Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 281-288

GRAZIA ROMEO (*)

Limite diretto di semi-ipergruppi e ipergruppi d'associatività (**)

Introduzione

Nella prima parte di questo lavoro è definito e studiato il limite diretto di una famiglia diretta di semi-ipergruppi e ipergruppi. In particolare si trova che il cuore del limite diretto coincide con l'unione dei cuori degli ipergruppi della famiglia. Infine è studiato il limite diretto di una famiglia diretta di semi-ipergruppi e ipergruppi d'associatività.

Nella seconda parte si è affrontato il seguente problema: P. Corsini in [**2**]$_1$ dimostra che il gruppoide Q, ottenuto da un gruppo abeliano G e da due funzioni φ_i: $G\times G \to G$ $(i=1,2)$ e da una permutazione T ponendo $x\oplus y = T(\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y))$, se è con divisione gode della proprietà $H_G \supset \omega(\mathscr{A}^*(Q))$, dove H_G è il sottogruppo generato dagli elementi del tipo $x-\varphi_1(x,a)$, $y-\varphi_2(b,y)$, $z-T(z)$, al variare di x, y, z, a, b in G. Inoltre si sono trovate condizioni necessarie e sufficienti affinchè $\omega(\mathscr{A}^*(Q)) = H_G$ se il dominio delle funzioni φ_i è G e $T=Id(G)$. Nel presente lavoro ci si è posto il problema di trovare le condizioni più generali nelle quali $H_G=\omega(\mathscr{A}^*(Q))$, se $T=Id(G)$.

Parte I

1 - Def. 1. Diciamo che una famiglia di semi-ipergruppi è *diretta*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 24-XI-1980.

se soddisfa alle condizioni seguenti:

(i) $\langle I, \leqslant\rangle$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;

(ii) $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Leftrightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$;

(iii) $\forall (i, j) \in I^2$ tale che $i \leqslant j$ $\varphi_i^j\colon H_i \to H_j$ è un omomorfismo e si ha, se $i \leqslant j \leqslant k$, $\varphi_j^k \varphi_i^j = \varphi_i^k$; $\forall i \in I$ $\varphi_i^i = Id(H_i)$.

Poniamo $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ e definiamo in H la seguente relazione binaria. $\forall x_i \in H_i$, $\forall y_j \in H_j$, $x_i \sim y_j$ se e solo se esiste $k \in I$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, tale che $\varphi_i^k(x_i) = \varphi_j^k(y_j)$. La relazione $\sim$ è un'equivalenza; sia $\bar{x}$ la classe d'equivalenza contenente x e sia H' l'insieme delle classi d'equivalenza. Nel seguito denoteremo $\varphi_j^i(x_j)$ con x_i, $\forall (i, j) \in I^2$: $i \geqslant j$ e $\forall x_j \in H_j$.

Dato un ipergruppoide $\langle K, \circ\rangle$ sia $K(X, Y, Z)$ il predicato ternario associato, cioè $K(a, b, c) \Leftrightarrow c \in a \circ b$ [2]$_3$. Definiamo in H' il predicato ternario seguente: $H'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Leftrightarrow \exists q \in I$, $\exists x_q \in \bar{x} \cap H_q$, $\exists yq \in \bar{y} \cap Hq$, $\exists z_q \in \bar{z} \cap H_q$ tali che $H_q(x_q, y_q, z_q)$. Poniamo $\bar{x} \otimes \bar{y} = \{\bar{z} \mid H'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\}$.

Def. 2. Chiamiamo $\langle H', \otimes\rangle$ *limite diretto* della famiglia diretta di semi-ipergruppi e la denotiamo $\varinjlim \{H_i\}_{i \in I}$.

Teorema 3. *$\langle H', \otimes\rangle$ è un semi-ipergruppo.*

Proviamo, innanzitutto, che l'iperprodotto $\langle\otimes\rangle$ introdotto in H' è ben definito. Infatti, sia $a_p \sim x_q$ e $b_p \sim y_q$, allora esiste $\tau \in I$, $\tau \geqslant q$, $\tau \geqslant p$, tale che $\varphi_p^\tau(a_p) = \varphi_q^\tau(x_q)$, $\varphi_p^\tau(b_p) = \varphi_q^\tau(y_q)$. Sia $c_p \in a_p \circ b_p$, allora $\varphi_p^\tau(c_p) \in \varphi_p^\tau(a_p) \circ \varphi_p^\tau(b_p) = \varphi_q^\tau(x_q) \circ \varphi_q^\tau(y_q)$. Si ha $\bar{c}_p = \bar{c}_\tau$, $\bar{a}_\tau = \bar{a}_p$ e $\bar{b}_\tau = \bar{b}_p$, dunque $\forall c_p \in a_p \circ b_p$, $\bar{c}_p = \bar{c}_\tau \in \overline{\varphi_q^\tau(x_q)} \otimes \overline{\varphi_q^\tau(y_q)} = \bar{x}_q \otimes \bar{y}_q$ da cui $\bar{a}_p \otimes \bar{b}_p \subset \bar{x}_q \otimes \bar{y}_q$. Analogamente il viceversa.

Resta da provare che l'iperoperazione $\langle\otimes\rangle$ è associativa. Se $\bar{u} \in (\bar{x} \otimes \bar{y}) \otimes \bar{z}$, allora esiste $\bar{v} \in \bar{x} \otimes \bar{y}$ tale che $\bar{u} \in \bar{v} \otimes \bar{z}$. Ma $\bar{v} \in \bar{x} \otimes \bar{y}$ implica che esistono $h \in I$, $x_h \in \bar{x} \cap H_h$, $y_h \in \bar{y} \cap H_h$, $v_h \in \bar{v} \cap H_h$ tali che $v_h \in x_h \circ y_h$. Poichè $\bar{u} \in \bar{v} \otimes \bar{z}$, esistono $q \in I$, $v_q \in \bar{v} \cap H_q$, $z_q \in \bar{z} \cap H_q$, $u_q \in \bar{u} \cap H_q$ tali che $u_q \in v_q \circ z_q$. D'altra parte $v_q \in \bar{v} \ni v_h$ se e solo se esiste $k \in I$, $k \geqslant q$, $k \geqslant h$, tale che

$$(*) \qquad \varphi_h^k(v_h) = \varphi_q^k(v_q)\ ;$$

ma φ_h^k e φ_q^k sono omomorfismi, quindi $\varphi_h^k(v_h) \in \varphi_h^k(x_h) \circ \varphi_h^k(y_h)$ e $\varphi_q^k(u_q) \in \varphi_q^k(v_q) \circ \varphi_q^k(z_q)$, per $(*)$ $u_k = \varphi_q^k(u_q) \in (\varphi_h^k(x_h) \circ \varphi_h^k(y_h)) \circ \varphi_q^k(z_q) = (x_k \circ y_k) \circ z_k = x_k \circ (y_k \circ z_k)$, ne segue che esiste $s_k \in y_k \circ z_k$ tale che $u_k \in x_k \circ s_k$, quindi $\bar{s} \in \bar{y} \otimes \bar{z}$ e $\bar{u} \in \bar{x} \otimes \bar{s}$ da cui $\bar{u} \in \bar{x} \otimes (\bar{y} \otimes \bar{z})$.

Teorema 4. *Se* $\forall(i, j) \in I^2$ *esiste* $k \in I$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, *tale che* H_k *sia ipergruppo allora* H' *è ipergruppo.*

$\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in H'^2$ esiste $(i, j) \in I^2$ tale che $x_i \in \bar{x} \cap H_i$ e $y_j \in \bar{y} \cap H_j$; per ipotesi esiste $k \in I$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, tale che H_k sia un ipergruppo, quindi esiste $a_k \in H_k$ tale che $\varphi_i^k(x_i) \circ a_k = x_k \circ a_k \ni y_k$ da cui $H'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y})$.

Teorema 5. (a) *Se* $\forall(x, y) \in H_k^2$ $x \beta_{H_k}^* y$, *allora* $\bar{x} \beta_{H'}^* \bar{y}$. (b) *Se* $\forall(x, y) \in H'^2$ $\bar{x} \beta_{H'}^* \bar{y}$, *allora esistono* $h \in I$, $x_h \in \bar{x} \cap H_h$, $y_h \in \bar{y} \cap H_h$ *tali che* $x_h \beta_{H_h}^* y_h$.

(a) Se $x \beta_{H_k}^* y$, allora esiste $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset H_k$ tale che $x = a_1 \beta a_2 \ldots a_{n-1} \beta a_n = y$; d'altra parte $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $a_i \beta a_{i+1}$ implica che esiste $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset H_k$ tale che $a_i \in \prod_{j=1}^{m} b_j \ni a_{i+1}$. Poichè $\varphi_k \colon H_k \to H'$ è omomorfismo tra semi-ipergruppi, segue $\varphi_k(a_i) \in \prod_{j=1}^{m} \varphi_k(b_j) \ni \varphi_k(a_{i+1})$ cioè $\bar{a}_i \ni \prod_{j=1}^{m} \bar{b}_j \ni \bar{a}_{i+1}$, da cui $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $\bar{a}_i \beta_{H'} \bar{a}_{i+1}$ cioè $\bar{x} \beta_{H'}^* \bar{y}$.

(b) Se $\bar{x} \beta_{H'}^* \bar{y}$, allora esiste $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\} \subset H'$ tale che $\bar{a}_1 = \bar{x} \beta \bar{a}_2 \ldots \beta \bar{a}_n = \bar{y}$, ma $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $\bar{a}_i \beta \bar{a}_{i+1}$ implica che esiste $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m\} \subset H'$ tale che $\bar{a}_i \in \prod_{k=1}^{m} \bar{b}_k \ni \bar{a}_{i+1}$.

Se $m = 2$, $\bar{a}_i \in \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2$ implica che esistono $p \in I$, $b_1 \in \bar{b}_1 \cap H_p$, $b_2 \in \bar{b}_2 \cap H_p$, $a_{p_i} \in \bar{a}_i \cap H_p$ tali che $H_p(b_1, b_2, a_{p_i})$. Inoltre, $\bar{a}_{i+1} \in \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2$ implica che esistono $q \in I$, $c_1 \in \bar{b}_1 \cap H_q$, $c_2 \in \bar{b}_2 \cap H_q$, $a_{q_{(i+1)}} \in \bar{a}_{i+1} \cap H_q$ tali che $H_q(c_1, c_2, a_{i+1})$. Ma $\forall j \in \{1, 2\}$ $b_j \in \bar{b}_j \ni c_j$, quindi esiste $h \in I$, $h \geqslant p$, $h \geqslant q$ tale che $\varphi_p^h(b_j) = \varphi_q^h(c_j) = d_{h_j}$. D'altra parte si ha anche $H_h(\varphi_p^h(b_1), \varphi_p^h(b_2), \varphi_p^h(a_{p_i}))$ e $H_h(\varphi_q^h(c_1), \varphi_q^h(c_2), \varphi_q^h(a_{q_{i+1}}))$ cioè $a_{h_i} \in d_{h_1} \circ d_{h_2} \ni a_{h_{i+1}}$.

Supponiamo per induzione che se $\{\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}\} \subset \bar{b}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{b}_{m-1}$ allora esistono $s \in I$, $a_{s_i} \in \bar{a}_i \cap H_s$, $a_{s_{i+1}} \in \bar{a}_{i+1} \cap H_s$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ $b_j \in \bar{b}_j \cap H_s$ tali che $a_{s_i} \in b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_{m-1} \ni a_{s_{i+1}}$.

Se $\{\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}\} \subset (\bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 \otimes \ldots \otimes \bar{b}_{m-1}) \otimes \bar{b}_m$, allora esiste $\{\bar{u}, \bar{v}\} \subset \bar{b}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{b}_{m-1}$ tale che $\bar{a}_i \in \bar{u} \otimes \bar{b}_m$ e $\bar{a}_{i+1} \in \bar{v} \otimes \bar{b}_m$. Ma $H'(\bar{u}, \bar{b}_m, \bar{a}_i)$ implica che esistono $p \in I$, $u_p \in \bar{u} \cap H_p$, $b_p \in \bar{b}_m \cap H_p$, $a_{p_i} \in \bar{a}_i \cap H_p$ tali che

$$(**) \qquad H_p(u_p, b_p, a_{p_i}) .$$

Analogamente $H'(\bar{v}, \bar{b}_m, \bar{a}_{i+1})$ implica che esistono $q \in I$, $v_q \in \bar{v} \cap H_q$, $b_q \in \bar{b}_m \cap H_q$, $a_{q_{i+1}} \in \bar{a}_{i+1} \cap H_q$ tali che

$$(***) \qquad H_q(v_q, b_q, a_{q_{i+1}}) .$$

Poichè $\bar{u} \in \prod_{j=1}^{m-1} \bar{b}_j \ni \bar{v}$ per induzione esistono $r \in I$, $u_r \in \bar{u} \cap H_r$, $v_r \in \bar{v} \cap H_r$,

$b_j \in \bar{b}_j \cap H_r$ tali che

$$(\circ) \qquad u_r \in \prod_{j=1}^{m-1} b_j \ni v_r \, .$$

I è diretto, quindi esiste $h \in I$ $h \geqslant p$, $h \geqslant q$, $h \geqslant r$ tale che $\varphi_p^h(u_p) = \varphi_r^h(u_r) = u_h \in \bar{u}$, $\varphi_q^h(v_q) = \varphi_r^h(v_r) = v_h \in \bar{v}$, $\varphi_p^h(b_p) = \varphi_q^h(b_q) = b_h$, inoltre da (**) e (***) segue $a_{h_i} = \varphi_p^h(a_{p_i}) \in \varphi_p^h(u_p) \circ \varphi_p^h(b_p) = u_h \circ b_h$ e $a_{h_{i+1}} \in v_h \circ b_h$. Inoltre da ($\circ$) segue che $u_h \in \prod_{j=1}^{m-1} b_{h_j} \ni v_h$, da cui $a_{h_i} \in \prod_{j=1}^{m-1} b_{h_j} \circ b_h \ni a_{h_{i+1}}$ e quindi $x_h \, \beta^*_{H_h} \, y_h$.

Teorema 6. *Se $\forall (i, j) \in I^2$ esiste $k \in I$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, tale che H_k è un ipergruppo allora il cuore di H' (che è un ipergruppo per il Teorema 4) coincide con l'insieme $\bigcup_{k \in K} \omega_{H_k}$ dove $K = \{k \,|\, H_k$ è un ipergruppo$\}$.*

Se $x \in \bigcup_{k \in K} \omega_{H_k}$ allora esiste $k \in K$ tale che $x \in \omega_{H_k}$; poniamo $x = x_k$, H_k è un ipergruppo quindi $\forall x_k \in H_k$ esiste $e_k \in H_k$ tale che $x_k \circ e_k \ni x_k$, da cui $H'(\bar{x}, \bar{e}, \bar{x})$ dove $e_k \in \bar{e} \in \omega_{H'}$ e $x_k \in \bar{x}$. Per (a) del Teorema 5, $x_k \, \beta^*_{H_k} \, e_k$ implica $\bar{x} \, \beta^*_{H'} \, \bar{e}$, quindi anche $\bar{x} \in \omega_{H'}$. Da cui $\bigcup_{k \in K} \omega_{H_k} \subset \omega_{H'}$. Viceversa, per il Teorema 4, $\forall \bar{x} \in H'$ esiste $\bar{e} \in \omega_{H'}$ tale che $H'(\bar{x}, \bar{e}, \bar{x})$, segue che esistono $g \in I$, $\{x_g, y_g\} \subset \bar{x} \cap H_g$, $e_g \in \bar{e} \cap H_g$ tali che $H_g(x_g, e_g, y_g)$. Ma $x_g \in \bar{x} \ni y_g$ implica che esiste $k \in I$, $k \geqslant g$ tale che

$$(\circ)' \qquad \varphi_g^k(x_g) = \varphi_g^k(y_g) \, .$$

Per (b) del Teorema 5 si ha $\bar{x} \, \beta^*_{H'} \, \bar{e}$ implica che esistono $h \in I$, $x_h \in \bar{x} \cap H_h$, $e_h \in \bar{e} \cap H_h$ tali che $x_h \, \beta^*_{H_h} \, e_h$. Poichè per ipotesi esiste $t \in I$, $t \geqslant h$, $t \geqslant k$ tale che H_t sia un ipergruppo, da ($\circ$)$'$ segue $\varphi_k^t \varphi_g^k(x_g) = \varphi_k^t \varphi_g^k(y_g)$ cioè $\varphi_g^t(x_g) = \varphi_g^t(y_g) = x_t$. Inoltre $H_g(x_g, e_g, y_g)$ implica $H_t(x_t, e_t, x)$. Essendo φ_h^t un omomorfismo si ha che $x_h \, \beta^*_{H_h} \, e_h$ implica $x_t \, \beta^*_{H_t} \, e_t$. D'altra parte $e_t \in \omega_{H_t}$, quindi $x_t \in \omega_{H_t} \in \bigcup_{k \in K} \omega_{H_k}$.

2 – Teorema 7. *Sia G' il limite diretto di una famiglia diretta di gruppoidi $\{G_i\}_{i \in I}$* [**3**]; *se $\forall i \in I$ $H_i = \mathscr{A}^*(G_i)$ è il semi-ipergruppo di associatività di G_i* [**4**], *allora il semi-ipergruppo H', limite diretto della famiglia $\{H_i\}_{i \in I}$, coincide col semi-ipergruppo d'associatività di G'.*

Vogliamo provare che

$$\bar{z} \in \bar{x} \otimes \bar{y} \Leftrightarrow \bar{z} \in \bar{x} \circ \bar{y} = \mathscr{A}^*(\bar{x}\bar{y}) \, .$$

Poichè G', per ipotesi, è il limite diretto della famiglia $\{G_i\}_{i\in I}$ si ha $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}$ in $G' \Leftrightarrow \exists m \in I$, $\exists(x_m, y_m, z_m) \in G_m^3$, $x_m \in \bar{x}$, $y_m \in \bar{y}$, $z_m \in \bar{z}$ tali che $x_m y_m = z_m$ in G_m.

Si vede facilmente che se esiste $q \in I$ tale che $z_q \in \mathscr{A}_q^*(u_q)$ allora

$$(\vartheta) \qquad z \in \mathscr{A}^*(\bar{u}) .$$

Ma $z \in x \otimes y$ se e solo se esistono $q \in I$, $(x_q, y_q, z_q) \in H_q^3$, $x_q \in \bar{x}$, $y_q \in \bar{y}$, $z_q \in \bar{z}$ tali che $H_q(x_q, y_q, z_q)$, cioè $z_q \in x_q \circ y_q = \mathscr{A}_q^*(x_q y_q)$. Se $x_q y_q = u_q$ allora $\bar{x}_q\bar{y}_q = \bar{u}_q$, da cui $\mathscr{A}^*(\bar{x}_q\bar{y}_q) = \mathscr{A}^*(\bar{u}_q) = \bar{x}_q \circ \bar{y}_q$. Poichè $z_q \in \mathscr{A}^*(u_q)$, per (ϑ) si ha $\bar{z}_q \in \mathscr{A}^*(\bar{u}_q)$, quindi $\bar{x}_q \circ \bar{y}_q = \mathscr{A}^*(\bar{x}_q\bar{y}_q) \ni \bar{z}$.

Dimostriamo, adesso, la seguente implicazione: se $\bar{a} = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{n} \bar{b}_j$ allora esistono $p \in I$, $a_p \in \bar{a} \cap H_p$, $b_{p_j} \in \bar{b}_j \cap H_p$ tali che

$$(\delta) \qquad a_p = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{n} b_{p_j} .$$

Certamente (δ) vale per $n = 2$; dimostriamo per induzione che è vero per $n > 2$. Sia

$$\bar{a} = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{n} \bar{b}_j = (\prod_{\substack{j=1\\ \gamma_1}}^{r} \bar{b}_j)(\prod_{\substack{j=r+1\\ \gamma_2}}^{n} \bar{b}_j) = \bar{x}\bar{y}$$

se e solo se esistono $h \in I$, $(x_h y_h, a_h) \in H_h^3$, $x_h \in \bar{x}$, $y_h \in \bar{y}$, $a_h \in \bar{a}$ tali che $a_h = x_h y_h$. Inoltre $\bar{x} = \prod_{\substack{j=1\\ r}}^{n} \bar{b}_j$ $(r < n)$ se e solo se esistono $p \in I$, $b_{p_j} \in \bar{b}_j \cap H_p$, $x_p \in \bar{x} \cap H_p$ tali che $\prod_{\substack{j=1\\ \gamma_1}}^{r} b_{p_j} = x_p$; $\bar{y} = \prod_{\substack{j=r+1\\ \gamma_2}}^{n} \bar{b}_j$ se e solo se esistono $q \in I$, $b_{q_j} \in \bar{b}_j \cap H_q$ $y_q \in \bar{y} \cap H_q$ tali che $\prod_{\substack{j=r+1\\ \gamma_2}}^{n} b_{q_j} = y_q$. Poichè $x_q \in \bar{x} \ni x_h$, $y_q \in \bar{y} \ni y_h$ segue che esiste $k \in I$, $k \geqslant p$, $k \geqslant q$, tale che $\varphi_p^k(x_p) = \varphi_h^k(x_h) = x_k$ e $\varphi_q^k(y_q) = \varphi_h^k(y_h) = y_k$ per cui $\varphi_p^k(x_p) = \varphi_p^k(\prod_{\substack{j=1\\ \gamma_1}}^{r} b_{p_j}) = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma_1}}^{r} \varphi_p^k(b_{p_j})$, cioè $x_k = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma_1}}^{r} b_{k_j}$. Analogamente $y_k = \prod_{\substack{j=r+1\\ \gamma_2}}^{n} b_{k_j}$. Quindi $a_k = \varphi_h^k(a_h) = \varphi_h^k(x_h y_h) = \varphi_h^k(x_h)\varphi_h^k(y_h) = x_k y_k = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{n} b_{k_j}$.

Provare che se $\bar{z} \in \bar{x} \circ \bar{y} = \mathscr{A}^*(\bar{x}\bar{y})$ allora $\bar{z} \in \bar{x} \otimes \bar{y}$ equivale a dimostrare la seguente implicazione: $\bar{z} \in \bar{x} \circ \bar{y} = \mathscr{A}^*(\bar{x}\bar{y})$ implica che esistono $q \in I$, $(x_q, y_q, z_q) \in H_q^3$, $x_q \in \bar{x}$, $y_q \in \bar{y}$, $z_q \in \bar{z}$ tali che $z_q \in x_q \circ y_q = \mathscr{A}_q^*(x_q y_q)$.

Si ha $\bar{x}\bar{y} = \bar{u}$ se e solo se esistono $t \in I$, $x_t \in \bar{x} \cap H_t$, $y_t \in \bar{y} \cap H_t$, $u_t \in \bar{u} \cap H_t$ tali che $x_t y_t = u_t$. Inoltre $\bar{z}\mathscr{A}^*\bar{x}\bar{y}$ se e solo se $\exists n \in N^*$, $\exists(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \in G'^n$ tale che $\bar{a}_1 = \bar{z}\mathscr{A}\bar{a}_2 \dots \mathscr{A}\bar{a}_n = \bar{x}\bar{y} = \bar{u}$, dove $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\bar{a}_i\mathscr{A}\bar{a}_{i+1}$ se e solo se $\exists m \in N^*$, $\exists(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m) \in G'^m$ $\exists\gamma$, $\exists\gamma'$, tale che $\bar{a}_i = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{m} \bar{b}_j$ e $\bar{a}_{i+1} = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma'}}^{m} \bar{b}_j$. Per (δ), $\bar{a}_i = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{m} \bar{b}_j$ implica esistono $q \in I$, $a_{q_i} \in \bar{a}_i \cap H_q$, $b_{q_j} \in \bar{b}_j \cap H_q$ tali che $a_{q_i} = \prod_{j=1}^{m} b_{q_j}$ e $\bar{a}_{i+1} = \prod_{j=1}^{m} \bar{b}_j$ implica esistono $p \in I$, $a_{p_{i+1}} \in \bar{a}_{i+1} \cap H_p$, $b_{p_j} \in \bar{b}_j \cap H_p$ tali che $a_{p_{i+1}} = \prod_{j=1}^{m} b_{p_j}$. Ma $b_{q_j} \in \bar{b}_j \ni b_{p_j}$ se e solo se esiste $h \in I$, $h \geqslant p$, $h \geqslant q$, tale che $\varphi_q^h(b_{q_j}) = \varphi_p^h(b_{p_j}) = b_{h_j}$, quindi $a_{h_i} = \varphi_q^h(a_{q_i}) = \varphi_q^h(\prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{m} b_{q_j}) = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{m} \varphi_q^h(b_{q_j}) = \prod_{\substack{j=1\\ \gamma}}^{m} b_{h_j}$. Allo stesso modo $a_{h_{i+1}} \in \prod_{\substack{j=1\\ \gamma'}}^{m} b_{h_j}$. Ma $a_{h_n} = u_h \in \bar{u} \ni u_t$ se e solo se esiste $k \in I$, $k \geqslant h$, $k \geqslant t$, tale che $\varphi_h^k(u_h) = \varphi_t^k(u_t) = u_k$, da cui $\varphi_h^k(a_{h_i}) = \varphi_h^k(\prod_{\gamma} b_{h_j}) = \prod_{\gamma} \varphi_h^k(b_{h_j}) = \prod_{\gamma} b_{k_j}$, cioè $a_{k_i} = \prod_{\gamma} b_{k_j}$ e analogamente $a_{k_{i+1}} = \prod_{\gamma'} b_{k_j}$, segue $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_{k_i} \mathscr{A} a_{k_{i+1}}$, quindi $z_k \mathscr{A}^* u_k$. Ma $\varphi_t^k(u_t) = \varphi_t^k(x_t y_t) = \varphi_t^k(x_t) \cdot \varphi_t^k(y_t) = x_k y_k$, quindi $z_k \in \mathscr{A}^*(x_k y_k) = x_k \circ y_k$, cioè $H_k(x_k, y_k, z_k)$, da cui $\bar{z} \in \bar{x} \otimes \bar{y}$.

Teorema 8. *Se $\forall i \in I$, H_i è un ipergruppo completo allora anche H' è completo.*

Se $\forall i \in I$, H_i è un ipergruppo completo allora esiste un gruppoide G_i tale che $\mathscr{A}^*(G_i) = H_i$ [**3**]. Per il Teorema 4 segue che

$$H' = \varinjlim \{H_i\}_{i \in I} = \varinjlim \{\mathscr{A}^*(G_i)\}_{i \in I} = \mathscr{A}^*(\varinjlim \{G_i\}_{i \in I})$$

quindi H' è ipergruppo d'associatività, cioè H' è ipergruppo completo [**3**].

Parte II

Teorema 9. *Sia G un gruppo abeliano. Siano φ_i, $i \in \{1, 2\}$, funzioni $\varphi_i \colon G \times G \to G$ soddisfacenti, $\forall (x, y) \in G^2$, alle condizioni*

$$(\alpha) \qquad \varphi_1(x, o) = x\,,$$

$$(\beta) \qquad \varphi_i(x, y) = \varphi_i(x, o) + \varphi_i(o, y)\,.$$

Poniamo $x \otimes y = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$. Sia $Q = \langle G, \oplus \rangle$ un gruppoide che soddisfi

$$(\mu) \qquad o \oplus G = G \oplus o = G\,.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sottogruppo di G, H_G, generato *al variare in G di x, y, a, b, dagli elementi del tipo $x-\varphi_1(x, a)$, $y-\varphi_2(b, y)$, coincida con $\omega(\mathscr{A}^*(Q))$ è che valgano le seguenti implicazioni*

(1) $\varphi_1(a, b) \in \omega \Leftrightarrow a \in \omega$, (2) $\varphi_2(a, b) \in \omega \Leftrightarrow b \in \omega$.

Dimostriamo che $Q = \langle G, \oplus \rangle$ è un D-gruppoide, cioè $\forall x \in G$, $G \oplus x = x \oplus G = G$.

(a) $G \oplus x = G$; cioè $\forall(x, y) \in G^2$ esiste $a \in G$ tale che $a \oplus x = y$. Poichè G è un gruppo si ha $y - \varphi_2(o, x) - \varphi_1(o, x) \in G$, da (μ) segue che esiste $a \in G$ tale che $a \oplus o = y - \varphi_2(o, x) - \varphi_1(o, x)$, quindi $\varphi_1(a, o) + \varphi_2(a, o) = y - \varphi_2(o, x) - \varphi_1(o, x)$ perciò $y = \varphi_1(a, o) + \varphi_1(o, x) + \varphi_2(a, o) + \varphi_2(o, x)$ e di conseguenza $y = \varphi_1(a, x) + \varphi_2(a, x) = a \oplus x$.

(b) $x \oplus G = G$; cioè $\forall(x, y) \in G^2$ esiste $a \in G$ tale che $x \oplus a = y$. Poniamo $b = y - x - \varphi_2(x, 0)$. Per (μ) esiste $a \in G$ tale che $o \oplus a = b$, quindi $b = \varphi_1(o, a) + \varphi_2(o, a)$ di qui si ottiene $\varphi_1(o, a) + \varphi_2(o, a) = y - x - \varphi_2(x, 0)$ perciò $y = \varphi_1(x, o) + \varphi_1(o, a) + \varphi_2(x, o) + \varphi_2(o, a)$, se ne deduce $y = \varphi_1(x, a) + \varphi_2(x, a) = x \oplus a$.

Proviamo ora che se $H_G = \omega(\mathscr{A}^*(Q))$ allora valgono (1) e (2).

(1) Sia $\varphi_1(x, a) \in \omega$, poichè $x - \varphi_1(x, a) \in \omega$, ω è un gruppo, allora $x \in \omega$. Viceversa se $x \in \omega$, poichè $x - \varphi_1(x, a) \in \omega$, segue $\varphi_1(x, a) \in \omega$.

(2) Si dimostra allo stesso modo di (1).

Dimostriamo, adesso, che se valgono (1) e (2) allora si ha $H_G = \omega(\mathscr{A}^*(Q))$. Poichè Q è D-gruppoide, $\mathscr{A}^*(Q)$ è ipergruppo, quindi esiste il cuore ω [**5**]. Proviamo che ω è un gruppo.

(i) Osserviamo che dall'ipotesi (β) segue $\varphi_i(o, o) = o$; infatti $\varphi_i(o, o) = \varphi_1(o, o) + \varphi_2(o, o)$, da cui $o = \varphi_i(o, o)$, ma $o \oplus o = \varphi_1(o, o) + \varphi_2(o, o)$, quindi $o \in \omega$.

(ii) $\forall(x, y) \in \omega \times \omega$, si ha $x + y \in \omega$. Da $x \in \omega$, $o \in \omega$, poichè ω è D-gruppoide [**4**], segue che esiste $b \in \omega$ tale che $o \oplus b = x$, perciò $x = \varphi_1(o, b) + \varphi_2(o, b)$. Analogamente esiste $a \in \omega$ tale che $a \oplus o = \gamma$, cioè $y = \varphi_1(a, o) + \varphi_2(a, o)$, allora

$$x + y = \varphi_1(o, b) + \varphi_2(o, b) + \varphi_1(a, o) + \varphi_2(a, o)$$

$$= \big(\varphi_1(a, o) + \varphi_1(o, b)\big) + \big(\varphi_2(a, o) + \varphi_2(o, b)\big) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(a, b) = a \oplus b \,,$$

$\{a, b\} \subset \omega$ implica $a \oplus b \in \omega$ e quindi $x + y \in \omega$.

(iii) $\forall x \in \omega$ si ha $-x \in \omega$. Da $x \in \omega$, $o \in \omega$, segue che esiste $a \in \omega$ tale che $x \oplus a = o$, cioè $x \oplus a = \varphi_1(x, a) + \varphi_2(x, a) = o$, da cui $\varphi_1(x, a) = -\varphi_2(x, a)$ ne segue $\varphi_1(x, o) + \varphi_1(o, a) = -\varphi_2(x, a)$, ed essendo $\{\varphi_1(o, a), \varphi_2(x, a)\} \subset \omega$ si ha $-\varphi_1(x, o) = \varphi_1(o, a) + \varphi_2(x, a) \in \omega$. Da ($\alpha$) segue che $-x \in \omega$.

Resta da dimostrare che ω contiene i generatori di H_G.

(a) Proviamo che $\forall (x, a) \in G^2$, si ha $x - \varphi_1(x, a) \in \omega$. Abbiamo $x - \varphi_1(x, o) = o \in \omega$ e, $-\varphi_1(o, a) \in \omega$; d'altra parte ω è un gruppo, quindi $x - \varphi_1(x, o) - \varphi_1(o, a) \in \omega$, da cui $x - \varphi_1(x, a) \in \omega$.

(b) $\forall (y, b) \in G^2$ si ha $y - \varphi_2(b, y) \in \omega$. Abbiamo, $\forall y \in G$ esiste $e \in G$ tale che $e \oplus y = y$, cioè $\varphi_1(e, y) + \varphi_2(e, y) = y$, ne segue $\varphi_1(e, y) + \varphi_2(e, o) + \varphi_2(o, y) = y$, da cui $\varphi_1(e, y) + \varphi_2(e, o) = y - \varphi_2(o, y) \in \omega$, ma $\forall b \in G$ $-\varphi_2(b, o) \in \omega$, quindi $y - \varphi_2(b, y) \in \omega$.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique - Algèbre*, chapitres 1 à 3, Hermann, Paris 1970.

[2] P. Corsini: $[\bullet]_1$ *Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux*, Atti del Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina 1978; $[\bullet]_2$ *Sur les semi-hypergroupes complets et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur., 1979; $[\bullet]_3$ *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Nat., 1979; $[\bullet]_4$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur., 1980.

[3] P. Corsini et G. Romeo, *Hypergroupes complets et groupoids*, Atti del Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina 1978.

[4] G. Gratzer, *Universal Algebra*, Van Nostrand, Company 1968.

[5] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pure Appl., **49** (1970).

* * *