali dei) numeri-espressione, ma anche sulle variabili.

Analizzando gli altri casi, concludiamo che possiamo provare $(*)$ se abbiamo costruito gradualmente B-formule che numerino in T_1 le operazioni ricorsive e le relazioni r.e. sull'insieme dei (numeri-espressione dei) designatori di $L(T)$ necessarie per dare gli assiomi logici, le regole di inferenza e gli assiomi specifici di Π procedendo nel seguente (o in un analogo) modo.

Sia F una funzione ricorsiva binaria che associ a_i a (m, i) e n a $(m, 0)$ se m è l'immagine di $(a_1, \dots, a_n)$ mediante H (cfr. la Def. 6) e $0 < i \leqslant n$ e che associ 0 a $(m, 0)$ se m non appartiene all'immagine di H. Supponiamo che $\Pi \subset T_1$, che Pr e IV siano B-formule che numerino fortemente in T_1, rispettivamente, F e K_1 (cfr. la Def. 6) e che Fun e $Pred$ siano B-formule che numerino in T_1 (rispettivamente) la relazione binaria R_1 (R_2) tale che $(m, n) \in R_1$ ($(m, n) \in R_2$) se e solo se m è il numero-simbolo di un simbolo funzionale (un simbolo predicativo non-logico) n-ario di $L(T)$. Indichiamo con Var la B-formula $Pr\,[x, 0, \bar{1}]\,\&\,\exists z(Pr\,[x, \bar{1}, z]\,\&\,\exists x IV[x, z])$. Costruiamo, ora, una B-formula *Term* che «intensionalmente» rappresenti «essere un termine», cioè tale che

$$\vdash_{T_1} Term\,[x] \leftrightarrow Var\,[x] \bigvee \exists y(Pr\,[x, \bar{0}, S(y)]\,\&\,\exists z(Fun\,[z, y]\,\&\,Pr\,[x, \bar{1}, z])$$

$$\&\,\forall z(\bar{1} < z\,\&\,z \leqslant S(y)) \rightarrow \exists y(Pr\,[x, z, y]\,\&\,Term\,[y])) .$$

È chiaro che noi possiamo costruire *Term* se possiamo formalizzare in T_1 le definizioni per casi; poichè queste sono riconducibili a definizioni «ricorsive primitive», è sufficiente formalizzare in T_1 la ricorsione primitiva, cioè, per ogni $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ tali che FV $(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, FV $(\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+2})$, $\vdash_{T_1} \exists!\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{A}$ e $\vdash_{T_1} \exists!\boldsymbol{x}_{n+2}\boldsymbol{B}$, costruire $\boldsymbol{C}$ con FV $(\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1})$ tale che

$$\vdash_{T_1} \exists \boldsymbol{x}_{n+1}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}_n}[0]\,\&\,\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_n}[\boldsymbol{x}_{n+1}])$$

$$\&\,\forall \boldsymbol{x}_n\,\exists \boldsymbol{x}_{n+1}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}_n}[S(\boldsymbol{x}_n)]\&\exists \boldsymbol{x}_{n+2}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{x}_{n+2}}[\boldsymbol{x}_{n+2}, \boldsymbol{x}_{n+1}]\&\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}_{n+1}}[\boldsymbol{x}_{n+2}])) \text{ e } \vdash_{T_1} \exists!\boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{C}.$$

È noto che possiamo ottenere ciò se in T_1 si può provare il β-lemma di Gödel (che permette di rimpiazzare «sequenza finita di numeri» con «coppia di numeri»), e, quindi, se $P \subset T_1$ (per la dimostrazione, cfr. [**3**] o [**12**]).

In modo simile si possono costruire formule che rappresentano «intensionalmente» le nozioni di formula, assioma logico, regola di inferenza, ..., così che, comunque scegliamo una B-formula che numeri «essere il numero espressione di un assioma non-logico di T» — stiamo supponendo che T abbia una assiomatizzazione r.e. —, possiamo definire una B-formula Th che rappresenta «intensionalmente» la nozione di teorema. Otteniamo così il seguente

Teorema 17. *Supponiamo che $P \subset T_1 \subset T$ e che T sia una teoria consistente con assiomatizzazione r.e. Allora, per ogni gödelizzazione ricorsiva $\lceil\cdot\rceil$ di $L(T)$ e per ogni* Th $\in$ BF *definita come abbiamo descritto sopra, possiamo costruire $\boldsymbol{A} \in L(T)$ tale che* $\neg\,(\mathrm{Th}\,(\lceil \boldsymbol{A}\rceil)\,\&\,\mathrm{Th}\,(\lceil\neg\,\boldsymbol{A}\rceil))$ *non sia un teorema di T.*

Dim. Abbiamo visto sopra che in queste ipotesi per ogni $\boldsymbol{B} \in$ BF possiamo provare $(*)$; da ciò segue che Th verifica la condizione (b) del Teor. 1. Dal Cor. 16 otteniamo, quindi, la tesi.

Osservazione 18. Prendere *Pr*, *IV*, *Fun*, *Pred* e la formula che numera «essere il numero-espressione di un assioma non-logico» in BF è necessario per ottenere Th $\in$ BF. Tuttavia è importante sottolineare che questa scelta è «intensionalmente» corretta. Infatti BF può essere considerata una versione formalizzata della classe delle relazioni r.e.: abbiamo non solo il Teor. 12, ma possiamo provare facilmente le versioni formali delle regole RE1-RE4 (cfr. [**12**]) e delle altre regole per ottenere relazioni r.e.; cioè le proprietà di chiusura di BF sono analoghe a quelle delle relazioni r.e.

Osservazione 19. Oltre a far riferimento a teorie con linguaggi e assiomatizzazioni più generali (di quelli considerati, per esempio, in [**2**], [**5**], [**11**], [**12**]), la nostra versione del teorema di Gödel-Feferman prende in considerazione una generica gödelizzazione ricorsiva. La dimostrazione del Teor. 17 che abbiamo delineato non fa ricorso ad una verifica della seconda condizione di derivabilità. Tuttavia, allo stesso modo in cui si può provare $(*)$ (e, così, la terza condizione di derivabilità) possiamo provare anche questa condizione. In altre parole, lo schema di induzione probabilmente è essenziale non solo per manipolare le sequenze a un livello tale da permettere di internalizzare il modus ponens, ma anche per verificare la terza condizione di derivabilità, che, a differenza delle altre due condizioni, non corrisponde ad una proposizione generale della metamatematica. In base a ciò possiamo dire che la scoperta (in [**7**]$_2$) di ridondanze nelle condizioni di derivabilità è utile essenzialmente per l'estensione (fatta in [**7**]$_2$) del teorema di consistenza ad alcuni sistemi « cut free ».

Osservazione 20. Non si sa ancora se in N si possono provare le usuali formule che esprimono la consistenza (di N); la questione fu posta in [**7**]$_1$. In [**1**] viene individuata una teoria finitamente assiomatizzata T_0 che estende propriamente N, per ogni teoria ricorsivamente assiomatizzata T viene definita una formula Th che numera in T_0 la relazione « essere il numero-espressione di un teorema di T » e si dimostra che $\neg$ Th $(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$ non è un teorema di T_0. Tuttavia, la dimostrazione è condotta semanticamente e dipende dalla particolare rappresentazione sintattica della nozione di sequenza che è stata scelta; inoltre non si sa se $\neg$ Th $(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$ è un teorema di un'estensione di T_0 o no, così che [**1**] lascia aperto il problema per le teorie « comprese » tra T_0 e P.

6 - Alcune considerazioni generali

Sia T un'estensione di P con assiomatizzazione r.e. e sia Th una numerazione sintattica in T della relazione « essere il numero-espressione di un teorema di T ». Per l'Oss. 18 possiamo dire che BF (che include le formule Th impiegate nelle usuali dimostrazioni del secondo teorema di incompletezza; cfr. l'Oss. 14) è tale che, se vale la tesi di Church, $\mathrm{EQ}_T(\mathrm{BF})$ può essere considerata una riproduzione in T della nozione di calcolabilità positiva intensionalmente corretta e probabilmente ottimale. Dal Teor. 17 risulta che possiamo costruire A tale che $\neg(\mathrm{Th}(\lceil A\rceil) \,\&\, \mathrm{Th}(\lceil\neg A\rceil))$ non è un teorema di T se scegliamo come Th una B-formula costruita formalizzando in P una dopo l'altra le definizioni (induttive) delle varie nozioni sintattiche partendo da B-formule che numerino sintatticamente una decodificazione della rappresentazione in ω delle sequenze di numeri utilizzata per definire la gödelizzazione ricorsiva, e gli insiemi r.e. dei (numeri-espressione) dei simboli funzionali, dei simboli predicativi non-logici e degli assiomi non-logici di T.

Possiamo dunque concludere che, accettando la tesi di Church e assumendo che tutte le dimostrazioni «finitarie» possano essere formalizzate in P, è ragionevole pensare che sia impossibile dare una dimostrazione finitaria della consistenza di T.

Per completezza, dimostriamo ora un lemma necessario per ottenere il Teor. 17 come caso particolare del Teor. 2 invece che del Teor. 1 e da esso deriviamo una versione generalizzata del primo teorema di incompletezza.

Lemma 21. *Se $L(T)$ è r.e. e $\Pi \subset T$, allora per ogni gödelizzazione ricorsiva $\lceil\cdot\rceil$ di $L(T)$ e per ogni $\boldsymbol{A} \in L(T)$ con una sola variabile libera possiamo costruire $\boldsymbol{B} \in L(T)$ tale che $\vdash_T \boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{A}(\lceil\boldsymbol{B}\rceil)$.*

Dim. Cerchiamo di costruire $\boldsymbol{B}$ chiusa tale che $\vdash_T \boldsymbol{B} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{y} = \overline{\lceil\boldsymbol{B}\rceil} \,\&\, \boldsymbol{A}[\boldsymbol{y}])$. Sia FV $(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x})$. Poichè l'insieme Δ delle formule di $L(T)$ con variabile libera $\boldsymbol{x}$ contenenti solo simboli non-logici che appaiono in $\boldsymbol{A}$ o che appartengono a $L(N)$ è ricorsivo, possiamo considerare la funzione ricorsiva F così definita: se $n = \lceil\boldsymbol{C}\rceil$ per qualche $\boldsymbol{C} \in \Delta$, $F(n) = \lceil\boldsymbol{C}(\lceil\boldsymbol{C}\rceil)\rceil$, altrimenti, per esempio, $F(n) = \lceil 0\rceil$. Sia $\boldsymbol{D}$ una B-formula con FV $(\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ che numeri fortemente F in T; allora per ogni $\boldsymbol{C} \in \Delta$

$$\vdash_T \boldsymbol{D}[\overline{\lceil\boldsymbol{C}\rceil}, \boldsymbol{y}] \to \overline{\lceil\boldsymbol{C}(\lceil\boldsymbol{C}\rceil)\rceil} = \boldsymbol{y}\,.$$

Possiamo perciò prendere come $\boldsymbol{B}$ la formula $\boldsymbol{B}_1(\lceil\boldsymbol{B}_1\rceil)$ dove $\boldsymbol{B}_1$ è $\exists\boldsymbol{y}(\boldsymbol{D} \,\&\, \boldsymbol{A}[\boldsymbol{y}])$.

Teorema 22. *Sia T un'estensione consistente di Π con r.e. assiomatizzazione. Allora possiamo costruire una formula $\boldsymbol{A} \in L(T)$ tale che nè $\boldsymbol{A}$ nè $\neg\boldsymbol{A}$ sono teoremi di T.*

Dim. Sia $\lceil\cdot\rceil$ una gödelizzazione ricorsiva di $L(T)$. Sia Th una formula di $L(T)$ che numera in T la relazione «essere il numero-espressione di un teorema di T»; una formula tale esiste per il Teor. 12. Sia $\boldsymbol{D}$ una formula di $L(T)$ tale che $\vdash_T \boldsymbol{D} \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Th}(\lceil\boldsymbol{D}\rceil)$; una formula tale esiste per il Lemma 21. Si ha facilmente che nè $\mathrm{Th}(\lceil\boldsymbol{D}\rceil)$ nè $\neg\,\mathrm{Th}(\lceil\boldsymbol{D}\rceil)$ possono essere teoremi di T.

Bibliografia

[1] A. Bezboruah and J. C. Shepherdson, *Gödel's second incompleteness theorem for Q*, Journ. Symbolic Logic **41** (1976), 503-512.

[2] G. Boolos and R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge 1974.

[3] C. Dapueto, *Sulla prova di Feferman della indimostrabilità con metodi effettivi della consistenza di teorie del primo ordine « contenenti » l'aritmetica*, Tesi di Laurea, Genova 1977.

[4] M. Davis, H. Putnam and J. Robinson, *The decision problem for exponential diophantine equations*, Ann. Math. **74** (1961), 425-436.

[5] S. Feferman, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fund. Math. **49** (1960), 35-92.

[6] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1 and vol. 2, Berlin 1934/1939.

[7] R. G. Jeroslow: $[\bullet]_1$ *Consistency statements in formal theories*, Fund. Math. **72** (1971); $[\bullet]_2$ *Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem*, J. Symbolic Logic **38** (1973), 359-367.

[8] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam 1952.

[9] M. H. Löb, *Solution of a problem of Leon Henkin*, J. Symbolic Logic **20** (1955), 115-118.

[10] J. V. Matijasevic, *Diophantine representation of r.e. predicates*, Proced. Second Scand. Symp., J. E. Fenstad (ed.), Amsterdam 1971.

[11] J. D. Monk, *Mathematical Logic*, New York 1976.

[12] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Add. Wesley, Reading 1967 (ed. ital. Torino 1981).

[13] H. Wang, *A Survey of Mathematical Logic*, Pechino 1963.

Résumé

On présente quelques versions généralisées des théorèmes d'incomplétude en cherchant à donner une exposition sans les ambigüités qui sont présentes souvant dans les textes de vulgarisation.

* * *