Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 331-337

Giustina Pica (*)

Sul minimo e massimo numero di coppie di vertici non accettabili in una colorazione equa di un grafo (**)

1 - In questo paragrafo, date le definizioni di colorazione generalizzata e di buona k-colorazione di un grafo, viene dimostrata l'esistenza di buone k-colorazioni eque per un grafo semplice.

Sia $G = (V(G), E(G))$ un grafo semplice e $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ un insieme (di colori) di cardinalità $k \leqslant n = |V(G)|$; una *k-colorazione* di $V(G)$ tramite W è una partizione $S = \{S_1, \dots, S_k\}$ di $V(G)$ in k insiemi, ognuno dei quali è costituito dai vertici di G aventi lo stesso colore.

Una *k-colorazione* è detta *equa* se indicati con q e r, rispettivamente, il quoziente e il resto della divisione di n per k, si ha $|S_i| = q + \delta(S_i)$, con

$$\delta(S_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leqslant i \leqslant r \\ 0 & \text{se } r < i \leqslant k \, . \end{cases}$$

Fissato un sottoinsieme A dei numeri naturali, una coppia di vertici, x e y, di G è detta *accettabile rispetto ad A* in una k-colorazione di $V(G)$ se la loro distanza, $d(x, y)$, non appartiene ad A oppure se $d(x, y)$ appartiene ad A e x, y appartengono ad insiemi distinti di S.

Il *numero A-cromatico* $\gamma_A(G)$ di un grafo G è il più piccolo numero di colori necessari per colorare i vertici di G in modo che tutte le coppie di vertici siano accettabili rispetto ad A. Se $A = \{1\}$, $\gamma_A(G) = \gamma(G)$, dove $\gamma(G)$ è il numero cromatico di G.

(*) Indirizzo: Ist. di Mat., Facoltà di Ingegneria, Università, Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 1-XII-1980.

Fissato A, ad ogni grafo G associamo un grafo G_A avente come insieme dei vertici lo stesso insieme $V(G)$ di G e in cui due vertici sono adiacenti se la loro distanza in G è un elemento di A. È evidente che $\gamma_A(G) = \gamma(G_A)$.

Una *C_A-partizione* di G è una partizione $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_h\}$ di $V(G)$ tale che il sottografo $\overline{B}_i$ di G_A generato da ogni B_i è completo, cioè ogni coppia di vertici appartenenti allo stesso B_i ha distanza in G uguale ad un elemento di A.

Fissata una $C_{\{1\}}$-partizione $\mathscr{B}$ di G, una *buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$* è una k-colorazione di $V(G)$ che induce su ogni B_i una colorazione equa. È evidente che in una tale colorazione il numero dei colori associati ai vertici di $\overline{B}_i$ è uguale a $\min(|B_i|, k)$; inoltre ogni k-colorazione di G è una buona k-colorazione rispetto, ad esempio, alla $C_{\{1\}}$-partizione di G costituita da spigoli accettabili e/o vertici isolati.

Se G è un grafo completo e $\mathscr{B} = \{V(G)\}$, una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ è equa per G. In generale una buona k-colorazione di G rispetto ad una partizione non è detto che sia equa per G, ma vale il seguente Teorema 1, per la dimostrazione del quale è utile il seguente lemma.

Lemma. *In una k-colorazione ($k \geqslant 2$) di G se t ($t \geqslant 1$) colori sono associati ognuno ad un numero di vertici maggiore o uguale a $q+1$, esiste un colore che è associato ad un numero di vertici minore o uguale a q; se t' ($t' \geqslant 1$) colori sono associati ognuno ad un numero di vertici minore o uguale a q, esiste un colore che è associato ad un numero di vertici maggiore o uguale a q.*

Essendo q il quoziente della divisione di n per k, si ha

$$kq \leqslant n < k(q+1) . \tag{1}$$

Se i rimanenti $k-t$ colori fossero associati ognuno ad un numero di vertici maggiore o uguale a $q+1$, si avrebbe $n \geqslant t(q+1) + (k-t)(q+1) = k(q+1)$, relazione che contraddice la (1); pertanto esiste almeno un colore che è associato ad un numero di vertici minore o uguale a q.

Se i rimanenti $k-t'$ colori fossero associati ognuno ad un numero di vertici minore di q, si avrebbe $n < t'q + (k-t')q = kq$, relazione che contraddice la (1); pertanto esiste almeno un colore che è associato ad un numero di vertici maggiore o uguale a q.

Teorema 1. *Per ogni $C_{\{1\}}$-partizione $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_h\}$ di G esiste una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ che è equa per G.*

Ogni colore w_a in una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ è associato a un solo vertice in ogni B_i avente cardinalità k, a q_{B_i} oppure a $q_{B_i}+1$, essendo

q_{B_i} il quoziente della divisione di $|B_i|$ per k, vertici in ogni B_i avente cardinalità maggiore di k e al massimo ad un solo vertice in ogni B_i di cardinalità minore di k. Siano r, s_a, t_a il numero dei vertici colorati con w_a e appartenenti a B_i aventi, rispettivamente, cardinalità uguale, minore, maggiore di k. Se risulta $r + s_a + t_a > q + \delta(S_a)$, cioè $r + s_a + t_a \geqslant q + 1$, in base al lemma esiste un colore w_b che è associato a $r + s_b + t_b \leqslant q$ vertici di G. Se i B_i aventi cardinalità minore di k e a cui appartengono i vertici colorati con w_a e w_b coincidono, si ha $s_a = s_b$ e quindi $t_a > t_b$; ciò significa che esistono dei B_i di cardinalità maggiore di k in cui il colore w_a è associato a $q_{B_i} + 1$ vertici e il colore w_b è associato a q_{B_i} vertici. Colorando con w_b alcuni dei vertici di tali B_i colorati con w_a, si ottiene una nuova buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui, indicati con t'_a e con t'_b il numero dei vertici colorati con w_a e con w_b, o $r + s_a + t'_a = q + \delta(S_a)$ oppure $r + s_b + t'_b = q + \delta(S_b)$ e $r + s_a + t'_a > q + \delta(S_a)$. In quest'ultimo caso se $\delta(S_b) = 1$, esiste un colore w_c che è associato a $r + s_c + t_c \leqslant q$ vertici di G. Tale colore esiste anche nel caso che $\delta(S_b) = 0$, perchè in caso contrario si avrebbe

$$(2) \qquad n \geqslant (r + s_a + t'_a) + (r + s_b + t'_b) + (k-2)(q+1) \geqslant kq + (k-1)\,,$$

da cui, tenendo presente la (1), si avrebbe $n = kq + (k-1)$, cioè in una k-colorazione equa di G il solo colore w_b è associato a q vertici e i rimanenti $k-1$ colori sono associati a $q+1$ vertici, in particolare $\delta(S_a) = 1$; ma ciò implica $r + s_a + t'_a > q + 1$ e la (2) diventa $n > kq + (k-1)$, il che è assurdo. Quindi iterando eventualmente il ragionamento, si determina una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui il numero dei vertici colorati con w_a è $q + \delta(S_a)$. Nel caso che i vertici colorati con w_a e w_b appartengano a B_i di cardinalità minore di k non tutte coincidenti, colorando con w_b alcuni dei vertici colorati con w_a e appartenenti a quei B_i (con $|B_i| < k$) in cui il colore w_b non è associato a nessun vertice, si ottiene una nuova buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui $r + s'_a + t_a \geqslant q + \delta(S_a)$. Se $r + s'_a + t_a > q + \delta(S_a)$ e $t_a \neq t_b$ si può determinare una nuova buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui o $r + s'_a + t'_a = q + \delta(S_a)$ oppure $r + s'_a + t'_a > q + \delta(S_a)$ e $t'_a = t'_b$. In quest'ultimo caso, essendo $s'_b \geqslant s'_a$, risulta $r + s'_b + t'_b \geqslant r + s'_a + t'_a \geqslant q + 1$; esiste allora un colore che è associato ad un numero di vertici minore o uguale a q. Quindi, iterando eventualmente il ragionamento, esiste una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui il numero dei vertici colorati con w_a è $q + \delta(S_a)$.

Con ragionamento analogo si dimostra che anche se $r + s_a + t_a < q + \delta(S_a)$ è possibile determinare una nuova buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ in cui il colore w_a è associato a $q + \delta(S_a)$ vertici.

Data l'arbitrarietà di w_a, esiste una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$ che è equa per G.

2 – In questo paragrafo, posto $A = \{1\}$, vengono dati un limite inferiore per $m(G, \mathscr{B})$ e $m(G)$ e un limite superiore per $M(G, \mathscr{B})$ e $M(G)$, da cui facilmente si ricavano i corrispondenti valori per A qualsiasi, ove $m(G, \mathscr{B})$ e $m(G)$ indicano, rispettivamente, il minimo numero di spigoli non accettabili rispetto ad A in una buona k-colorazione equa di G rispetto a $\mathscr{B}$ e in una k-colorazione equa qualsiasi, $M(G, \mathscr{B})$ e $M(G)$ indicano il massimo numero di spigoli non accettabili nelle suddette colorazioni.

Teorema 2. *In una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$, equa per G, si ha*

$$m(G, \mathscr{B}) \geqslant \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathscr{B}|} \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \Big[(q_{B_i} - 1)\, q_{B_i} + \sum_{x \in B_i \cap S_j} d_G(x) - |B_i| + 1$$

$$- \min\big(d_G(x) - |B_i| + 1,\ |V(G) - B_i| - q - \delta(S_j) + |B_i \cap S_j|\big)\Big]\Big\},$$

$$M(G, \mathscr{B}) \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathscr{B}|} \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \Big[\lambda q_{B_i}^2 + \sum_{x \in B_i \cap S_j} \min\big(d_G(x) - |B_i| + 1,\ q + \delta(S_j) - |B_i \cap S_j|\big)\Big]\Big\},$$

ove $\lambda = 0$ *se* $|B_i| \leqslant k$, $\lambda = 1$ *se* $|B_i| > k$.

Sia G il grafo semplice assegnato e $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ l'insieme dei colori. Fissata la $C_{\{1\}}$-partizione $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_h\}$ di G, esistono, per il Teorema 1, delle buone k-colorazioni di G rispetto a $\mathscr{B}$, che sono eque per G. Fissato il vertice x, sia B_i il blocco della partizione a cui esso appartiene e w_j il colore ad esso associato in una buona k-colorazione di G rispetto a $\mathscr{B}$. Se $|B_i| \leqslant k$ tutti i vertici di B_i hanno colori distinti, per cui in una qualsiasi delle suddette colorazioni gli spigoli aventi i due estremi in B_i sono accettabili, pertanto il numero degli spigoli non accettabili incidenti x è uguale al numero dei vertici di $V(G) - B_i$ colorati con w_j e adiacenti ad x in G. Il numero dei vertici di $V(G) - B_i$ colorati con w_j è $q + \delta(S_j) - |B_i \cap S_j|$ e, quindi, il numero dei vertici di $V(G) - B_i$ colorati con $w_h \neq w_j$ è $|V(G) - B_i| - \big(q + \delta(S_j) - |B_i \cap S_j|\big)$. Il numero dei vertici di $V(G) - B_i$ adiacenti a x in G è $d_G(x) - |B_i| + 1$. Pertanto il numero dei vertici adiacenti a x e colorati con w_j è minore o uguale a

$$\min\big(d_G(x) - |B_i| + 1,\ q + \delta(S_j) - |B_i \cap S_j|\big), \tag{3}$$

mentre il numero di quelli colorati con $w_h \neq w_j$ è al massimo uguale a $\min\big(d_G(x) - |B_i| + 1,\ |V(G) - B_i| - q - \delta(S_j) + |B_i \cap S_j|\big)$, cioè il numero dei vertici di $G-B_i$ adiacenti a x e colorati con w_j è maggiore o uguale a

$$d_G(x)-|B_i|+1-\min\left(d_G(x)-|B_i|+1,\ |V(G)-B_i|-q-\delta(S_j)+|B_i\cap S_j|\right). \tag{4}$$

Se invece $|B_i|>k$, il numero degli spigoli di B_i incidenti x e non accettabili è uguale al numero dei vertici di B_i distinti da x e colorati con w_j. Essendo w_j associato a q_{B_i} o a $q_{B_i}+1$ vertici di B_i, il numero dei suddetti spigoli è maggiore o uguale a $q_{B_i}-1$ e minore o uguale a q_{B_i}, mentre il numero di quelli appartenenti a $(G-B_i)\cup\{x\}$ è minore o uguale a (3) e maggiore o uguale a (4).

Tenendo presente che se $|B_i|\leqslant k$, q_{B_i} vale zero o uno, cioè $(q_{B_i}-1)q_{B_i}=0$, e che $\mathscr{F}=\{B_i\cap S_j,\ \forall B_i\in\mathscr{B}$ e $1\leqslant j\leqslant k\}$ è ancora una partizione di $V(G)$, si ha la tesi.

Corollario 1. *In una k-colorazione, $2\leqslant k<n$, equa di G si ha*

$$m(G)\geqslant p-\left[\min_S \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\ \sum_{x\in S_j}\min\left(d_G(x),\ n-q-\delta(S_j)\right)\right],$$

$$M(G)\leqslant\max_{\mathscr{B}}\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{|\mathscr{B}|}\ \sum_{j=1}^{k}\ \sum_{x\in B_i\cap S_j}\min\left(d_G(x)-|B_i|+1,\ q+\delta(S_j)-1\right),$$

dove p è il numero degli spigoli di G, $[t]$ indica il massimo intero minore o uguale a t, $\mathscr{B}$ è una qualsiasi $C_{\{1\}}$-partizione di G tale che $|B_i|\leqslant 2$, $\forall B_i\in\mathscr{B}$, e $S=\{S_1,\ldots,S_k\}$ è una qualsiasi k-colorazione equa di G.

Invero fissata la $C_{\{1\}}$-partizione $\mathscr{B}=\{B_1,\ldots,B_h\}$ tale che $|B_i|\leqslant 2$, essendo $k\geqslant 2$, risulta $(q_{B_i}-1)q_{B_i}=0$, $\forall B_i$, pertanto

$$m(G,\mathscr{B})\geqslant\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{|\mathscr{B}|}\ \sum_{j=1}^{k}\ \sum_{x\in B_i\cap S_j}d_G(x)-|B_i|+1$$

$$-\min\left(d_G(x)-|B_i|+1,\ |V(G)-B_i|-q-\delta(S_j)+|B_i\cap S_j|\right).$$

D'altra parte da $|B_i|=1,2$, $|V(G)-B_i|=n-|B_i|$ e $|B_i\cap S_j|\leqslant 1$, segue facilmente che la quantità a secondo membro è uguale a

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\ \sum_i\ \sum_{x\in B_i\cap S_j}d_G(x)-\min\left(d_G(x),\ n-q-\delta(S_j)\right) \tag{5}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\ \sum_{x\in S_j}d_G(x)-\min\left(d_G(x),\ n-q-\delta(S_j)\right).$$

Quindi per ogni $C_{\{1\}}$-partizione di G che verifica le ipotesi del corollario, $m(G, \mathscr{B})$ è maggiore o uguale a (5). D'altra parte ogni k-colorazione equa di G è una buona k-colorazione rispetto alle $C_{\{1\}}$-partizioni costituite da spigoli accettabili e/o vertici, cioè $m(G) = \min_{\mathscr{B}} m(G, \mathscr{B})$ al variare di $\mathscr{B}$ nelle $C_{\{1\}}$-partizioni di G che verificano le ipotesi del corollario. Si ha quindi che $m(G)$ è maggiore o uguale a (5) qualunque sia la k-colorazione equa di G, in particolare ciò è vero quando (5) assume il valore massimo, cioè

$$m(G) \geqslant \max_{S} \left\{\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in S_j} d_G(x) - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in S_j} \min\left(d_G(x), n - q - \delta(S_j)\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{x \in G} d_G(x) - \min_{S} \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in S_j} \min\left(d_G(x), n - q - \delta(S_j)\right),$$

da cui tenendo presente la relazione di Eulero e che $m(G)$ è un intero, si ha la tesi.

Il limite superiore per $M(G)$ segue facilmente dal Teorema 2 tenendo presente che $M(G) = \max_{\mathscr{B}} M(G, \mathscr{B})$ al variare di $\mathscr{B}$ nelle $C_{\{1\}}$-partizioni di G che verificano le ipotesi del corollario.

Se A è un sottoinsieme qualsiasi dei numeri naturali, applicando il Corollario 1 al grafo G_A si ha

Corollario 2. *Il minimo, $m(G_A)$, e il massimo, $M(G_A)$, numero di coppie di vertici non accettabili in una k-colorazione equa di G rispetto ad un sottoinsieme A dei numeri naturali verificano le relazioni*

$$m(G_A) \geqslant p_A - \left[\min_{S} \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in S_j} \min\left(d_{G_A}(x), n - q - \delta(S_j)\right)\right],$$

$$M(G_A) \leqslant \max_{\mathscr{B}} \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathscr{B}|} \sum_{j=1}^{k} \sum_{x \in B_i \cap S_j} \min\left(d_{G_A}(x) - |B_i| + 1, q + \delta(S_j) - 1\right),$$

ove p_A è il numero delle coppie di vertici, x e y, di G tali che $d(x, y) \in A$, $\mathscr{B}$ è una $C_{\{A\}}$-partizione di G tale che $|B_i| \leqslant 2$ $\forall B_i \in \mathscr{B}$, e $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ è una k-colorazione equa di G.

Bibliografia

[1] S. Antonucci: $[\cdot]_1$ *Generalizzazione del concetto di cromatismo di un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31; $[\cdot]_2$ *Sur les colorations généralisés des hypergraphes et sur les multicolorations et orientations généralisées des graphes* (in corso di pubblicazione).

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] C. Chartrand, D. P. Geller and S. Hedetniemi, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Comb. Phil. Soc. **64** (1968), 265-271.

[4] M. Gionfriddo, *Sulle colorazioni L_s di un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454.

[5] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley P. C. 1969.

[6] F. Speranza: $[\cdot]_1$ *Colorazioni di specie superiore di un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, Suppl. fasc. 3 (1975), 53-62; $[\cdot]_2$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni di un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367.

Summary

Generalized k-colorings of simple graph, with $1 < k \leqslant n$ (where n is the number of vertices of the graph), are considered and a definition of « good k-coloring » for a simple graph is given. On the basis of the equitable good k-colorings existence of a simple graph, lower and upper bounds, respectively, for the least and greatest unaccettabl enumber of pairs of vertices in an equitable k-coloring of a graph, are calculated.

* * *