Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 235-242

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Sur les colorations généralisées des hyperarbres et sur les multicolorations des graphes (**)

Introduction

Le problème des quatre couleurs, récemment résolu par K. Appel, W. Haken et J. Koch ([2], [3], [4]), a un peu monopolisé l'attention des mathématiciens: autrement, on ne peut pas expliquer comment le problème de la coloration des graphes n'ait pas été convenablement généralisé dans une époque précédente à celle des travaux indiqués dans la bibliographie [1], [7], [8], [9].

Colorations généralisées ont été considerées dans 1967 par G. Chartrand, D. P. Geller, S. Hedetniemi [7] et, indépendamment, dans 1975, par F. Speranza [9]. Sur la trace des travaux indiqués, nous étudions, dans le n. **0**, les colorations généralisées des hyperarbres; successivement, dans le n. **1**, on introduira et on étudiera le problème de la multicoloration des graphes.

0 - Colorations généralisées des hyperarbres

Un'idée, pas nouvelle et pas récente, tendrait à ramener les problèmes concernants les hypergraphes à problèmes concernants les graphes et tendrait à inclure la théorie des hypergraphes dans celle des graphes. Cette idée est mal vue, avec raison, de ceux qui s'occupent des hypergraphes et, avant tous de celui qui est le fondateur de la théorie [6], qui, à bon escient, soutient que la théorie des hypergraphes a le but non seulement de généraliser, mais aussi

---

(*) Indirizzo: Ist. Mat., Facoltà di Ingegneria, Università, Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 24-X-1980.

celui de unifier et de fournir, au bout du compte, nouveaux éléments de clarification à la théorie même des graphes. Toutefois, cette idée peut être suivi au but d'étudier le problème des colorations généralisées des hyperarbres.

Donnons, avant tout, quelques définitions. Donné un hypergraphe (V, S), nous définirons *chaîne* une séquence du type

$$V_1,\ s_1,\ V_2,\ s_2,\ \ldots,\ s_k,\ V_k\,,$$

où $V_1, V_2, \ldots, V_k$ sont des sommets de l'hypergraphe (V, S) et $s_1, s_2, \ldots, s_k$ sont des simplexes de l'hypergraphe même, de sorte que chaque sommet appartient au simplexe précédent (s'il y en a) et au simplexe suivant (s'il y en a) de la séquence; pour *longueur* on entendra le nombre des simplexes de la chaîne; encore, donnés deux sommets V et W, on dira leur *distance* la longueur de la chaîne de longueur minimale qui joint V et W; la distance entre deux sommets est toujours définie, lorsque on supposera l'hypergraphe connexe, autrement dit lorsque on peut toujours unir deux sommets quelconques, ce que nous férons toujours dans la suite.

On appellera *nombre s-chromatique* d'un hypergraphe le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de l'hypergraphe de sorte que deux sommets, à distance plus petite ou égale à s, aient couleurs différentes; cela dit, on a, naturellement, que le nombre chromatique est le nombre 1-chromatique.

Ici et dans la suite, lorsque nous parlerons d'*hyperarbres*, nous entendrons des hypergraphes connexes tels que deux simplexes n'aient plus qu'un sommet en commun et sans cycles (chaînes avec le sommet initial et terminal coïncidents).

Nous nous proposons de trouver le nombre s-chromatique d'un hyperarbre (¹).

Soit, alors, $G = (V, K)$ un hyperarbre et soit $G'^1 = (V, S)$ le graphe 1-section de G, c'est à dire ([**6**], [**9**]$_1$) le graphe qui a pour sommets les sommets de G de sorte que deux sommets de G'^1 soient joints par une arête s'ils sont extrêmes d'un simplexe au moins de G. Le graphe G'^1 peut être consideré le graphe représentatif (line-graph ou graphe commué, v. [**5**] et [**6**]) d'un graphe G', qui est, comme on voit immédiatement, un arbre. Immédiatement, encore, on voit qu'il y a une correspondance F entre G et G' qui associe à chaque simplexe de G un sommet de G' et à chaque sommet de G, avec degré un,

(¹) Le calcul du nombre s-chromatique d'un arbre a été fait par F. Speranza [**9**] dans le cas $s = 2$, par M. Gionfriddo [**8**] pour s quelconque et par l'Auteur [**1**], indépendamment et par autre voie, encore pour s quelconque.

un sommet de G' de degré un, deux sommets de G' étant joints par une arête s'ils sont les correspondants de deux simplexes adjacents ou bien s'ils sont les correspondants d'un simplexe et d'un de ses sommets (avec degré un).

Ayant posé, pour simplifier les notations, $G'' = G'^1$, et appelés $g_s(M)$ le nombre s-chromatique d'un graphe (ou bien d'un hypergraphe) M [**9**] et $q_s(M)$ l'index s-chromatique [**1**] de M, on a, naturellement,

$$g_s(G) = g_s(G'') \,, \tag{1}$$

parce que la distance entre deux sommets en G'' est égale, comme on voit facilement, à la distance des mêmes sommets en G. Car, alors, G'' est le graphe commué de G', on a, ayant regard à la proposition 2 de [**1**],

$$g_s(G'') = q_s(G') \,; \tag{2}$$

pour cela, en rappelant la proposition 3 de [**1**] et que G' est un arbre, on a encore

$$q_s(G') = g_{s+1}(G') - 1 \tag{3}$$

en outre, d'après la proposition 1 du travail déjà cité, opportunément modifiée et simplifiée (²), on a

$$g_{s+1}(G') = \max |I_{[(s+2/2)]}(X)|_{X \in V(G')} \,, \tag{4}$$

où on a posé

$$I_p(X) = \{W/W \in V(G'),\ d(X, W) \leqslant p\} \,, \tag{5}$$

avec p entier $\geqslant 0$, et où, si r est un nombre réel, $[r]$ est le plus grand entier $\leqslant r$, et où, enfin, $d(X, W)$ est la distance entre X et W et $V(G')$ est l'ensemble des sommets de G'.

De (1), (2), (3) et (4) on a évidemment

$$g_s(G) = \max |I_{[s/2]}(X) \cup I_{[(s-1)/2]}(Y)|_{X \in V(G'),\, Y \in J_1(X)} \,, \tag{6}$$

(²) La Proposition 1 susdite affirme que

$$g_s(G') = \max |I_{[s/2]}(X) \cup I_{[(s-1)/2]}(Y)|_{X \in V(G'),\, Y \in J_1(X)} \,,$$

où I_p a le sens spécifié dans la (5) et $J_1(X)$ est l'ensemble des sommets à distance un de X; on a facilement la (4) car on a, évidemment

$$\max |I_{[s/2]}(X) \cup I_{[(s-1)/2]}(Y)|_{X \in V(G'),\, Y \in J_1(X)} = \max |I_{[(s+1)/2]}(X)|_{X \in V(G')} \,.$$

la (6) consent d'évaluer le nombre s-chromatique de G au moyen d'un calcul qui concerne le graphe G'; pour améliorer le résultat, évaluons le duexième membre de la (6) au moyen de calculs qui concernent seulement l'hypergraphe G.

Dans ce but, observons, avant tout, que si K est un sommet de G' de degré plus grand que un, c'est à dire K est le correspondant, au moyen de F, d'un simplexe s_h de G, on a

$$|I_p(K)| = \sum{}^{(p-1)}(|s_h| - 1) + 1 , \tag{7}$$

où l'addition est étendue au simplex s_h et aux simplexes qui sont distants de s_h d'une distance $p-1$; si, au contraire, K est un sommet pendant de G', appelé K' le sommet de degré plus grand que un adjacent à K en G', on a

$$|I_p(K)| = |I_{p-1}(K')| ; \tag{8}$$

pour cela on a que le nombre $|I_{[(s+2)/2]}(X)|_{X\in V(G')}$ ne peut jamais être le plus grand pour un X avec degré un, parce que on a, en ce cas-là $|I_p(X)| = |I_{p-1}(M)| \leqslant |I_p(M)|$, si M est le sommet, de degré plus grand que un, adjacent à X. Par tout ce qui précede il est facile obtenir la démonstration du théorème qui suit.

Théorème 1. *Si G est un hyperarbre, le nombre s-chromatique de G est*

$$g_s(G) = \max \sum{}^{(t)} (|s_h| - 1) + 1 , \tag{9}$$

où

$$t = [(s+2)/2] - 1 \tag{10}$$

et où l'addition est étendue à un simplexe s_h et aux simplexes qui ont distance de s_h plus petite ou égale à t.

1 - Multicolorations des sommets d'un graphe

Entre les colorations généralisées des sommets d'un graphe, introduisons la suivante.

Si $G = (V, S)$ est un graphe, associons à chaque sommet de G une couleure pour chacune des arêtes qui ont pour extremité le sommet [1]; si V et V' sont deux sommets joints au moyen de l'arête s et si les couleurs associées

[1] Couleurs différentes pour arêtes différentes.

à V et à V', rélativement à s, sont a et b, on demande que a et b soient différents ou bien qu'ils vérifient une opportune relation entre eux, dans la signification que nous allons à préciser.

Précisement, supposons que l'ensemble des couleurs $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ ait été structuré avec une structure de groupe, au moyen de l'operation de « addition » ainsi définie

$$c_i \dot{+} c_j = c_r \,, \tag{10}$$

où r est le reste de la division de $i + j$ pour $n + 1$; on pourra demander que à une même arête soient associées deux couleurs qui aient pour somme le zéro de C (c'est à dire deux éléments symétriques) ou bien que les mêmes deux couleurs aient toujours pour somme l'élément c_n du groupe. Les colorations, relatives aux cas pris en consideration, seront appelées *multicolorations de première ou deuxième espèce* respectivement et *d'ordre* $n + 1$.

Occupons nous, ici, du problème de la multicoloration, dans le sens décrit, des cliques. On peut retenir complètement résolu ce problème au moyen du théorème suivant, que nous démontrons.

Théorème 2. *Chaque clique d'ordre n admet une multicoloration de première espèce ssi* (3) *n est pair et elle admet une multicoloration de deuxième espèce quelconque soit n.*

Alors, avant tout, pour simplifier les notations, nous nous réfèrerons à un cas particulier, parce que les modalités empoyées dans ce cas sont immédiatement transférables en général.

Appelons, donc, les couleus de C $0, 1, 2, \ldots, n$; en outre, donnons à C une structure de groupe cyclique d'ordre $n + 1$, c'est à dire au moyen de l'operation

$$i \dot{+} j = r \,, \tag{11}$$

où r est le reste de la division de $i + j$ pour $n + 1$. Cela dit, si G est une clique d'ordre $n + 2$, le problème de la multicoloration de G peut être différemment affronté en prenant en consideration la matrice (a_{ij}) $(1 \leqslant i \leqslant n + 2,$ $0 \leqslant j \leqslant n)$ telle que $a_{ij} = j$, où les éléments de la ligne i-ème sont les couleurs associées au sommet V_i de G et aux arêtes dont il est un'extremité, et en associant à chaque élément de chaque ligne un élément d'une des autres lignes, de sorte que deux éléments d'une même ligne ne soient jamais associés

(3) On veut entendre, ici et dans la suite, avec « ssi » si et seulement si.

à des éléments d'une même ligne; on fera cette association, s'il s'agit d'une multicoloration de première espèce, en associant à chaque élément de chaque ligne son symétrique relativement à l'operation (11), ou bien, s'il s'agit d'une multicoloration de deuxième espèce, en associant à chaque élément i l'élément j tel que $i \dot{+} j = n$.

On peut comprendre facilement ce que nous avons dit ci-dessus si l'on pense que deux éléments (de deux lignes s et t), associés entre eux, répresentent les couleurs relatives à l'arête qui joint les deux sommets correspondantes aux lignes s et t. Dans la même façon, on comprend facilement que une multicoloration de première espèce est certainement impossible si l'ordre $n+2$ de G est impair, parce que, en ce cas-là, étant 0 symétrique de lui même, ne sera pas possible prendre à couples les zéros de la matrice; pour démonstrer le théorème, alors, il faut montrer de quelle manière on puisse rèaliser les associations susdites, c'est à dire celle relative à la multicoloration de première espèce, dans le cas $n+2$ pair, et celle relative à la multicoloration de deuxième espèce, pour n quelconque.

À ce but, dans le cas n pair, nous regarderons le cas particulier, que l'on peut étendre, selon ce que nous déjà avons dit, en général, où n soit égale à 6; prenons, alors, en consideration la matrice (a_{ij}) $(1 \leqslant i \leqslant 8,\ 0 \leqslant j \leqslant 6)$ telle que $a_{ij} = j$, et montrons une procédure, qui probablement est unique, pour associer à chaque élément de chaque ligne un élément d'une des autres lignes, symétrique, de sorte que deux éléments d'une même ligne ne soient jamais associés à deux éléments d'une même ligne, bien entendu biunivoquement, c'est à dire dans le sens où un élément ne soit pas associé à deux éléments différents.

La procédure est la suivante: aux éléments $0, 1, 2, \ldots, 6$ de la première ligne on associe les éléments $0, 1, 2, \ldots, 6$ des lignes, respectivement, $2, 3, 4, \ldots, 8$ (sur la diagonale); aux éléments de la deuxième ligne (0 exclu) on associe les éléments $2, 1, 4, 3, 6, 5$ des lignes, respectivement, $3, 4, 5, 6, 7, 8$; aux éléments de la troisième ligne (à l'exception de 1 et de 2) on associe les éléments $0, 1, 2, 3, 4$ des lignes, respectivement, $4, 5, 6, 7, 8$ (sur la diagonale); aux éléments de la quatrième lignes (à l'exception de $0, 1, 2$) on associe les éléments $2, 1, 4, 3$ des lignes $5, 6, 7, 8$; aux éléments de la cinquième ligne (à l'exception de $1, 2, 3, 4$) on associe les éléments $0, 1, 2$ des lignes $6, 7, 8$ (sur la diagonale); aux éléments qui restent de la sixième ligne, 5 et 6, on associe les éléments $2, 1$ des lignes $7, 8$; enfin, au zéro qui reste dans la septième ligne on associe le zéro qui reste dans l'huitième ligne.

La multicoloration de deuxième espèce peut être obtenue, au contraire, avec une procédure plus facile, qui vaut, comme on pourra voir, dans le cas où n est pair comme dans le cas où n est impair. En référence à la même matrice, on obtient une association facile en prenant en consideration les diagonales secondaires de la matrice; précisement, aux éléments $0, 1, 2, .., 6$ de la première ligne on associe les éléments (complémentaires à 6) $6, 5, 4, ..., 0$ des lignes $2, 3, 4, ..., 8$ (sur la diagonale secondaire); aux éléments $0, 1, 2, ..., 5$ qui restent sur la deuxième ligne on associe les éléments $6, 5, 4, ..., 1$ des lignes $3, 4, 5, ..., 8$ (toujours sur la diagonale secondaire); aux éléments $0, 1, 2, ..., 4$ qui restent sur la troisième ligne les éléments $6, 5, 4, ..., 2$ d'une d'autres diagonales secondaires, et ainsi de suite; observons, pour compléter la démonstration du théorème, au moins mais sans perdre de généralité, pour ce que nous déjà avons dit, dans le cas particulier décrit, que l'association est toujours possible, quelconque soit n, car ne peut jamais se vérifier la défaillance relativement à la multicoloration de première espèce; en effet, seulement dans le cas où n est pair l'élément $n/2$ est associé à soi même (son complementaire à n) mais, dans ce cas, il n'y a pas de difficulté, parce que le nombre des lignes est pair, ce qui ne se vérifiait pas pour le zéro, relativement à la multicoloration de première espèce. L'énoncé est donc démontré.

Pour conclure, remarquons que, à côté des multicolorations considérées (de première et de deuxième espèce), on pourra prendre en consideration des multicolorations pour lesquelles on demande que à une arête soient associées des couleurs qui aient pour somme un élément du groupe différent de zéro ou de n et, ainsi, considerer la possibilité d'effectuer une multicoloration de ce genre pour un graphe complet.

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[2] K. APPEL, *The proof of the four-color theorem*, New Sc. (1976), 711-712.

[3] K. APPEL and W. HAKEN: [•]$_1$ *The existence of unavoidable sets of geographically good configurations*, Illinois J. Math. **20** (1976), 218-297; [•]$_2$ *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 711-712; [•]$_3$ *Every planar map is four colorable*, (I), *Discharging*, Illinois J. Math. **21** (1977), 429-490; [•]$_4$ *The solution of the four-colour maps problem*, Sc. Amer. 237, n. 4 (1977), 108-121.

[4] K. APPEL, W. HAKEN and J. KOCH, *Every planar map is four colorable*, (II), *Reducibility*, Illinois J. Math. **21** (1977), 491-567.

[5] G. BALCONI, *Una caratterizzazione dei singrammi commutati*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **107** (1973), 685-698.

[6] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[7] G. Chartrand, D. P. Geller and S. Hedetniemi, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Camb. Phill. Soc. **64** (1968), 265-271.

[8] M. Gionfriddo, *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454.

[9] F. Speranza: $[\bullet]_1$ *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes*, Colloq. Math. **27** (1973), 269-274; $[\bullet]_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, Suppl. fasc. 3 (1975), 53-62; $[\bullet]_3$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; $[\bullet]_4$ *Sur les colorations des graphes orientés*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-1 (1979), 517-522.

Summary

We study generalized colourings of hypertrees; furthermore we introduced and study the multicolourings of graphs. Generalized colourings have been introduced and studied by G. Chartrand, D. P. Geller, S. Hedetniemi [7] *and, independently, by F. Speranza* [**9**], *and, subsequently, by M. Gionfriddo* [**8**] *and S. Antonucci* [**1**].

* * *