Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 223-234

F. AMATO (*)

# Sur une classe de variétés paracomplexes possédant la propriété concirculaire (**)

Soit $M(U, g)$ une variété paracomplexe [6] de dimension $2n$, où $U$ est l'opérateur parahermitien ($U^2 = +1$) et $g$ la métrique de $M$. On peut décomposer l'espace tangent $T_p(M)$ en $p \in M$ suivant $T_p(M) = S_p \oplus S_p^*$ où $S_p$ et $S_p^*$ sont respectivement 2 sous-espaces *self-orthogonaux* [8] (abr. s.o.) de dimension $n$.

Si au voisinage de chaque point $p$ il existe un repère $\mathscr{F} = \{h_A\} \in \mathscr{F}(M)$ ($\mathscr{F}(M)$ fibré principal des repères parahermitiens de $M$) tel que les vecteurs de la base d'un des sous-espaces s.o., soit $S_p$, soient *concirculaires* (soit $\nabla_Z h_\alpha = t_\alpha Z$, $\forall Z \in S_p$, $t_\alpha \in C^\infty(M)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, $\alpha^* = \alpha + n$), on dit [5] que le espace $M$ possède la *propriété concirculaire*. La connexion qui structure $M$ est alors nommé une connexion concirculaire (notée par $\nabla_c$).

Dans le présent ouvrage on suppose que l'espace paracomplexe $M$, possède la propriété *concirculaire* et qu'en outre la 2-forme presque symplectique $\Omega$ échangeable avec $g$ est *conforme symplectique*. Dans ce cas à $\nabla_c$ sont associés un champ vectoriel $X$ et une 1-forme $\theta$, dénommés respectivement le *champ principal* et le *pfaffien principal*.

Si $j$ et $\mu$ sont respectivement l'isomorphisme canonique défini par $g$ et l'isomorphisme de fibrés défini par $\Omega$ on établit les propriétés suivantes:

(a) $X$ et $(j^{-1} \circ \mu)X$ sont des champs isotropes géodésiques et $(j^{-1} \circ \mu)X$ est un automorphisme infinitésimal de la structure conforme symplectique $(\Omega, \theta)$ ayant $\theta$ pour covecteur de Lee.

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Cesare Battisti 90, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-X-1980.

(b) Les 2-formes de torsions $\Omega^\alpha$ qui correspondent au 1-er espace s.o. sont présymplectiques et toutes les 2-formes de courbures sont conformes présymplectiques.

(c) $M$ est *Ricci minimale* et a pour courbure scalaire la norme euclidienne de $X$ multipliée avec $n(n-1)$.

On considère ensuite deux types d'immersions propres:

(I) L'immersion $x\colon M_i \to M$ où $M_i$ est une variété anti-invariante de dimension $n$; celle-ci est presque quasi-ombilicale et le vecteur de courbure moyenne $H$ associée à $x$ est $H = \big((n+1)/2n)\big)X - (j^{-1}\circ\mu)X\big)|_{M_i}$.

(II) L'immersion $x\colon M_a \to M$ où $M_a$ est une *sous-variété invariante* de dimension $2q$ $(q < n)$; celle-ci est *ombilicale* pour les sections normales du 1er espace s.o. et est *géodésique* pour les sections normales du 2ème espace s.o..

Enfin sur la variété fibré tangent $TM$ on considère le relevement complet [**10**] $\Omega^c$ de $\Omega$ et on montre que $\Omega^c$ est une *2-forme finslerienne.* En outre on détermine sur $TM$ un système mécanique [**5**] pour lequel le *système dynamique* associé est une *gerbe* [**1**].

**1** – Soit $(M, g)$ une variété pseudo-riemannienne de signature $(n, n)$ et de classe $C^\infty$ et soit $e_\alpha$, $e_{\alpha^*}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, $\alpha^* = \alpha + n$ une base orthonormée de l'espace tangent $T_p(M)$ en $p \in M$.

Moyennant l'opérateur *parahermitien* $U$ [**6**] ($U$ est linéaire et $U^2 = +1$) en déduit de $e_\alpha$, $e_{\alpha^*}$ une base de Witt $h_\alpha$, $h_{\alpha^*}$ définie par

$$(1.1) \qquad h_\alpha = \frac{e_\alpha + Ue_{\alpha^*}}{\sqrt{2}}, \qquad h_{\alpha^*} = \frac{e_\alpha - Ue_{\alpha^*}}{\sqrt{2}}.$$

La base $\{h_\alpha, h_{\alpha^*}\}$ est formée par des vecteurs isotropes réels, et elle est normée par

$$(1.2) \qquad \langle h_\alpha, h_{\beta^*}\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Une pareille base de Witt est dénommée une base *parahermitienne* [**6**].

Soit $\{\theta^A;\ A = 1, \ldots, 2n\}$ la base duale de $\{h_A\}$; alors la métrique $g$ en termes de corepère $\{\theta^A\}$ a la forme parahermitienne

$$(1.3) \qquad g = 2\textstyle\sum_\alpha \theta^\alpha \otimes \theta^{\alpha^*},$$

et celle-ci est échangeable avec la forme *presque symplectique*

$$(1.4) \qquad \Omega = \textstyle\sum_\alpha \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha^*}.$$

Si $\theta_B^A$ sont les 1-formes de connexion sur le fibré principal parahermitien $\mathscr{F}(M) = \cup\{h_\alpha, h_{\alpha*}\}$, une matrice de connexion de la forme

$$\mathscr{M}_c = \begin{pmatrix} \theta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & \theta_{\beta*}^{\alpha*} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

définit une connexion de Chern-Libermann. Pour une pareille connexion les équations de structure qui définissent une variété paracomplexe sont

(1.6) $dp = \theta^A \otimes e_A$ (forme de soudure);

(1.7) $\nabla h_\alpha = \theta_\alpha^\beta \otimes h_\beta$, $\nabla h_{\alpha*} = \theta_{\alpha*}^{\beta*} \otimes h_{\beta*}$ (équations de la connexion);

(1.8) $d\wedge\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha + \Omega^\alpha$, $d\wedge\theta^{\alpha*} = \theta^{\beta*}\wedge\theta_{\beta*}^{\alpha*} + \Omega^{\alpha*}$ (1er groupe d'équations de structure);

(1.9) $d\wedge\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma\wedge\theta_\gamma^\alpha + \Omega_\beta^\alpha$, $d\wedge\theta_{\beta*}^{\alpha*} = \theta_{\beta*}^{\gamma*}\wedge\theta_{\gamma*}^{\alpha*} + \Omega_{\beta*}^{\alpha*}$ (2ème groupe d'équations de structure);

De (1.2) on a

$$\theta_\beta^\alpha + \theta_{\alpha*}^{\beta*} = 0, \tag{1.10}$$

et dans (1.8) et (1.9) les 2-formes $\Omega^\alpha$, $\Omega^{\alpha*}$ et $\Omega_\beta^\alpha$, $\Omega_{\beta*}^{\alpha*}$ représentent respectivement les 2-formes de *torsions* et les 2-formes de *courbure*. On a [**6**]

$$\begin{aligned} \Omega^\alpha &= \Omega_1^\alpha + \Omega_2^\alpha, \\ \Omega^{\alpha*} &= \Omega_1^{\alpha*} + \Omega_2^{\alpha*}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_1^\alpha &= A_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta\wedge\theta^\gamma, & \Omega_2^\alpha &= B_{\beta\gamma}^\alpha\theta^{\beta*}\wedge\theta^{\gamma*}, \\ \Omega_1^{\alpha*} &= A_{\beta*\gamma*}^{\alpha*}\theta^{\beta*}\wedge\theta^{\gamma*}, & \Omega_2^{\alpha*} &= B_{\beta*\gamma*}^{\alpha*}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma; \qquad A, B \in C^\infty(M). \end{aligned} \tag{1.12}$$

L'espace tangent $T_p(M)$ peut se décomposer suivant [**7**]$_1$

$$T_p(M) = S_p \oplus S_p^*, \tag{1.13}$$

où $S_p$ et $S_p^*$ sont deux sous-espace *self-orthogonaux* (abr. espaces s.o.). Ainsi on peut décomposer (1.6) en

$$dp = (dp)_s + (dp)_{s*}, \tag{1.14}$$

avec

$$(1.15)\qquad \begin{aligned}(\mathrm{d}p)_s &= \sum \theta^\alpha \otimes h_\alpha\,,\\ (\mathrm{d}p)_{s*} &= \sum \theta^{\alpha*} \otimes h_{\alpha*}\,,\end{aligned}$$

où $(\mathrm{d}p)_s$ et $(\mathrm{d}p)_{s*}$ sont les composantes self-orthogonales de $\mathrm{d}p$. Enfin la différentielle extérieure de (1.4) est exprimée par

$$(1.16)\qquad \mathrm{d}\wedge\Omega = \sum_\alpha (\Omega^\alpha \wedge \theta^{\alpha*} - \Omega^{\alpha*}\wedge\theta^\alpha)\,.$$

**2** – Dans [**2**] on définit une variété parakählerienne $M$ comme ayant la propriété concirculaire si au voisinage de chaque point $p\in M$, il existe une repère $\mathcal{F}\in\mathcal{F}(M)$ tel que les vecteurs de la base d'un des sous espace s.o. (soit $S_p$) soient concirculaires. Ceci s'exprime de forme intrinsèque par $\nabla_Z h_\alpha = t_\alpha Z$, $\forall Z \in S_p$, $t_\alpha \in C^\infty(M)$ et cela implique

$$(2.1)\qquad \theta^\alpha_\beta = t_\beta \theta^\alpha\,.$$

Une connexion telle que (2.1) sera appelée une *connexion concirculaire* (notée par $\nabla_c$) et l'espace self-orthogonal $S_p$ sera dénommé le 1er espace s.o. Dans ces conditions les équations (1.7) s'écrivent

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}\nabla h_\alpha &= t_\alpha (\mathrm{d}p)_s\,,\\ \nabla h_{\alpha*} &= -\theta^\alpha \otimes X^*\,,\end{aligned}$$

où

$$(2.3)\qquad X^* = \sum t_\alpha h_{\alpha*} \in S^*_p\,,$$

et le 1er groupe d'équations de structure (1.8) s'écrit

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}\mathrm{d}\wedge\theta^\alpha &= \theta\wedge\theta^\alpha + \Omega^\alpha\,,\\ \mathrm{d}\wedge\theta^{\alpha*} &= t_\alpha \Omega + \Omega^{\alpha*}\end{aligned}$$

$$(2.5)\qquad \theta = \sum t_\alpha \theta^\alpha \in T^*_p(M)\,.$$

Eu égard à (2.1), (2.4) et (2.5) les équations (1.9) donnent

$$(2.6)\qquad \Omega^\alpha_\beta = t_\beta \Omega^\alpha + \mathrm{d}t_\beta \wedge \theta^\alpha = -\Omega^{\beta*}_{\alpha*}\,.$$

Soit maintenant

$$(2.7)\qquad \sum \theta^\alpha \wedge \Omega^\beta_\alpha = 0$$

les premières *identités de Bianchi.*

Compte tenu de (2.6) et puisque

$$d\wedge\theta = \sum dt_\alpha\wedge\theta^\alpha + \sum t_\alpha\Omega^\alpha\,, \tag{2.8}$$

les équations (2.7) s'écrivent

$$\theta\wedge\Omega^\alpha + (t_\beta\Omega^\beta - d\wedge\theta)\wedge\theta^\alpha = 0\,. \tag{2.9}$$

Un calcul élémentaire permet de déduire de (2.9)

$$\theta\wedge(d\wedge\theta) = 0\,, \tag{2.10}$$

ce qui montre que $\theta$ est *complètement intégrable.*

L'équation (2.10) et les équations (2.4) nous conduisent à chercher à définir sur $M$ une structure *conforme symplectique* $CSp(n, R)$ déterminée par le couple $(\Omega, \theta)$.

La forme $\theta$ devant par définition être *exacte*, on devra d'abord écrire

$$d\wedge\theta = 0\,, \tag{2.11}$$

et par conséquent en vertu de (2.8) on peut poser

$$dt_\alpha = f\theta^\alpha + t_\alpha\theta\,, \qquad f\in C^\infty(M)\,. \tag{2.12}$$

Si nous poson $t^2 = \sum (t_\alpha)^2$ pour la norme euclidienne des $t_\alpha$ on déduit, de (2.12),

$$t\,dt = (f + t^2)\theta\,, \tag{2.13}$$

et $f + t^2$ est le multiplicateur d'Euler de $\theta$. La différentiation extérieure de (2.13) d'une part et d'autre part $\theta$ devant être exacte permet de poser

$$\frac{df}{f} = -\theta\,. \tag{2.14}$$

Par ailleurs la différentiation extérieure des équations (2.12) donne, eu égard à (2.14),

$$\Omega^\alpha = \theta\wedge\theta^\alpha\,, \tag{2.15}$$

et ceci implique compte tenu de (2.4)

$$d\wedge\theta^\alpha = 2\theta\wedge\theta^\alpha\,. \tag{2.16}$$

On peut donc dire que toutes les 2-formes $\Omega^\alpha$ sont *pré-symplectiques* ($d\wedge\Omega^\alpha = 0$, $\dim \operatorname{Ker} \Omega^\alpha \neq 0$). En outre de (2.6) on déduit à l'aide de (2.12), (2.14) et (2.16)

$$\Omega^\alpha_\beta = 2t_\beta \theta\wedge\theta^\alpha + f\theta^\beta\wedge\theta^\alpha \,, \tag{2.17}$$

et par différentiation extérieure il vient

$$d\wedge\Omega^\alpha_\beta = \theta\wedge\Omega^\alpha_\beta \,. \tag{2.18}$$

Ainsi on peut dire que toutes les formes de courbures sont *conformes pré-symplectiques*. Pour que $\Omega$ soit conforme symplectique il suffit donc d'avoir

$$\sum \Omega^{\alpha *}\wedge\theta^\alpha = 0 \,. \tag{2.19}$$

Mais en vertu de

$$d\wedge\Omega = \theta\wedge\Omega \,, \tag{2.20}$$

la différentiation extérieure de (2.19) compte tenu de (2.12) et (2.4) montre que l'équation extérieure (2.19) est *fermée*, par conséquence (2.19) n'implique pas de conditions nouvelles. On a ainsi obtenu sur $M$ une structure conforme symplectique ayant $\theta$ pour *covecteur de Lee*.

Soient $j$ et $\mu$ respectivement l'isomorphisme canonique défini par la métrique $g$ de $M$ et l'isomorphisme de fibrés: $TM \to T^*M$, $Z \to i_Z\Omega$ définit par $\Omega$. Convenons d'appeler le champ vectoriel $X = \sum t_\alpha h_\alpha \in S_p$ et la 1-forme $\theta$ respectivement le *champ principal* et le *pfaffien principal* associés à la connexion $\nabla_c$.

On a

$$\theta = jX = -\mu X^* \Rightarrow X^* = +(j^{-1}\circ\mu)X \,, \tag{2.21}$$

et eu égard à (2.20) il résulte aussitôt

$$\mathscr{L}_{X^*}\Omega = 0 \,, \tag{2.22}$$

et puisque visiblement

$$\mathscr{L}_{X^*}\theta = 0 \,, \tag{2.23}$$

on peut dire que $X^*$ est un *automorphisme infinitesimal* de la structure conforme symplectique $(\Omega, \theta)$.

A l'aide de (2.2) et (2.12) on trouve

$$\nabla X = \theta \otimes X + (f + f^2)(\mathrm{d}p)_s \tag{2.24}$$

et

$$\nabla X^* = f \sum \theta^\alpha \otimes h_{\alpha *} . \tag{2.25}$$

On déduit

$$\nabla_X X = (2f^2 + f) X \tag{2.26}$$

et

$$\nabla_{X^*} X^* = 0 . \tag{2.27}$$

Les champs vectoriels $X$ et $X^*$ étaient les deux isotropes, la relation (2.26) exprime que $X$ est isotrope géodésique et la relation (2.27) que $X^*$ est conformément à la définition de R. Rosca, un champ géodésique *stricte.* De plus il vient $[X, X^*] = fX^*$, $[\ ]$: crochet de Lie, et cette relation exprime que le champ vectoriel $X^*$ admet une *transformation infinitesimale de générateur* $X$.

En rappelant que $\sum \Omega^\alpha_\alpha$ est la 2-forme de Ricci sur $M$, on déduit ausitôt de (2.17), et eu égard à l'expression de $\theta$, que l'on a $\sum \Omega^\alpha_\alpha = 0$. Cette équation montre que $M$ est *Ricci minimale.* En outre toujours de (2.17) il vient $R_{\alpha\alpha} = (n-1)(2t^2 + f)$ et l'on déduit que la *courbure scalaire* $R$ est donnée par $R = n(n-1)(t^2 + f)$.

Théorème. *Soit $M(U, \Omega, g)$ une variété paracomplexe structurée par une connexion concirculaire $\nabla_c$ et soient $X$ et $\theta$ respectivement le champ principal e le pfaffien principal associés à $\nabla_c$.*

*Une structure conforme symplectique définie par $\Omega$ et $\theta$ est déterminée par un système extérieure fermée et si $\mu$ et $j$ sont respectivement l'isomorphisme de fibrés défini par $\Omega$ et l'isomorphisme canonique défini par $g$, on a les propriétés suivantes:*

(a) *$X$ est un champ isotrope géodésique et $(j^{-1} \circ \mu) X$ est un champ (isotrope) géodésique strict.*

(b) *$(j^{-1} \circ \mu) X$ est un automorphisme infinitesimal de la structure conforme symplectique $(\Omega, \theta)$ et admet une transformation infinitesimale de générateur $X$.*

(c) *Les 2-formes de torsions qui correspondent au* 1er *espace* s.o. *sont pré-symplectiques et toutes les 2-formes de courbure sont conformes pré-symplectiques.*

(d) *La variété $M$ est Ricci minimale et a pour courbure scalaire le multiplicateur d'Euler de $\theta$ multiplée avec $n(n-1)$.*

**3** – Soit $x\colon \tilde{M} \to M$ l'immersion propre d'une sous-variété $\tilde{M}$ dans $M$ et soit $T_{x(p)}(\tilde{M})$ l'espace tangent à $\tilde{M}$ en chaque point $x(p) \in \tilde{M}$. D'aprés [**3**] l'immersion $x$ est anti-invariante si $UT_{x(p)}(\tilde{M}) \subseteq T_{x(p)}(\tilde{M})^{\perp}$ ($T_{x(p)}(\tilde{M})^{\perp}$: espace normale à $\tilde{M}$ en $x(p)$; $x^* T(M) = T(\tilde{M}) \oplus T(\tilde{M})^{\perp}$). Nous noterons $\tilde{M}$ par $M_i$ et supposerons que $M_i$ est de dimension maximale, soit $UT_{x(p)}(M_i) = T_{x(p)}(M_i)$. Dans ce cas on trouve

$$\theta^{\alpha} = \theta^{\alpha^*}, \tag{3.1}$$

et si nous posons $e_\alpha = h_\alpha + h_{\alpha^*}$ et $n_\alpha = h_\alpha - h_{\alpha^*}$ les $e_\alpha$ forment base tangentielle de $M_i$ tandis que les $n_\alpha$ sont les *sections normales* associées à $x$. Pour des raisons de simplicité nous noterons les éléments induites par $x$ avec les mêmes lettres.

On a

$$dx(p) = \sum \theta^{\alpha} \otimes e_\alpha, \tag{3.2}$$

et de (2.2) on déduit

$$\nabla n_\alpha = t_\alpha \, dx(p) + \theta^{\alpha} \otimes X^*. \tag{3.3}$$

Définition. Nous disons qu'une section normale $n_\alpha$ sur $\tilde{M}$ est *presque quasi-ombilicale* si l'on a $\langle \nabla n_\alpha, dx(p) \rangle = \lambda_\alpha \tilde{g} + \mu_\alpha \theta^{\alpha} \otimes \varphi$, $\varphi \in \Lambda^1 \tilde{M}$.

Soient $l_\alpha = -\langle dx(p), \nabla n_\alpha \rangle$ les formes quadratiques fondamentales associées à $x$ (les $l_\alpha$ sont des champs de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2, et ne dépendent que de $T(M_i)^{\perp}$).

De (3.2) et (3.3) il vient aussitôt

$$l_\alpha = -t_\alpha \langle dx(p), dx(p) \rangle + \theta^{\alpha} \otimes \theta, \tag{3.4}$$

et l'immersion $x\colon M_i \to M$ est *totalement presque quasi-ombilicale*.

La $(n-1)$-forme vectorielle de courbure moyenne $\Phi$ est comme on sait [**3**]

$$\Phi = \sum (-1)^{\alpha-1} \theta^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^{\alpha} \wedge \ldots \wedge \theta^n \otimes e_\alpha, \tag{3.5}$$

et

$$d \wedge \Phi = n \eta \otimes H, \tag{3.6}$$

($\hat{\ }$ indique omission).

Dans (3.6), $H$ est le vecteur de courbure moyenne associé à $x$ et $\eta = \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n$ est la forme volume canonicque de $M_i$.

En faisant usage de (2.2) et (2.16) on trouve après calcul

$$H = \frac{n+1}{2n}(X - X^*) . \tag{3.7}$$

Dans (3.7) $X$ et $X^*$ représentent les valeurs induites par $x$ des champs $X$ et $X^*$.

Il résulte $\langle H, H\rangle - \big((n+1)/2n^2\big)t^2$ et ainsi on a une interprétation invariante de la valeur induite de la norme euclidienne $t^2$ des $t_\alpha$.

Soit maintenant l'immersion $x\colon \tilde{M} \to M$ où $\tilde{M}$ une sous-variété telle que $UT_{x(p)}(\tilde{M}) = T_{x(p)}(\tilde{M})$. Une telle sous-variété est dite invariante [**9**] et est notée par $M_a$. Si $\dim M_a = 2q$, alors $M_a$ est définie par

$$\theta^\gamma = 0 , \quad \theta^{\gamma^*} = 0 ; \qquad \gamma = q+1 , \quad \gamma^* = \gamma + n . \tag{3.8}$$

Eu égard à (2.2) on trouve que les secondes formes fondamentales associés à l'immersion $x$ sont

$$l_\gamma = t_\gamma \sum \theta^i \otimes i^* , \qquad i = 1, ..., q , \; i^* = i + n , \tag{3.9}$$

et

$$l_{\gamma^*} = 0 . \tag{3.10}$$

Mais la métrique de $M_a$ étant $\sum \theta^i \otimes \theta^{i^*}$ il résulte que les sections normales $h_\gamma$ qui correspondent au 1er espace self-orthogonal sont *ombilicales* tandis que celles qui correspondent au second espace self-orthogonal sont *géodésiques*.

Théorème. *Soit $M(U, \Omega, g)$ la variété paracomplexe discutée au* n. **2**. *On peut considérer les immersions propres suivantes*:

(a) *Les immersions anti-invariantes $x\colon M_i \to M$; celles-ci sont presque quasi-ombilicales et le vecteur de courbure moyenne associé à $x$ est* $\big($*au facteur* $(n+1)/2n$ *près*$\big)$ *la valeur induite de* $X - (j^{-1}\circ\mu)X$.

(b) *Les immersions invariantes $x\colon M_a \to M$; celles-ci sont ombilicales pour les sections normales du* 1*er espace self-orthogonal et géodésiques pour les sections normales du* 2*ème espace self-orthogonal.*

**4** – Soit $TM$ la variété fibré tangent à la variété $M$ discuté au n. **2** et soit $C = \sum v^A(\partial/\partial v^A)$ le *champ canonique* sur $TM$. Soit $(\ )^c$ et $(\ )^v$ respectivement le relevement complet et vertical (calculé au termes du fibré cotangent $\mathscr{F}^*(M)$). Poson

$$l = \textstyle\sum_\alpha v^\alpha v^{\alpha*} , \tag{4.1}$$

et indiquons par $d_v$ et $i_v$ les opérations de différentiations et de dérivation verticale sur $\mathscr{F}^*(M)$ ($d_v$ et $i_v$ sont respectivement une antidérivation de degré 1 et une dérivation de degré 0 sur $ATM$ [**4**]). On a

$$\mathrm{d}_\alpha l = \textstyle\sum_\alpha (v^{\alpha*}\theta^\alpha + v^\alpha\theta^{\alpha*}) , \tag{4.2}$$

et l'on déduit

$$\Pi = \mathrm{d}\wedge\mathrm{d}_\alpha l = \textstyle\sum_\alpha (\mathrm{d}v^{\alpha*}\wedge\theta^* + \mathrm{d}v^\alpha\wedge\theta^{\alpha*}) + 2\theta\wedge\sum v^{\alpha*}\theta^\alpha \\ + (\textstyle\sum t_\alpha v^\alpha)\wedge\Omega + \sum v^\alpha\Omega^{\alpha*} . \tag{4.3}$$

Il vien rapidement

$$\mathscr{L}_c\Pi = \Pi , \qquad i_\alpha\Pi = 0 , \tag{4.4}$$

et comme d'autre part la forme $\Pi$ est visiblement symplectique (de rang $4n$) les équations (4.4) expriment que $\Pi$ est une *forme finslerienne.*

D'autre par le relèvement complet $\Omega^c$ est [**10**]

$$\Omega^c = \textstyle\sum_\alpha (\mathrm{d}v^\alpha\wedge\theta^{\alpha*} + \theta^\alpha\wedge\mathrm{d}v^{\alpha*}) , \tag{4.5}$$

et l'on déduit

$$\mathrm{d}\wedge\Omega^c = -(\textstyle\sum_\alpha t_\alpha\,\mathrm{d}v^\alpha)\wedge\Omega - \sum_\alpha \mathrm{d}v^\alpha\wedge\Omega^{\alpha*} + 2\theta\wedge\sum_\alpha\theta^\alpha\wedge\mathrm{d}v^{\alpha*} , \tag{4.6}$$

on trouve

$$\mathscr{L}_c\,\Omega^c = \Omega^c , \qquad i_\alpha\Omega^c = 0 , \tag{4.7}$$

et par conséquence la forme $\Omega^c$ est aussi finslerienne.

Considérons maintenant le système mécanique $\mathscr{M} = \{M, T, \pi\}$ (dans le sens de J. Klein [**5**]) où l'énergie cinétique $T$ et le champ de forces $\pi$ sont définis respectivement par

$$T = l, \qquad \pi = l\,\theta. \tag{4.8}$$

En vertu du fait $d_v T = \Pi$ on peut dire que $\mathscr{M}$ est régulier et a pour forme fondamentale $\Pi$. On trouve après calcul

$$\mathscr{L}_c T = 2T\,, \qquad \mathscr{L}_c \pi = 2\pi\,. \tag{4.9}$$

Ainsi $T$ et $\pi$ sont les deux homogènes et du même degré 2 [4].

Si $Z$ est le système dynamique associé à $\mathscr{M}$ ($Z$ est défini via la formule $i_Z\Pi = \mathrm{d}(T - \mathscr{L}_c T) + \pi$). Alors:

(a) puisque $T$ et $\pi$ sont homogène de même degré, $Z$ est une *gerbe* sur $M$, soit $[C, Z] = Z$ [1];

(b) puisque $T$ est de degré 2, la forme $\Pi - (\mathrm{d}T - \pi)\wedge \mathrm{d}t \in \Lambda^2(TM \times R)$ est une *relation intégrale d'invariance* pour $Z + \partial/\partial t$.

Théorème. *Soit $TM$ la variété fibré tangent correspondant à la variété paracomplexe du* n. **2** *et soit $\Omega^c$ le relevement complet de la forme conforme symplectique de $M$ alors:*

(a) *$\Omega^c$ est une forme finslerienne,*

(b) *on peut déterminer sur $TM$ un système mécanique régulier pour lequel la forme fondamentale est finslerienne et dont le système dynamique associé est une gerbe sur $M$.*

## Bibliografia

[1] F. Amato, *Variétés lorentziennes de dimension paire structurées par une connexion invariante involutive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 151-162.

[2] G. Arca, R. Caddeo et R. Rosca, *Variétés parakähleriennes possédant la propriété concirculaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **286** (1978), 1209-1212.

[3] B. Y. Chen, *G-total curvature of immersed manifolds*, J. Diff. Geom. **7** (1972), 371-391.

[4] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.

[5] J. Klein, *Espaces variationnels et mécanique*, Ann. Inst. Fourier **12** (1962), 1-124.

[6] P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954), 27-120.

[7] R. Rosca: [•]$_1$ *Parakählerian manifolds carrying a pair of concurrent self-orthogonal vector fields* (dedicated to E. Spencer on the occasion of his 70 birthday), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **286** (1978), 207-217; [•]$_2$ *Sous variétés anti-invariantes d'une variétés parakählerienne structurée par une connexion géodésique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **287** (1978), 539-541.

[8] J. M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1970.

[9] K. Yano and M. Kon, *Anti-invariant sub manifolds*, M. Dekker, New York 1976.

[10] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles*, M. Dekker, New York 1973.

## Riassunto

*Si studiano le varietà paracomplesse $M(U, \Omega, g)$ strutturate da una connessione concircolare e per le quali la 2-forma quasi simplettica $\Omega$ permutabile con $g$ è conforme simplettica.*

* * *