Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 339-346

ELVIRA TOGNOLI DALLA VEDOVA (*)

Famiglie complete di topologie su gruppi topologici (**)

Introduzione

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice *completamente regolare* se per ogni chiuso $S \subset X$ ed $x \notin S$ esiste una funzione continua $f: X \to R$ tale che $\overline{f(S)} \not\ni f(x)$.

È noto che la famiglia delle topologie completamente regolari su X coincide con la famiglia delle topologie τ_λ per cui esiste una famiglia di applicazioni $\{f_i^\lambda: X \to R\}_{i \in I_\lambda} = \mathscr{F}_\lambda$ tale che τ_λ è la meno fine topologia che rende continue le applicazioni di $\mathscr{F}_\lambda$.

Nel seguito, fissato l'insieme X, diremo che una famiglia di topologie su X: $\{\tau_\lambda\}$ è *completa* se esiste uno spazio topologico dei valori Y, tale che le topologie τ_λ sono tutte e sole le topologie indotte da famiglie di applicazioni $\{f_i^\lambda: X \to Y\}_{i \in I_\lambda}$.

Scopo di questo lavoro è lo studio delle famiglie di topologie complete nel caso in cui Y sia un gruppo topologico, X un gruppo e le famiglie $\{f_\lambda: X \to Y\}$ siano insiemi di omomorfismi.

Nel seguito diremo che una proprietà topologica è *conservativa* se si mantiene per prodotto topologico e passaggio a sottospazi.

In **2** dimostreremo il seguente risultato: sia X un gruppo; allora una famiglia di topologie di gruppo topologico $\tau = \{\tau_\lambda\}$ su X è completa se e solo se è definita da una proprietà conservativa.

Sempre in **2** si osserva come il caso dei gruppi topologici sia notevolmente diverso da quello degli spazi topologici.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 4-XII-1980.

1 - Il caso degli spazi topologici

Sia X in insieme ed Y uno spazio topologico; data una famiglia di applicazioni $\mathscr{F} = \{f_i \colon X \to Y\}_{i \in I}$ diremo *topologia definita da* $\mathscr{F}$ *su* X la topologia meno fine che rende continue le applicazioni f_i, $i \in I$.

È immediato verificare che detta topologia ha come sottobase di aperti la famiglia degli insiemi del tipo $f_i^{-1}(U)$ con U aperto di Y ed $i \in I$ (vedi [**1**], [**2**]).

Sia $\mathscr{F} = \{f_i \colon X \to Y\}_{i \in I}$ una famiglia di applicazioni dell'insieme X nello spazio topologico Y.

Sia $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ la relazione di equivalenza $x \overset{\mathscr{R}_{\mathscr{F}}}{\sim} y$ se e solo se $f_i(x) = f_i(y)$ per ogni $i \in I$.

Detta $p \colon X \to X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ la proiezione canonica di X nel quoziente, si ha che ogni f_i definisce una unica applicazione $\hat{f}_i \colon X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \to Y$ che rende commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\
& X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\hat{f}_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Notiamo ora con $Y^I = \prod_{i \in I} Y_i$ $(= Y)$ il prodotto topologico delle famiglie $\{Y_i = Y\}_{i \in I}$ di spazi topologici e con $F \colon X \to Y^I$, $\hat{F} \colon X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \to Y^I$ le applicazioni $F(x) = \{f_i(x)\}_{i \in I} \in Y^I$, $\hat{F}(x) = \{\hat{f}_i(x)\}_{i \in I} \in Y^I$.

Siano infine $\Pi_i \colon Y^I \to Y_i$ le proiezioni canoniche sulla componente i-esima.

Con le notazioni ora introdotte si ha il seguente

Lemma 1. *Dette* $\tau_{\mathscr{F}}$ *e* $\hat{\tau}_{\mathscr{F}}$ *le topologie indotte da* $\{f_i\}_{i \in I}$ *e* $\{\hat{f}_i\}_{i \in I}$ *su* X *e* $X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ *risulta*:

(i) *l'applicazione* $\hat{F} \colon X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \to Y^I$ *è iniettiva e* $(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ *è omeomorfo (tramite* $\hat{F}$*) a* $F(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}) \subset Y^I$;

(ii) $\tau_{\mathscr{F}}$ *definisce sui sottoinsiemi* $p^{-1}(x)$ *la topologia banale*;

(iii) $(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ *è lo spazio topologico quoziente di* $(X, \tau_{\mathscr{F}})$ *rispetto alla relazione di equivalenza* $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$;

(iv) $(X, \tau_{\mathscr{F}})$ *ha la topologia meno fine per cui* $p \colon X \to (X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ *risulti continua.*

Dim. (i) L'iniettività di $\hat{F}$ è conseguenza immediata della definizione della relazione di equivalenza $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$. Dunque $\hat{F}\colon X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \to \hat{F}(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}})$ è biunivoca. Di più $\hat{F}$ è continua, rispetto alla topologia $\hat{\tau}_{\mathscr{F}}$, perchè le applicazioni $\hat{f}_i = \Pi_i \circ \hat{F}$ sono continue ed Y^I è dotato della topologia prodotto.

Sempre per la definizione di topologia prodotto e per la struttura di sottospazio si ha che gli insiemi di $\hat{F}(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}})$ della forma $\Pi_i^{-1}(U) \cap \hat{F}(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}})$ con U aperto di Y sono una sottobase di aperti di $\hat{F}(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}})$.

Dunque, per quanto osservato all'inizio del paragrafo, $\hat{F}$ pone una corrispondenza biunivoca fra una sottobase di aperti di $(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ e una sottobase di aperti di $\hat{F}(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}) \subset Y^I$. Dunque $\hat{F}$ è un omeomorfismo.

(ii) L'applicazione $F\colon X \to Y^I$ si fattorizza attraverso $\hat{F}$, si ha cioè il diagramma commutativo seguente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & Y^I \\ & X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque F è costante sugli insiemi del tipo $p^{-1}(x)$, $x \in X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$; ne segue che su detti insiemi, $\tau_{\mathscr{F}}$ definisce la topologia banale.

(iii) Consideriamo su $X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ la sottobase $\mathscr{A}$ di aperti della forma $\hat{f}_i^{-1}(U)$, $i \in I$, U aperto di Y. p^{-1} trasforma elementi di $\mathscr{A}$ in aperti di $(X, \tau_{\mathscr{F}})$, dunque $p\colon (X, \tau_{\mathscr{F}}) \to (X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ è continua.

Il fatto che gli aperti del tipo $p^{-1}(V)$, $V \in \mathscr{A}$, formino una sottobase di $(X, \tau_{\mathscr{F}})$ prova che $(X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ ha in effetti la topologia quoziente.

Il lemma è così dimostrato in quanto l'osservazione ora fatta prova anche l'ultima asserzione.

Osservazione (fondamentale). Il lemma precedente mostra che, una volta conosciuta l'applicazione $p\colon X \to X/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ e la topologia $\hat{\tau}_{\mathscr{F}}$, è nota anche la topologia $\tau_{\mathscr{F}}$. Dunque nel nostro studio potremo limitarci al caso in cui la famiglia $\mathscr{F}$ sia separante (cioè $F\colon X \to Y^I$ sia iniettiva).

Nel seguito dunque supporremo sempre che le famiglie studiate $\mathscr{F}\colon \{f_i\colon X \to Y\}_{i \in I}$ siano tali che $F\colon X \to Y^I$ sia iniettiva.

Def. 1. Sia α una proprietà topologica, diremo che α è *conservativa* se essa si mantiene per l'operazione di prodotto topologico e di passaggio a sottospazio.

Esempi di proprietà conservative sono: essere T_1, T_2, T_3, essere totalmente sconnesso, ...

Esempi di proprietà non conservative sono: essere T_4, essere metrizzabile, essere connesso, ...

Def. 2. Sia X un insieme, $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \tau$ una famiglia di topologie su X. τ è detta *completa* se esiste uno spazio topologico Y tale che una topologia τ_λ sta in τ se e solo se esiste una famiglia di applicazioni $\{f_i^\lambda\colon X \to Y\}_{i\in I_\lambda} = \mathscr{F}_\lambda$ separante, tale che τ_λ sia la topologia meno fine che rende continue le f_i^λ.

Per il seguito è importante il seguente

Teorema 1. *Sia X un insieme, $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \tau$ una famiglia di topologie su X. La famiglia τ è completa se e solo se è definita da una proprietà conservativa.*

Dim. Supponiamo che $\tau = \{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sia definita da una proprietà conservativa α.

Fissato X, cioè la sua cardinalità, la famiglia delle topologie di X è un insieme. Dunque è un insieme la famiglia Γ delle topologie di X che soddisfano la condizione α.

Sia $Y = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ il prodotto topologico di tutti gli spazi, definiti su X, soddisfacenti la condizione α.

Evidentemente ogni topologia $\bar\gamma \in \Gamma$ si ottiene come la meno fine topologia che rende continua un'opportuna applicazione $X \xrightarrow{j} Y$ (basterà prendere $j(x) = x \times y_0 \in X_{\bar\gamma} \times \prod_{\gamma\neq\bar\gamma} X_\gamma$ con y_0 punto fissato a caso).

Viceversa, data una famiglia separante $\{f_i\colon X \to Y\}_{i\in I} = \mathscr{F}$ di applicazioni, detta famiglia definisce su X una topologia τ che, per il Lemma 1, è la topologia di un sottospazio di Y^I.

Dunque, essendo α conservativa, detta topologia soddisfa la condizione α e quindi la prima parte del teorema è provata.

Sia ora $\tau = \{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia completa di topologie su X per un certo spazio dei valori Y.

È allora noto, per il Lemma 1, che tutti gli spazi (X, τ_λ) sono sottospazi di Y^{I_λ}.

Dal fatto che X, e quindi la sua cardinalità, sono fissati segue che $I_\lambda = I$ si può considerare indipendente da $\lambda \in \Lambda$.

Dunque tutti gli (X, τ_λ) sono sottospazi di Y^I.

Viceversa è chiaro, dalla definizione di topologia prodotto, che ogni topologia, su X, di sottospazio di Y^I è nella famiglia τ.

Dunque τ è definita dalla proprietà conservativa: essere sottospazio di qualche Y^I.

Il teorema è così provato.

Osservazione. Il Teorema 1 dà una caratterizzazione delle famiglie complete di topologie e fornisce un modo di costruire uno spazio dei valori $Y = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$.

In generale lo spazio dei valori così costruito è molto grande e difficilmente maneggiabile.

Dunque nasce il problema di trovare degli spazi di valori «minimali» od almeno più maneggevoli.

In qualche caso detto problema si risolve facilmente, mentre in altri casi sembra estremamente difficile. Diamo qui, senza dimostrazione, due esempi non difficili.

Sia X un insieme qualsiasi e τ la famiglia di tutte le topologie su X. Allora τ è completa e si può prendere come spazio dei valori lo spazio D formato da due punti, di cui uno chiuso e l'altro no.

Sia X un insieme e τ la famiglia delle topologie T_1 su X.

τ è una famiglia completa e si può prendere come spazio dei valori X dotato della topologia in cui i chiusi sono i finiti.

In entrambi i casi citati gli spazi dei valori scelti sono minimali in senso facile a chiarire.

2 - Il caso dei gruppi topologici

Sia ora G un gruppo ed Y un gruppo topologico. Sia $\mathscr{F} = \{f_\lambda\colon G \to Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di omomorfismi.

Def. 3. Diremo *topologia indotta* da $\mathscr{F}$ su G la meno fine topologia su G che rende continui gli omomorfismi f_λ.

Notiamo con $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ la relazione di equivalenza $x \overset{\mathscr{R}_{\mathscr{F}}}{\sim} y \Leftrightarrow f_\lambda(x) = f_\lambda(y)$, $\forall \lambda \in \Lambda$ ed indichiamo con $p\colon G \to G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ la proiezione di G sull'insieme quoziente. Siano $\hat{f}_\lambda\colon G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \to Y$ le applicazioni che rendono commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\hat{f}_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Siano infine $F: X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \ (= Y)$, $\hat{F}: X/\mathcal{R}_{\mathcal{F}} \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda (= Y) = Y^\Lambda$ le applicazioni prodotto degli f_λ ed $\hat{f}_\lambda$.

Nel seguito Y^Λ sarà dotato della topologia prodotto e sarà quindi un gruppo topologico.

Notiamo poi con $\Pi_\lambda: Y^\Lambda \to Y_\lambda \ (= Y)$ la proiezione sulla componente λ-esima.

Si ha il

Lemma 2. *Dette $\tau_{\mathcal{F}}$ e $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}$ le topologie su G, $G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ definite da $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{\hat{f}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si ha:*

(i) *$F: G \to Y^\Lambda$ è un omomorfismo e $G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ è in corrispondenza biunivoca naturale con $G/\ker F$. Dunque nel seguito considereremo $G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ dotato della struttura di gruppo.*

(ii) *$\hat{F}: G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}} \to \hat{F}(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ è un isomorfismo di gruppi.*

(iii) *$(G, \tau_{\mathcal{F}})$ e $(\hat{G}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$ sono gruppi topologici, $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}$ è la topologia quoziente di $\tau_{\mathcal{F}}$ e $\tau_{\mathcal{F}}$ è la meno fine topologia che rende continua l'applicazione $p: G \to (G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$.*

Dim. F è un omomorfismo perchè tutte le applicazioni f_λ lo sono e Y^Λ ha la struttura prodotto.

Dunque $\ker F$ è un sottogruppo invariante. Dalle definizioni si ha che (1) $\hat{F}$ è iniettiva, (2) $\hat{F}(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}) = F(G)$. Dunque per il teorema dell'omomorfismo si ha che $G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ è isomorfo al gruppo $F(G)$. Si è così provato (i) ed (ii).

Per provare che lo spazio $(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$ è omeomorfo, tramite $\hat{F}$, al sottospazio $F(G)$ basta osservare che $\hat{F}^{-1}$ trasforma la sottobase di aperti $\{\Pi_\lambda^{-1}(U),\ \lambda\in\Lambda,\ U$ aperto di $Y\}$ di $F(G)$ nella sottobase di aperti $\{\hat{f}_\lambda^{-1}(U),\ \lambda\in\Lambda,\ U$ aperto di $Y\}$ di $G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e analogamente dicasi per $\hat{F}$.
Dunque $\hat{F}: (G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}}) \to \hat{F}(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}) \subset Y^\Lambda$ è un omeomorfismo.

Ricordando poi che $\{f_\lambda^{-1}(U),\ \lambda\in\Lambda,\ U$ aperto di $Y\}$ è una sottobase di aperti di $(G, \tau_{\mathcal{F}})$ e $\{\hat{f}_\lambda^{-1}(U),\ \lambda\in\Lambda,\ U$ aperto di $Y\}$ è una sottobase di aperti di $(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$ si conclude che la topologia $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}$ è la topologia quoziente di $\tau_{\mathcal{F}}$ e $\tau_{\mathcal{F}}$ è la meno fine che rende continua l'applicazione $G \to (G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$.

Il lemma è così provato.

Corollario 1. *Nelle ipotesi del Lemma 2 si ha che*

(i) *$(G, \tau_{\mathcal{F}})$, $(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$ sono due gruppi topologici.*

(ii) *$(G/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}, \hat{\tau}_{\mathcal{F}})$ è sottogruppo topologico di Y^Λ.*

Dim. È immediata conseguenza del fatto che $(G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ è omeomorfo al sottogruppo topologico $F(G)$ di Y^A e G ha la meno fine topologia per cui $p\colon G \to (G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}, \hat{\tau}_{\mathscr{F}})$ è continua.

Convenzione. Come già osservato in **1**, per conoscere la topologia $\tau_{\mathscr{F}}$ è sufficiente conoscere $\hat{\tau}_{\mathscr{F}}$ e l'applicazione $G \to G/\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$.

Dunque nel seguito considereremo solo famiglie di applicazioni $\mathscr{F} = \{f_\lambda\colon G \to Y\}_{\lambda\in A}$ tali che F sia iniettiva. Dette famiglie saranno dette *separanti*.

Come nel caso degli spazi topologici si danno le seguenti nozioni.

Def. 4. Sia G un gruppo e $\tau = \{\tau_i\}_{i\in I}$ una famiglia di topologie su G per cui (G, τ_i) sia un gruppo topologico.

La famiglia τ è detta *completa* se esiste un gruppo topologico Y tale che le topologie τ_i di τ sono tutte e sole quelle indotte da famiglie di omomorfismi $\{f_\lambda\colon G \to Y\}_{\lambda\in A}$.

Def. 5. Sia G un gruppo; una proprietà di gruppo topologico α sarà detta *conservativa* se si mantiene per prodotto topologico e passaggio a sottogruppo.

Si ha il

Teorema 2. *Sia G un gruppo e $\tau = \{\tau_i\}_{i\in I}$ una famiglia di topologie su G tali che ogni (G, τ_i) sia un gruppo topologico.*

Si ha allora: τ è una famiglia completa se e solo se è definita da una proprietà conservativa.

Dim. Supponiamo che $\tau = \{\tau_i\}_{i\in I}$ sia definita da una proprietà consevariva α.

Fissato X, cioè la sua cardinalità, la famiglia delle topologie di X è un insieme. Dunque è un insieme la famiglia Γ delle topologie di gruppo topologico su G che soddisfano α.

Sia $Y = \prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ il gruppo topologico prodotto dei gruppi topologici $G_\gamma \overset{\text{def}}{=} G$ con la topologia $\gamma \in \Gamma$.

Evidentemente ogni topologia $\bar{\gamma} \in \Gamma$ si può ottenere come la meno fine topologia che rende continuo un omomorfismo opportuno $J_{\bar{\lambda}}\colon G \to Y$.

Viceversa data una famiglia separante $\{f_\lambda\colon G \to Y\}_{\lambda\in A} = \mathscr{F}$ di omomorfismi si ha che, per il Lemma 2, $(G, \tau_{\mathscr{F}})$ è isomorfo, come gruppo topologico, ad un sottogruppo di Y^I per un opportuno I e quindi, essendo α conservativa, si deduce che $\tau_{\mathscr{F}} \in \tau$.

Si è così provata una delle due implicazioni del teorema.

Sia ora $\tau = \{\tau_i\}_{i \in I}$ una famiglia completa di topologie di gruppo topologico su G per un opportuno spazio di valori Y.

È allora noto, vedi Lemma 2, che tutti i gruppi topologici (G, τ_i) sono sottogruppi topologici di Y^{J_i}.

Al solito si può poi supporre che J_i non dipenda da i.

Viceversa è chiaro che tutti i sottogruppi di Y^J isomorfi (come gruppi) a G sono sottogruppi topologici della famiglia completa $\tau = \{\tau_i\}$.

Dunque τ è definita dalla proprietà conservativa: essere sottogruppo topologico di qualche Y^J.

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione 2. Si possono qui ripetere, con opportune modifiche, le considerazioni dell'Osservazione 1.

Si pone ora però un problema, a nostro parere non semplice.

Supponiamo che Y sia lo spazio dei valori per le topologie $\tau = \{\tau_i\}_{i \in I}$ sull'insieme G.

Se G è un gruppo, Y un gruppo topologico, quando è ancora vero che Y è spazio dei valori per le topologie τ_i che siano topologie di gruppo topologico?

Daremo due esempi in cui Y è spazio dei valori, ma non gruppo dei valori.

Supponiamo $Y = \boldsymbol{R}$, allora tutte le topologie completamente regolari su G sono ottenibili da famiglie di applicazioni $\{f_\lambda\colon G \to \boldsymbol{R}\}$.

Se G è un gruppo non commutativo, il sottogruppo G' generato dagli elementi della forma $aba^{-1}b^{-1}$ è mandato nello zero da tutti gli omomorfismi $f_\lambda\colon G \to R$.

Dunque non tutte le topologie completamente regolari di G si ottengono usando $\boldsymbol{R}$ come gruppo dei valori.

Consideriamo ancora $Y = \boldsymbol{R}$ e prendiamo uno spazio vettoriale G di dimensione infinita.

Sia τ un topologia su G definita da una norma $\|\cdot\|$. Dunque (G, τ) è uno spazio metrico e quindi completamente regolare.

È però facile convincersi che in generale τ non sta in nessuna famiglia completa di topologie avente $\boldsymbol{R}$ come gruppo dei valori. Infatti la sfera di centro l'origine e raggio 1, ad esempio, di (G, τ) non contiene nessun sottospazio vettoriale, mentre ogni intorno dell'origine nella topologia prodotto $\boldsymbol{R}^A$ contiene sottospazi vettoriali.

Bibliografia

[1] L. GILLMAN and M. JARISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Reinhold Co. 1960.

[2] J. L. KELLEY, *General topology*, Van Nostrand Co., New Jersey 1957.

* * *