Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 355-360

RAFFAELE SCAPELLATO (*)

Gruppi infiniti che ammettono funzioni di Steiner (**)

Introduzione

Poichè i sistemi di Steiner infiniti sono stati studiati solo accidentalmente (abbiamo potuto trovare soltanto [3], [6]), sembra interessante individuare i gruppi infiniti che ammettono funzioni di Steiner. In questo lavoro individuiamo ampie classi di gruppi abeliani infiniti dotati di tali funzioni.

In particolare, mostriamo che un gruppo abeliano divisibile e privo di tor sione 2 ammette funzioni di Steiner.

1 - Generalità

1.1 – Indichiamo con Z il gruppo additivo degli interi, con N l'insieme degli interi strettamente positivi, con Q il gruppo additivo dei razionali, con $Z(p^\infty)$ il p-gruppo quasiciclico. Usiamo inoltre la notazione additiva per i gruppi ed indichiamo con G^0 l'insieme degli elementi non nulli di un gruppo G.

Si dice, con [2], *funzione di Steiner* definita su un gruppo G ogni funzione involutoria f definita su G che tenga fisso lo zero e tale che, per ogni x di G, si abbia $f(-x) = f(x) - x$. Un gruppo G ammette una tale funzione se, e solo se, esiste un STS dotato di un gruppo di automorfismi transitivo, regolare e isomorfo a G.

Se f è una funzione di Steiner su G, diremo *traiettoria* di f individuata da un elemento x di G l'insieme $\{x, f(x), -x, f(x)-x, -f(x), x-f(x)\}$. Secondo $[1]_2$, una traiettoria può avere sei, due oppure un solo elemento (in

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-XII-1980.

quest'ultimo caso, esso è lo zero); una traiettoria costituita da due elementi si dice *fine*, quella costituita dal solo zero si dice *banale*.

1.2 – Dato un gruppo G, privo di torsione 2, se gli elementi x, y di G^0 sono distinti, non opposti e tali che $2x \neq y$ e $2y \neq x$, diremo *esagono* associato alla coppia (x, y) l'insieme $\{x, y, -x, y-x, -y, x-y\}$. Un esagono ha sempre esattamente *sei* elementi.

Def. Dato un gruppo G, privo di torsione 2, ed un suo sottoinsieme H, chiuso rispetto all'inversione additiva, diremo *funzione di Steiner parziale su* H ogni funzione involutoria f su H, tale che, per ogni $x \in H$, sia $f(-x) = f(x) - x$.

La definizione di traiettoria data per le funzioni di Steiner resta valida anche per quelle parziali.

Lemma 1. *Siano G un gruppo privo di elementi di caratteristica 2 e H un sottoinsieme di G^0. Detta P una partizione di H costituita da esagoni, esiste una funzione di Steiner parziale f su H, le cui traiettorie non banali sono tutti e soli gli elementi di P.*

Sia infatti P una partizione di H costituita da esagoni. È anzitutto chiaro che allora H è chiuso rispetto alla inversione additiva. Definiamo la f su ogni esagono $\{x, y, -x, y-x, -y, x-y\}$, chiedendo che essa scambi x con y, $-x$ con $y-x$, $-y$ con $x-y$. Si ottiene così una funzione di Steiner parziale su H (come subito si verifica), le cui traiettorie sono tutti e soli gli elementi di P. Ciò prova la tesi.

Il corollario seguente può essere visto come una variante del th. 2.2 di [**8**].

Corollario 2. *Sia G un gruppo, sia P una partizione di G^0 costituita da esagoni. Esiste allora una funzione di Steiner definita su G le cui traiettorie non banali sono tutti e soli gli elementi di P.*

2 - Gruppi abeliani liberi

2.1 – Applichiamo quanto visto in precedenza per determinare funzioni di Steiner sui gruppi abeliani liberi.

Lemma 3. *Poniamo $y_0 = 1$ e, per $n \in N$,*

$$x_n = \min A_n\,, \qquad y_n = 2x_n + y_{n-1}\,,$$
$$A_n = \{p \in N \mid p \in T_i \text{ per ogni } i \in N,\ i < n\}\,,$$

dove $T_i = \{x_i, y_i, x_i + y_i\}$. *Gli insiemi* $T_i \cup (-T_i)$ *sono esagoni e costituiscono una partizione di* Z^0.

È infatti chiaro che le posizioni fatte definiscono effettivamente due successioni crescenti $\{x_n\}_{n\in N}$ e $\{y_n\}_{n\in N}$.

Poichè $y_n = 2x_n + y_{n-1} > x_{n-1} + y_{n-1} + 1 \in A_n$, si ha $y_n > \min A_n = x_n$. Pertanto tutti i T_n sono costituiti da tre elementi distinti.

Dimostriamo ora che i T_i costituiscono un ricoprimento di N. Supponiamo, per assurdo, che ciò non sia vero: sia q il minimo elemento di N che non appartiene a nessuno dei T_i. Allora, per ogni $h < q$, esiste un indice i tale che $h \in T_i$; sia n il massimo di tali indici. Nessun elemento di A_{n+1} è allora minore di q e, essendo per ipotesi $q \in A_{n+1}$, si ha $q = \min A_{n+1} = x_{n+1}$, da cui $q \in T_{n+1}$, assurdo. Ciò prova che le terne date ricoprono N.

Dimostriamo che le terne T_i sono due a due disgiunte. Siamo $m, n \in N$, con $n < m$. Si ha allora $x_m \notin T_n$. Inoltre, essendo crescente la successione $\{x_i + y_i\}$, si ha $x_n + y_n < 2x_m + y_{m-1} = y_m$, anzi, visto che $x_i < y_i$ per ogni i, si ha $x_n < y_n < x_n + y_n < y_m < x_m + y_m$ e quindi nè y_m nè $x_m + y_m$ possono appartenere a T_n. Ciò prova che i T_i costituiscono una partizione di N.

Infine, per ogni $i \in N$, $T_i \cup (-T_i)$ è l'esagono associato alla coppia $(x_i, x_i + y_i)$, perchè sussistono le diseguaglianze $x_i < 2x_i < x_i + y_i < 2(x_i + y_i)$, da cui $x_i \neq 2(x_i + y_i)$ e $2x_i \neq x_i + y_i$. Ciò prova la tesi.

Corollario 4. *Il gruppo ciclico infinito ammette funzioni di Steiner.*

L'asserto segue dal Lemma 3 e dal Cor. 2, in quanto il Lemma 3 individua la partizione di Z costituita dagli esagoni $T_i \cup (-T_i)$.

2.2 - Fondamentale per il seguito è il

Teorema 5. *Sia* f *una funzione di Steiner definita su* nZ. *Esiste una funzione di Steiner* F *definita su* Z *la cui restrizione ad* nZ *è* f *se, e solo se,* $n \neq 2$.

Supponiamo infatti che n sia diverso da 2. Poniamo $y_0 = 0$. Poniamo inoltre per $h \in N$

$$A_n = \{p \in N \mid p \notin T_i \text{ per } i < h \text{ e } p \not\equiv 0(n)\}, \qquad x_n = \min A_h,$$

$$B_h = \{p \in N \mid 2x_h + y_{h-1} + p \not\equiv 0(n) \text{ e } 3x_h + y_{h-1} + p \not\equiv 0(n)\},$$

$$a_h = \min B_h, \qquad y_h = 2x_h \neq y_{h-1} + a_h,$$

dove $T_i = \{x_i, y_i, x_i + y_i\}$.

Mostriamo anzitutto che le posizioni fatte definiscono effettivamente tre successioni $\{x_h\}_{h\in N}$, $\{y_h\}_{h\in N}$, $\{x_h + y_h\}_{h\in N}$ costituite da elementi di $Z\setminus nZ$. Si ha intanto $A_1 = N$ e dunque x_1, y_1, $x_1 + y_1$ ed a_1 esistono e appartengono a $Z\setminus nZ$. Dato un intero positivo $m \neq 1$, supponiamo che, per ogni $i < m$, x_i, y_i, $x_i + y_i$ ed a_i siano definiti e che i primi tre appartengano a $Z\setminus nZ$. Poichè $\emptyset \neq A_m \subseteq Z\setminus nZ$, si ha $x_m \in Z\setminus nZ$.

Supponiamo, per assurdo, che B_m sia vuoto. Allora, posto $a = 2x_m + y_{m-1}$ e $b = x_m$, se $a + p \not\equiv 0(n)$ risulta, per ogni $p \in N$, $a + b + p \equiv 0(n)$. Ma questo è assurdo perchè $n \neq 2$ e quindi Z/nZ ha almeno tre elementi.

Per quanto sopra, a_m esiste e quindi esistono anche y_m e $x_m + y_m$; per come è definito a_m è poi chiaro che questi ultimi appartengono a $Z\setminus nZ$. Per induzione, si è dimostrato che le successioni cui siamo interessati sono ben definite e che nessun elemento dei T_i appartiene ad nZ.

Ragionando come nel Lemma 3, si dimostra che i T_i sono costituiti da tre elementi distinti e formano una partizione di $(Z\setminus nZ) \cap N$. Ora, essendo $x_i < 2x_i < x_i + y_i < 2(x_i + y_i)$, gli insiemi $T_i \cup (-T_i)$ sono gli esagoni associati alle coppie $(x_i, x_i + y_i)$ e costituiscono una partizione di $Z\setminus nZ$. Per il Lemma 1 esiste allora una funzione di Steiner parziale g su $Z\setminus nZ$. Ponendo allora $F(x) = f(x)$ per $x \in nZ$ e $F(x) = g(x)$ per $x \in Z\setminus nZ$, si ottiene una funzione di Steiner definita su Z, la cui restrizione ad nZ è f. Ciò prova la prima parte della tesi.

Sia ora $n = 2$. Sia F una funzione di Steiner definita su Z.

Si ha $F(-1) = F(1) - 1$ ed essendo $F(1)$, $F(1) - 1$ due elementi di parità opposta, uno dei due interi 1, -1 viene mandato da F in un numero pari, di modo che l'involuzione F non tiene fisso $2Z$; perciò non è possibile che la restrizione di F ad nZ sia f. Ciò prova la tesi.

Corollario 6. *Un gruppo G ammette funzioni di Steiner che tengono fissi tutti i suoi sottogruppi se, e solo se, le caratteristiche non nulle dei suoi elementi che sono diverse da* 3 *risultano tutte numeri finiti congrui ad* 1 mod 6.

Nel caso in cui G sia di torsione, la tesi segue dal th. 1 di [**5**]$_2$. Altrimenti G contiene un gruppo ciclico infinito C. La restrizione di f a C dovrebbe tenere fisso $2C$, contraddicendo il Th. 5.

Teorema 7. *Un gruppo abeliano libero G ammette funzioni di Steiner.*

La tesi segue infatti dal cor. 4 e dal th. 7 di [**1**]$_1$.

3 - Gruppi abeliani divisibili

3.1 – Mostriamo che i gruppi abeliani divisibili privi di torsione 2 ammettono funzioni di Steiner.

Osservazione 8. *Sia G un gruppo, unione di una catena ascendente $\{B_n\}_{n\in N}$ di suoi sottogruppi. Se ogni B_n ammette una funzione di Steiner f_n che tiene fisso B_{n-1}, il gruppo G ammette una funzione di Steiner che tiene fissi tutti i B_n.*

Mostrato che ogni B_n ammette una funzione di Steiner f'_n che tiene fissi tutti i B_i per $i < n$, la tesi seguirà subito dal th. 12 di [**1**]$_1$. Per vederlo, indichiamo con h la restrizione di f_{n+1} a $B_{n+1}\setminus B_n$. Sia (per induzione) f'_n una funzione di Steiner su B_n che tiene fissi tutti i B_i per $i < n$. Ponendo $f'_{n+1}(x) = h(x)$ per $x \in B_{n-1}\setminus B_n$ e $f'_{n+1}(x) = f'_n(x)$ per $x \in B_n$, si definisce su B_{n+1} una funzione di Steiner f'_{n+1} che tiene fissi tutti i B_i per $i < n+1$.

Teorema 9. *Ogni gruppo abeliano privo di torsione di rango 1 ammette funzioni di Steiner.*

Un tale gruppo G è unione di una catena ascendente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ di suoi sottogruppi, ciascuno dei quali è somma diretta di gruppi ciclici infiniti (cfr. [**4**], cor. 18.4, pag. 92). Poichè G ha rango 1, tutti gli A_n sono ciclici infiniti (altrimenti G avrebbe sottogruppi di rango superiore ad 1, contro l'es. 3, p. 86 di [**4**]).

Se G è ciclico, la tesi segue dal Cor. 4. Supponiamo allora che G non sia ciclico; non è restrittivo chiedere che gli A_n siano tutti distinti.

Posto $B_n = A_{2n}$ per $n \in N$, G è ovviamente unione della catena ascendente dei B_n, ciascuno dei quali ha nel successivo indice maggiore di 2. Pertanto, per ogni $n \neq 1$, B_n ammette una funzione di Steiner che tiene fisso B_{n-1} (Th. 5). La tesi segue ora dall'Oss. 8.

Lemma 10. *Per ogni p primo diverso da 2 il gruppo $G = Z(p^\infty)$ ammette funzioni di Steiner.*

Com'è noto (cfr. [**4**], pp. 15-16), G è unione di una catena ascendente di gruppi ciclici aventi come ordine le varie potenze di p. Supponiamo dapprima che p sia diverso da 3.

Indichiamo con B_n il sottogruppo di G avente ordine p^{2n}. Per ogni intero i, i gruppi B_{i+1}/B_i sono ciclici di ordine p^2 e dunque (teorema di Peltesohn) ammettono funzioni di Steiner; poichè $p \neq 3$, queste non hanno traiettorie fini (th. 4 di [**1**]$_2$). Di qui si vede induttivamente (th. 2 di [**5**]$_2$) che B_{i+1} ammette una funzione di Steiner che tiene fisso B_i. La tesi segue ora dall'Oss. 8.

Resta il caso in cui $p = 3$. Allora G è unione della catena ascendente dei suoi sottogruppi di ordine 3^{2k+1} (k intero positivo), tutti ciclici. Poichè ciascuno di essi (tranne il primo) possiede una funzione di Steiner che tiene fisso il precedente ([7], oss. 5), per l'Oss. 8 l'intero gruppo ammette una funzione di Steiner. Ciò prova completamente l'asserto.

Teorema 11. *Un gruppo abeliano divisibile G, privo di torsione 2, ammette funzioni di Steiner.*

Infatti G è somma diretta di una famiglia di gruppi, ciascuno dei quali è isomorfo a Q oppure a $Z(p^{\infty})$ con p primo diverso da 2 ([**4**], th. 24.1). La tesi segue allora dal Th. 9 e dal Lemma 10, tosto che si ricordi il th. 7 di $[\mathbf{1}]_1$.

Bibliografia

[**1**] G. Ferrero: $[\bullet]_1$ *Sui gruppi che ammettono funzioni di Steiner*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **4** (1972), 156-170; $[\bullet]_2$ *Gruppi di Steiner e sistemi fini*, Matematiche (Catania) **27** (1972), 167-190; $[\bullet]_3$ *Automorfismi di neocorpi di Steiner*, Atti del « Convegno su sistemi lineari e loro applicazioni » (in corso di stampa).

[**2**] G. Ferrero e A. Suppa, *Sistemi, anelloidi e funzioni di Steiner*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **20** (1971), 272-280.

[**3**] W. Frascella, *The construction of a Steiner triple system on sets of the power of the continuum without the axiom of choice*, Notre Dame J. of Formal Logic **7** (1966), 196-202.

[**4**] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, New York and London 1970.

[**5**] G. Gallina: $[\bullet]_1$ *Gruppi ammettenti funzioni di Steiner*, Boll. Un. Mat. It. (5) **15**-A (1978), 225-230; $[\bullet]_2$ *Sull'esistenza di certe funzioni di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 215-219.

[**6**] E. Köhler, *Unendliche gefaserte Steinersysteme*, J. Geometry **9** (1977), 1-5.

[**7**] R. Scapellato, *Sull'esistenza di funzioni di Steiner*, Boll. Un. Mat. Ital. (in corso di stampa).

[**8**] P. Tannenbaum, *Abelian Steiner triple systems*, Canad. J. Math. **28** (1976), 1251-1268.

Summary

We give constructions of Steiner functions for large classes of infinite abelian groups.

* * *