Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 183-193

FRANCESCA ROLANDI (*)

# Su una disequazione relativa al moto di un fluido di Bingham (**)

1 – Come è noto, la maggiore difficoltà che si incontra nello studio del moto turbolento di un fluido, Newtoniano o non, consiste nel fatto che non è ancora stato possibile dimostrare, se si esclude il caso di moto piano, un teo rema di esistenza ed unicità in grande per la soluzione del classico problema misto di Cauchy-Dirichlet. Questa circostanza, non essendo giustificata fisicamente, deve essere imputata o alla inadeguatezza degli strumenti matematici utilizzati, o al fatto che il modello matematico adottato non descrive in modo adeguato il fenomeno fisico in esame. Qualora si accetti la seconda ipotesi, va innanzi tutto osservato che le equazioni, che sono assunte governare il moto del fluido, non sono relativistiche e quindi perdono di significato se la velocità $u$ [1] del fluido diventa paragonabile a quella $c$ della luce; a maggior ragione deve essere verificata la condizione

$$|u|\leqslant c\,. \tag{1.1}$$

Benchè la (1.1) venga assunta nella deduzione delle equazioni idrodinamiche, a posteriori essa non è più necessariamente soddisfatta in quanto, in tali equazioni, la velocità può, a priori, assumere un valore qualunque. Diventa perciò *naturale* imporre alla soluzione del problema considerato di verificare la condizione (1.1); dal punto di vista matematico, ciò si traduce nel sostituire

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Ingegneria del Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-IX-1980.

[1] Qui e nel seguito, dal momento che ciò non porta ad ambiguità, useremo le stesse notazioni per indicare vettori e scalari.

alle equazioni delle disequazioni variazionali e nel richiedere che $u$ appartenga ad un convesso di un opportuno spazio funzionale.

Adottando tale punto di vista, G. Prouse in un recente lavoro [**5**], ha associato alle equazioni di Navier-Stokes un sistema di disequazioni variazionali ed ha dimostrato che, per tale sistema, è ben posto, in grande, il problema misto di Cauchy-Dirichlet, qualunque sia il numero di dimensioni, sia per soluzioni forti che per soluzioni deboli. Inoltre ha mostrato che se risulta $|u|\leqslant c'<c$ per $0\leqslant t\leqslant\bar{t}$, allora, in tale intervallo di tempo, le disequazioni si riducono alle equazioni; per $t>\bar{t}$ la soluzione delle disequazioni non soddisfa più necessariamente le equazioni che, d'altronde, perdono di significato fisico essendo ivi il moto relativistico.

In questa nota si generalizzano i risultati ottenuti in [**5**]; partendo infatti dall'ipotesi che debba essere verificata la condizione (1.1), si studia il moto di un fluido di Bingham e si mostra poi che dalle disequazioni ad esso associate si ottengono, al limite, le disequazioni di Navier-Stokes.

**2** – Sia $\Omega\subset\boldsymbol{R}^m$ un aperto limitato di frontiera $\Gamma$ che, per semplicità, supporremo di classe $C^\infty$; in $\Omega$ scorra un fluido di Bingham il cui moto, supposta la densità unitaria, è retto dalle equazioni (²)

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma^D_{ij}=f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}\,,\\ &\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0\,, \end{aligned}\qquad (i,j=1,\dots,m)\,,$$

ove: $\sigma^D_{ij}=2\mu-\big(g/D_{II}(u)\big)\big(D_{ij}(u)\big)$ se $D_{II}(u)\neq 0$, $\frac{1}{2}\sigma^D_{ij}\sigma^D_{ij}\leqslant g^2$ se $D_{II}(u)=0$, e si è posto $D_{ij}(u)=\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$, $D_{II}(u)=\frac{1}{2}D_{ij}(u)D_{ij}(u)$. $u=\{u_1,\dots,u_m\}$, $p$, $\mu$, $g$, sono, nell'ordine, la velocità, la pressione, la viscosità e la soglia di plasticità del fluido.

Per maggiori dettagli si rimanda a [**1**], cap. 6.

Alle equazioni (2.1) associamo le seguenti condizioni al contorno

$$(2.2)\qquad u(x,t)=0\qquad x\in\Gamma\,,\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,,$$

(²) Si sono omessi i simboli di sommatoria convenendo di sommare rispetto agli indici ripetuti.

traducenti la teoria dello strato limite, e iniziali

$$(2.3) \qquad u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega .$$

Come è noto, Duvaut e Lions hanno dato in [1] al problema (2.1), (2.2), (2.3) una formulazione variazionale ed hanno dimostrato l'esistenza di una soluzione d e b o l e nel caso $m$-dimensionale; se poi $m \leqslant 2$, tale soluzione è unica e può essere regolarizzata.

Le disequazioni variazionali relative a un fluido di Bingham sono poi state studiate da vari autori (si vedano, ad esempio, [1], [4], $[3]_1$ e la bibliografia ivi citata) senza riuscire, tuttavia, a dare un teorema di unicità nel caso generale.

Basandoci sulle considerazioni fisiche esposte in **1**, noi associeremo al problema (2.1), (2.2), (2.3) la condizione (1.1); in tal modo saremo in grado di dimostrare che il nuovo problema ammette una e una sola soluzione, che verrà definita fra poco.

Introduciamo ora le notazioni che useremo in seguito:

$\mathcal{N} \; = \{v \mid v \in (\mathcal{D}(\Omega))^m, \ \operatorname{div} v = 0\}$,

$N^\sigma \; =$ chiusura di $\mathcal{N}$ in $(H^\sigma(\Omega))^m$: $(u, v)_{N^\sigma} = (u_i, v_i)_{H^\sigma}$ ,

$(N^\sigma)' =$ duale di $N^\sigma$: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualità fra $N^1$ e $(N^1)'$,

$K \; = \{v \mid v \in N_0; \ |v| \leqslant c$ q.o. in $\Omega\}$, $K$ è ovviamente un insieme chiuso convesso di $N^0$,

$\mathring{K} \; =$ interno di $K$,

$$a(u, v) = 2 \int_\Omega D_{ij}(u) D_{ij}(v) \, d\Omega ,$$

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j \, d\Omega ,$$

$$j(v) = 2 \int_\Omega D_{II}(v)^{1/2} \, d\Omega .$$

Osserviamo che, tenendo presente l'ultima equazione delle (2.1) e la (2.2), risulta

$$(2.4) \qquad b(u, v, w) = - b(u, w, v) , \qquad b(u, u, u) = 0 ,$$

$$(2.5) \qquad a(u, v) = - \langle \Delta u, v \rangle , \qquad a(u, u) = \|u\|^2_{N^1} \qquad u, v \in N^1 .$$

Premesso ciò, *diremo che* $u(t) = \{u(x, t), x \in \Omega\}$ *è soluzione del problema* (2.1), (2.2), (2.3), (1.1) *se*

(i) $u(t) \in L^2(0, T; N^1 \cap K) \cap L^\infty(0, T; N^0)$,

(ii) $u(t)$ *soddisfa q.o. in* $(0, T)$ *la disequazione* (3),

$$\int_0^t \{(v', v-u)_{N^0} + \mu a(u, v-u) + b(u, u, v) + gj(v) - gj(u) - \langle f, v-u\rangle\} \, ds \tag{2.6}$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\|v(t)-u(t)\|^2_{N^0} - \tfrac{1}{2}\|v(0)-u_0\|^2_{N^0} \qquad \forall v \in L^2(0, T; N^1 \cap K)\,,\ v'(t) \in L^2(0, T; N^0)\,.$$

Per quanto riguarda la giustificazione (formale) della formulazione variazionale adottata, rimandiamo ad [**1**]; si fa solo presente che, nel nostro caso, bisognerà in più supporre che $u \in \mathring{K}$.

In **3** e **4** dimostreremo i seguenti teoremi.

Teorema 1. *Se* $f(t) \in L^2(0, T; (N^1)')$ *e* $u_0 \in K$, *esiste almeno una funzione* $u(t)$ *soddisfacente le* (i), (ii).

Teorema 2. *La soluzione definita dal Teorema* 1 *è unica.*

Infine in **5** daremo un risultato di regolarità.

**3** – Dimostriamo ora il Teorema 1 facendo uso del metodo di penalizzazione. Sia $\{h_i\}$ una base di $N^s$, $s > m/2$, tale che

$$(h_i, v_i)_{N^s} = \lambda_i (h_i, v_i)_{N^0} \qquad \forall v \in N^s\,,\ (h_i, h_j)_{N^0} = \delta_{ij}\,,$$

e poniamo $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}(t) h_i$.

Approssimiamo poi $j(u)$ mediante il funzionale

$$j_n(u) = \frac{2}{1+1/n} \int_\Omega (D_{II}(u))^{(1+1/n)/2} \, d\Omega\,;$$

(3) Qui e nel seguito, per semplicità, verrà sottointesa la dipendenza da $t$ quando ciò non porta ad ambiguità.

$j_n(u)$ è differenziabile e risulta

$$\langle j_n'(u), v\rangle = \int_\Omega (D_{II}(u))^{(1/n-1)/2} D_{ij}(u) D_{ij}(v)\, d\Omega \,. \tag{3.1}$$

Detto $P_K$ l'operatore di proiezione su $K$, sia

$$\beta(v) = v - P_K v \tag{3.2}$$

un operatore di penalizzazione relativo a $K$ (cfr. [3]$_2$, cap. 3).

Consideriamo ora il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned}(u_n'(t) + n\beta(u_n(t)), h_i)_{N^0} + \mu a(u_n(t), h_i) + b(u_n(t), u_n(t), h_i)&\\ + g\langle j_n'(u_n(t)), h_i\rangle = \langle f(t), h_i\rangle&,\end{aligned} \tag{3.3}$$

cui si associano le condizioni iniziali

$$u_n(0) = u_{0n}\,, \qquad u_{0n} \in [h_1, \dots, h_n]\,, \qquad u_{0n} \to u_0 \text{ in } N^0\,. \tag{3.4}$$

Come è noto, il problema (3.3), (3.4) ammette una e una sola soluzione in $[0, \bar t]$, $\bar t \leqslant T$. Le stime a priori, che ora dedurremo, ci permetteranno, tra l'altro, di affermare che $\bar t = T$.

Moltiplichiamo le (3.3) per $\alpha_{in}(t)$, sommiamo e integriamo fra 0 e $t$; ricordando le (2.4), (2.5), (3.1) e sfruttando la monotonia di $\beta$ e $j_n'$, si ottengono, con semplici passaggi, le seguenti stime a priori:

$$\|u_n(t)\|^2_{N^0} \leqslant M_1\,, \qquad \int_0^T \|u_n(t)\|^2_{N^1}\, dt \leqslant M_2\,, \tag{3.5}$$

$$n\int_0^T (\beta(u_n), u_n)_{N^0}\, dt \leqslant M_3\,, \tag{3.6}$$

$$\|j_n'(u_n)\|_{L^2(0,T;\,(N^1)')} \leqslant M_4\,, \tag{3.7}$$

$$\int_0^T |b(u_n, u_n, v)|\, dt \leqslant M_5 \|v\|_{L^2(0,T;\,N^s)} \qquad \forall v \in L^2(0, T; N^s)\,. \tag{3.8}$$

Inoltre, ricordando la (3.2) ed osservando che $\beta(u_n) \neq 0$ se $|u_n| > c$, dalla (3.6) si deduce che

$$M_3 \geqslant n\int_0^T \int_\Omega |\beta(u_n)|\,|u_n|\, d\Omega\, dt > c\int_0^T \int_\Omega n|\beta(u_n)|\, d\Omega\, dt\,,$$

ossia che

$$\|n\beta(u_n)\|_{L^1(0,T;\,L^1)} \leqslant M_6\,. \tag{3.9}$$

Osserviamo ora che, per le (3.5), dalla successione $\{u_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione, detta ancora $\{u_n\}$, tale che, per $n\to\infty$, risulti

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ nella topologia debole di } L^2(0,T;\,N^1)\,,\\ &u_n \to u \text{ nella topologia debole* di } L^\infty(0,T;\,N^0)\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dalla (3.6), poi, sfruttando la monotonia e l'emicontinuità di $\beta$, si ottiene, usando un classico procedimento (cfr. [**3**]$_2$, cap. 3), che

$$u(t)\in K \qquad \text{q.o. in } (0,T)\,. \tag{3.11}$$

Diamo ora una stima su $u_n'(t)$. A tal fine, sia $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i(t)h_i$ un'arbitraria funzione di $H_0^1(0,T;\,N^s)$ e poniamo $\varphi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)h_i$. Moltiplicando le (3.3) per $\gamma_i(t)$, sommando e integrando, si ottiene, ricordando le (3.5), (3.7), (3.8), (3.9) (4)

$$\begin{aligned} \int_0^T |(u_n',\varphi)_{N^0}|\,dt &= \int_0^T |(u_n',\varphi_n)_{N^0}|\,dt \leqslant M_6\|\varphi_n\|_{L^\infty(0,T;\,L^\infty)} + \mu M_2\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;\,N^1)}\\ &+ M_5\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;\,N^s)} + gM_4\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;\,N^1)} + \|f\|_{L^2(0,T;\,(N^1)')}\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;\,N^1)}\\ &\leqslant M_7\|\varphi_n\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(0,T;\,N^s)} \leqslant M_7\|\varphi\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(0,T;\,N^s)}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che $\|u_n'(t)\|_{H^{-1/2-\varepsilon}(0,T;\,(N^s)')} \leqslant M_7$ e quindi che

$$\|u_n(t)\|_{H^{1/2-\varepsilon}(0,T;\,(N^s)')\,\cap\, L^2(0,T;\,N^1)} \leqslant M_8\,. \tag{3.12}$$

Poichè l'immersione di $H^{1/2-\varepsilon}(0,T;\,(N^s)')\cap L^2(0,T;\,N^1)$ in $L^2(0,T;\,L^2)$ è completamente continua, dalla (3.12) segue che

$$u_n\to u \qquad \text{q.o. in } \Omega\times(0,T)\,. \tag{3.13}$$

---

(4) Si osservi infatti che, $\forall 0<\varepsilon<1/2$, se $s>m/2$ allora $H_0^{1/2+\varepsilon}(0,T;\,N^s)\subset L^\infty(0,T;\,L^\infty)$.

Sia ora $v(t)$ una qualunque funzione tale che

$$(3.14)\qquad v(t)\in L^2(0,T;N^s\cap K)\,,\qquad v'(t)\in L^2(0,T;N^0)\,,\qquad v(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i(t)h_i\,.$$

Posto $v_p(t)=\sum_{i=1}^{p}\varrho_i(t)h_i$, per $p\geqslant\bar{p}$ abbastanza grande, si ha, evidentemente che $v_p\leqslant c$.

Sia poi $\delta_i=\varrho_i$ se $i\leqslant p$, $\delta_i=0$ se $i>p$; scelto $n\geqslant p$, moltiplichiamo le (3.3) per $\delta_i(t)-\alpha_{in}(t)$, sommiamo, integriamo fra 0 e $t$. Tenendo presente la monotonia di $\beta$ e la convessità di $w\to j(w)$, si ottiene

$$(3.15)\qquad \int_0^t\{(v_p',v_p-u_n)_{N^0}+\mu a(u_n,v_p)+b(u_n,u_n,v_p)+gj_n(v_p)-\langle f,v_p-u_n\rangle\}\,ds$$

$$\geqslant\int_0^t\{\mu a(u_n,u_n)+gj_n(u_n)\}\,ds+\tfrac{1}{2}\|v_p(t)-u_n(t)\|^2_{N^0}-\tfrac{1}{2}\|v_p(0)-u_{0n}\|^2_{N^0}\,.$$

Sia ora $\varphi(t)$ una qualunque funzione $\in C^0([0,T])$, $\varphi(t)\geqslant 0$, $\forall t\in[0,T]$; ricordando le (3.10), (3.13) e osservando che (cfr. [**1**], cap. 6)

$$\liminf\int_0^t\{\mu a(u_n,u_n)+gj_n(u_n)\}\,ds\geqslant\int_0^t\{\mu a(u,u)+gj(u)\}\,ds$$

dalla (3.15) segue, facendo tendere $n\to\infty$,

$$(3.16)\qquad \int_0^T\varphi(t)\,dt\int_0^t\{(v_p',v_p-u)_{N^0}+\mu a(u,v_p-u)+b(u,u,v_p)+gj(v_p)-gj(u)$$

$$-\langle f,v_p-u\rangle\}\,ds$$

$$\geqslant\int_0^T\varphi(t)\,dt[\tfrac{1}{2}\|v_p(t)-u(t)\|^2_{N^0}-\tfrac{1}{2}\|v_p(0)-u_0\|^2_{N^2}]\,.$$

Passando ora al limite per $p\to\infty$ nella (3.16), si trova che $u(t)$ soddisfa q.o. $\forall t\in(0,T)$ la (2.6) $\forall v(t)$ definita dalla (3.14) e quindi, essendo $L^2(0,T;N^s)$ denso in $L^2(0,T;N^1)$, è verificata la (ii).

Il Teorema 1 è così completamente dimostrato.

4 - Dimostriamo ora il Teorema 2. Siano $u_1$ e $u_2$ due eventuali soluzioni e poniamo $w=\frac{1}{2}(u_1+u_2)$. Sia poi $w_\varepsilon$ definita da

$$\varepsilon w_\varepsilon'+w_\varepsilon=w\,,\qquad w_\varepsilon(0)=u_0\,;$$

$\{w_\varepsilon\}$ è una successione regolarizzante associata a $w$; è perciò lecito, nella (3.3), scritta per $u_1$ e $u_2$, prendere $v = w_\varepsilon$ (cfr. [**3**]$_2$, cap. 2). Sommando le due disequazioni, tenendo presente che $\int_0^t (w_\varepsilon', w_\varepsilon - w)_{N^0}\, ds \leqslant 0$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene, ricordando la convessità di $v \to j(v)$,

$$(4.1) \qquad \int_0^t \mu \|u_2 - u_1\|_{N^1}^2\, ds + \tfrac{1}{2}\|u_2 - u_1\|_{N^0}^2$$
$$\leqslant \int_0^t \{b(u_2 - u_1, u_2 - u_1, u_2) + b(u_1, u_2 - u_1, u_2 - u_1)\}\, ds .$$

Poichè, per le (3.5), (3.11), risulta

$$\int_0^t \{|b(u_2 - u_1, u_2 - u_1, u_2)| + |b(u_1, u_2 - u_1, u_2 - u_1)|\}\, ds$$
$$\leqslant M_9 \int_0^t \|u_2 - u_1\|_{N^1} \|u_2 - u_1\|_{N^0}\, ds ,$$

la (4.1) implica che $u_1 = u_2$.

L'unicità della soluzione è così provata. Con procedimento analogo si dimostra la dipendenza continua di $u(t)$ dai dati.

**5** – In questo paragrafo dimostreremo che se i dati del problema considerato sono più regolari anche la soluzione lo è; precisamente vale il seguente teorema.

Teorema 3. *Se $f(t) \in L^2(0, T; N^0)$, $u_0 \in K \cap N^1$, allora la soluzione definita dal Teorema 1 verifica la condizione*

$$(5.1) \qquad \Delta u(t) \in L^2(0, T; N^0) .$$

Incominciamo a considerare il seguente problema: si cerca una $\tilde{u}(t)$ tale che

(i)$'$ $\tilde{u}(t) \in L^\infty(0, T; N^0) \cap L^2(0, T; N^1 \cap K)$, $\Delta\tilde{u}(t) \in L^2(0, T; N^0)$,

(ii)$'$ $\tilde{u}(t)$ soddisfa la disequazione

$$(5.2) \qquad \int_0^t \{(v', v - \tilde{u})_{N^0} + \mu a(\tilde{u}, v - \tilde{u}) + gj(v) - gj(\tilde{u}) - (\tilde{f}, v - \tilde{u})_{N^0}\}\, ds$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\|v(t) - \tilde{u}(t)\|_{N^0}^2 - \tfrac{1}{2}\|v(0) - u_0\|_{N^0}^2 \quad \forall v(t) \in L^2(0, T; N^1 \cap K),\ v'(t) \in L^2(0, T; N^0).$$

Se $\tilde{f}(t) \in L^2(0, T; N^0)$, il problema precedente ammette una e una sola soluzione. Infatti, siano $\{h_i\}$ e $\{\lambda_i\}$ rispettivamente le autofunzioni e gli autovalori di $\Delta$ soddisfacenti le relazioni

$$(h_i, \varphi)_{N^1} = \lambda_i (h_i, \varphi)_{N^0} \qquad \forall \varphi \in N^1 , \quad (h_i, h_j)_{N^0} = \delta_{ij} .$$

Per le ipotesi fatte su $\Omega$, si ha allora che $h_i \in N^s$ $(s > m/2)$ (5).

Ripetendo il procedimento usato in **3** e **4**, si dimostra allora che esiste una e una sola $\tilde{u}$ soddisfacente le (5.2) e la (i); rimane da provare che $\tilde{u}$ soddisfa la (5.1).

A tale scopo, posto $\tilde{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}(t)\, h_i$, consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie associato alla (5.2)

$$(5.3) \qquad (\tilde{u}_n' - \mu\, \Delta \tilde{u}_n + n\beta(\tilde{u}_n) - \tilde{f}, h_i)_{N^0} + g\langle j_n'(\tilde{u}_n), h_i \rangle = 0 .$$

Moltiplicando le (5.3) per $-\lambda_i \alpha_{in}(t)$, sommando e integrando si ottiene

$$(5.4) \qquad \tfrac{1}{2}\|\tilde{u}_n(t)\|^2_{N^1} + \int_0^t \{\mu \|\Delta\tilde{u}_n\|^2_{N^0} - (n\beta(\tilde{u}_n) - \tilde{f}, \Delta\tilde{u}_n)_{N^0} - \langle j_n'(\tilde{u}_n), \Delta\tilde{u}_n\rangle\}\, ds$$
$$= \tfrac{1}{2}\|\tilde{u}_n(0)\|^2_{N^1} .$$

Osserviamo che, per la monotonia di $j_n'$ e $\beta$, si ha (6) $-\langle j_n'(\tilde{u}_n), \Delta\tilde{u}_n\rangle \geqslant 0$, $-(\beta(\tilde{u}_n), \Delta\tilde{u}_n)_{N^0} \geqslant 0$. Tenendo conto di tali disuguaglianze nella (5.4), ne segue che $\|\Delta\tilde{u}_n(t)\|_{L^2(0,T;\, N^0)} \leqslant M_9$ e quindi che $\Delta\tilde{u}(t) \in L^2(0, T; N^0)$. È così provata la esistenza della soluzione del problema (i)', (ii)'.

Dimostriamo ora il Teorema 3. Notiamo che, se $u$ è soluzione del problema (i), (ii), allora

$$(5.5) \qquad b(u, u, v) = (Bu, v)_{N^0} \qquad \forall v \in N^0 ;$$

è perciò lecito porre nella (5.2) $(\tilde{f}, v - \tilde{u})_{N^0} = (f, v - \tilde{u})_{N^0} + b(u, u, v - \tilde{u})$. Ripetendo allora il procedimento usato per dimostrare il Teorema 2, si ottiene che $u = \tilde{u}$; di conseguenza, la (5.1) è soddisfatta.

**6** – Mostriamo ora che i fluidi Newtoniani possono essere considerati come limiti dei fluidi di Bingham.

---

(5) Si noti che l'ipotesi fatta su $\Gamma$ può essere indebolita; basta infatti richiedere una regolarità sufficiente a garantire che $h_i \in N^s$.

(6) Risulta infatti (e analogamente per $\beta$)

$$\langle j_n'(v(x+h, t)) - j_n'(v(x, t)), v(x+h, t) - v(x, t)\rangle \geqslant 0 .$$

Sia $u_g(t)$ la soluzione definita dal Teorema 1 e $u(t) \in L^2(0, T; N^1 \cap K) \cap L^\infty(0, T; N_0)$ la soluzione della disequazione di Navier-Stokes

$$\tag{6.1} \int_0^t \{(v', v-u)_{N^0} + \mu a(u, v-u) + b(u, u, v) - \langle f, v-u\rangle\}\, ds \geq \tfrac{1}{2}\|v(t)-u(t)\|^2_{N^0} - \tfrac{1}{2}\|v(0)-u_0\|^2_{N^0}$$

$\forall v(t) \in L^2(0, T; N^1 \cap K)$, $v'(t) \in L^2(0, T; N^0)$, ove $K$ è il convesso definito in **2**.

Prouse in [**5**] ha dimostrato l'esistenza e l'unicità di una tale $u(t)$. In questo paragrafo proveremo il seguente

Teorema 4. *Se* $g \to 0$, *allora* $u_g(t) \to u(t)$ *in* $L^2(0, T; N^1 \cap K) \cap L^\infty(0, T; N^0)$ *debole.*

Infatti le stime a priori ottenute in **3** ci permettono di concludere che

$$\|u_g(t)\|_{L^2(0,T;\, N^1 \cap K)\, \cap\, L^\infty(0,T;\, N^0)} \leq \text{cost}\,,$$

$$\|u_g'(t)\|_{H^{-1/2-\varepsilon}(0,T;\, (N^s)')} \leq \text{cost}\,,$$

$\forall g > 0$, $g$ limitata.

Tenendo allora presente che $\int_0^T g j(u_g)\, dt \to 0$, con ragionamenti analoghi a quelli fatti in **3**, dalla (2.6) (scritta per $u = u_g$) si ottiene, facendo tendere $g \to 0$, la (6.1).

Osservazione. Come si è detto all'inizio, se esiste un $\bar{t} > 0$ tale che risulti, q.o. in $\Omega \times (0, \bar{t})$, $|u| \leq c' < c$, allora $u(t)$, soddisfacente le (6.1), è anche soluzione debole delle equazioni di Navier-Stokes. Tuttavia nelle ipotesi fatte in [**5**], il problema di provare l'esistenza di un tale $\bar{t}$ è ancora aperto e sembra presentare notevoli difficoltà. Solo imponendo ai dati condizioni più restrittive si può ottenere qualche risultato. Infatti, se $m = 3$ e

$$\tag{6.2} u_0 \in N^1 \cap (H^2(\Omega))^3\,,$$

allora il problema (2.2), (2.3) associato alle equazioni di Navier-Stokes ammette una soluzione classica (cfr. [**2**]); in particolare

$$\tag{6.3} u(t) \in C(\bar{\Omega} \times [0, T))\,.$$

Ovviamente se $u_0 \in \overset{\circ}{K}$ e verifica la (6.2), allora, per la (6.3) e tenendo presente che, se $u(t)$ soddisfa le equazioni di Navier-Stokes, allora soddisfa anche le corrispondenti disequazioni, è garantita l'esistenza di $\bar{t} > 0$.

## Bibliografia

[1] G. Duvaut et J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris 1972.

[2] J. G. Heywood, *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Preprint, giugno 1978.

[3] J. L. Lions: $[\cdot]_1$ *On some problems connected with Navier-Stokes equations*, Proceedings of the Symposium on Nonlinear Evolutions equations, University of Wisconsin-Madison 1977, Academic Press, New York 1978; $[\cdot]_2$ *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969.

[4] J. Naumann and M. Wulst, *On evolution inequalities of Bingham type in three dimensions* J. Math, Anal. Appl. **70** (1979), 309-325.

[5] G. Prouse, *On an inequality related to the motion, in any dimensions of viscous, incompressible fluids*, Note I, II, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **67** (1979), 191-196.

## Summary

*We consider an inequality connected with the motion of a Bingham fluid and we prove an existence and uniqueness theorem in the m-dimensional case for the solution of the classical Cauchy-Dirichlet problem. We show, then, that such results generalise those obtained by G. Prouse in the study of the motion of a Newtonian fluid.*

* * *