Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 149-160

SERAFINO PATRIZIO (*)

# Derivata numerica secondo i divisori ed alcune applicazioni (**)

Alla memoria del prof. FRANCO PELLEGRINO, amico e collega

Il presente lavoro ha lo scopo di ottenere in modo organico molte formule, di cui alcune note, legate al concetto di derivata numerica secondo i divisori. Esso vuole essere un ulteriore [**8**] contributo alla Teoria delle Funzioni Aritmetiche iniziata da Cipolla $([\mathbf{2}]_{1,2})$ sviluppata da F. Pellegrino (1) $([\mathbf{9}]_{1,\dots,7})$ e basata sul calcolo numerico-integrale di M. Cipolla.

**1** – È opportuno dire che con $I$ si indica l'anello il cui sostegno è l'insieme delle funzioni aritmetiche, funzioni cioè definite in $N_1$ ed a valori in $C$. Ivi sono definite l'addizione

$$S\colon\ (f+g)(n)=f(n)+g(n) \qquad \forall f,g\in I \ \text{ e } \ \forall n\in N_1$$

e la moltiplicazione integrale

$$P^{\times}\colon\ (f\times g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

L'elemento unitario di $I$ è la funzione $\alpha$ che è uguale ad uno per $n=1$

(*) Indirizzo: Ist. Mat. Università, Via Roma 33, 67100 L'Aquila, Italy.
(**) Ricevuto: 31-VII-1980.
(1) Si presuppongono noti i concetti, le nozioni e le notazioni introdotte ed usate da F. Pellegrino i cui lavori, unitamente a quelli di altri Autori, sono riportati nella bibliografia. Per le notazioni si veda anche [**8**].

e a zero per $n \in N_2$. Il prodotto integrale di $f \in I$ per la funzione $u$, che è uguale ad uno in ogni $n \in N_1$, dicesi *integrale numerico* di $f$ e si denota con

$$\int f(n) = (f \times u)(n) = \sum_{d|n} f(d) .$$

Dicesi *ordine* di una funzione aritmetica $f$, e si indica con $\chi(f)$, il più piccolo naturale in cui $f$ è diversa da 0.

L'ordine del prodotto integrale di due funzioni è uguale al prodotto ordinario degli ordini (teorema dell'ordine, [**9**]$_2$).

Con $A_g$ viene indicato [**9**]$_6$ l'operatore lineare di $I$ definito ponendo $A_g f = g \times f$, $\forall f \in I$. Per lo studio di $A_g$, per $g = u$, vedasi [**9**]$_6$.

**2** – In questo lavoro ci occupiamo dell'operatore $\partial = A\mu$, essendo $\mu = u^{-1}$ la funzione di Möbius. Si osservi che l'operatore $A_\mu$, che indicheremo con $\partial$, è un elemento del gruppo ciclico $A_u \times^n$, $n \in \pm N_0$, degli operatori generati da $A_u$. L'operatore $\partial$ si dice *derivata numerica secondo i divisori* e, per ogni $f \in I$, la funzione aritmetica $\partial f$ si dice *derivata numerica di f secondo i divisori* o brevemente *derivata numerica di f* ([**2**]$_2$, p. 12).

Ciò posto osserviamo che per il teorema dell'ordine [**9**]$_2$, si ha subito che l'ordine della derivata numerica di $f$ coincide con quello di $f$. È anche utile osservare che da $\partial f = \partial g$ segue $f = g$ e viceversa. Inoltre essendo ([**9**]$_7$, p. 463) $K^{\times^{-1}} = \mu/K$, $K \in C$, si ha $A_K{}^{\times^{-1}} = (1/K)\partial$, e quindi $\forall K \in I$

$$A_K{}^{\times^{-1}} f = K^{\times^{-1}} \times f = (\frac{1}{K}\partial)(f) = \frac{1}{K}(\mu \times f) = \mu \times \frac{f}{K} = \partial(\frac{f}{K}) .$$

È poi evidente che, per essere la moltiplicazione integrale associativa, si ha $\partial(f \times g) = \partial f \times g = f \times \partial g$, $f \times g = \partial f \times \int g = \int f \times \partial g$, da cui per $g = u$, si ha

$$(\int f)^{\times^{-1}} = \partial f^{\times^{-1}} \qquad (\chi(f) = 1) , \tag{2.1}$$

e per $g = \mu$

$$(\partial f)^{\times^{-1}} = \int f^{\times^{-1}} \qquad (\chi(f) = 1) . \tag{2.2}$$

Dalle relazioni (2.1) e (2.2) si ha inoltre

$$f^{\times^{-1}} = \int (\int f)^{\times^{-1}} = \partial(\partial f)^{\times^{-1}} \qquad (\chi(f) = 1) . \tag{2.3}$$

È poi evidente che $A_u \cdot A_\mu = A_\mu \cdot A_u = A_\alpha = \mathbf{1}$, e quindi $\forall f \in I$ $\int \partial f = \partial \int f = f$. In altri termini la $g = \int f$ equivale alla relazione $f = \partial g$.

*Questo risultato costituisce il «principio di inversione» di Möbius-Dedekind-Liouville, che è caso particolare del molto più generale «principio di inversione» del Cipolla* ([**2**]$_2$, p. 8).

In generale, $\forall f \in I$ risulta

$$(2.4) \qquad (\partial f)(n) = (\partial f)\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \sum_{d|n} \mu(d)\, f\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

$$= f(n) - \sum_1^r{}_i\, f\Big(\frac{n}{p_i}\Big) + \sum_{i<j} f\Big(\frac{n}{p_i p_j}\Big) - \sum_{i<j<h} f\Big(\frac{n}{p_i p_j p_h}\Big) + \dots$$

$$= \sum_0^r{}_i \sum_{\substack{q^{(i)} \in \mathscr{P}^{(i)} \\ q^{(i)}|n}} (-1)^i f\Big(\frac{n}{q^{(i)}}\Big)\,.$$

In particolare

$$(2.5) \qquad (\partial f)(p^t) = f(p^t) - f(p^{t-1}) \qquad (t \in N_1)\,.$$

**3** – A notevoli relazioni conduce l'applicazione dell'operatore $\partial$ alle classi $\mathscr{M}$ e $\mathscr{C}$ degli elementi moltiplicativi e completamente moltiplicativi (v. [**9**]$_7$). Infatti essendo $\mu \in \mathscr{M}$, $\forall f \in \mathscr{M}$ si ha $\partial f \in \mathscr{M}$ e quindi, dalla (2.5) segue la formula

$$(\partial f)(n) = (\partial f)\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \prod_1^r{}_i\, \big(f(p_i^{t_i}) - f(p_i^{t_i-1})\big) \qquad (f \in \mathscr{M})\,,$$

che, nel caso particolare di $f \in \mathscr{C}$, diventa

$$(3.1) \qquad (\partial f)\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \prod_1^r{}_i\, f(p_i^{t_i-1})\big(f(p_i) - 1\big) \qquad (f \in \mathscr{C})\,.$$

La (3.1) si può anche scrivere

$$(3.2) \qquad (\partial f)\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \begin{cases} \prod_1^r{}_i\, f^{t_i-1}(p_i)\big(f(p_i) - 1\big) & \text{se } f(n) \neq 0 \quad (f \in \mathscr{C}) \\ 0 & \text{se } f(n) = 0 \quad (f \in \mathscr{C}) \end{cases}$$

e anzi, quando sia $f(n) \neq 0$, alla (3.2) può darsi la forma

$$(3.3) \qquad (\partial f)(n) = f(n) \prod_{p|n} \Big(1 - \frac{1}{f(p)}\Big) \qquad (f \in \mathscr{C};\ f(n) \neq 0)\,.$$

È da osservare adesso che la (2.3), nell'ipotesi $\int f \in \mathscr{C}_{(0)}$ (essendo $\mathscr{C}_{(0)} = \mathscr{C} - (0)$), dà ([**9**]$_7$, p. 500)

$$f^{\times^{-1}} = \int \mu \int f \qquad \left(\int f \in \mathscr{C}_{(0)}\right), \tag{3.4}$$

mentre nell'ipotesi $\partial f \in \mathscr{C}_{(0)}$, si ha

$$f^{\times^{-1}} = \mu \times (\mu \times f)^{\times^{-1}} = \mu \times \mu(\mu \times f) = \mu \times \mu\, \partial f = \partial \mu\, \partial f\,,$$

e cioè

$$f^{\times^{-1}} = \partial(\mu\, \partial f) = \partial \mu\, \partial f \qquad (\partial f \in \mathscr{C}_{(0)})\,.$$

*Queste formule danno una espressione dell'inverso integrale degli elementi* $f \in \mathscr{M}$ *tali che sia rispettivamente* $\int f \in \mathscr{C}_{(0)}$ e $\partial f \in \mathscr{C}_{(0)}$. Ad esempio

$$\sigma_q^{\times^{-1}} = \partial \mu N^q\,. \tag{3.5}$$

Sempre nell'ipotesi $\partial f \in \mathscr{C}_{(0)}$, dalla (2.3) segue facilmente la formula, in forma un po' diversa, già nota al Cipolla ([**2**]$_2$, p. 10),

$$f^{\times^{-1}}(n) = f^{\times^{-1}}\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_i > 2 \\ \lambda \prod_1^r{}_i\, \big(f(p_i) - t_i + 1\big) & \text{se } t_i \leq 2 \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, r;\ \partial f \in \mathscr{C}_{(0)})\,.$$

In particolare

$$\nu^{\times^{-1}}(n) = \nu^{\times^{-1}}\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \mu^{\times^2}(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_i > 2 \\ \lambda 2^{K(n/d^2_n)} & \text{se } t_i \leq 2 \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, r)\,, \tag{3.6}$$

dove $d^2_n$ è il massimo quadrato che divide $n$ e la (3.5), per $q = 1$, può essere precisata nella

$$\sigma^{\times^{-1}}(n) = \sigma^{\times^{-1}}\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_i > 2 \\ \lambda \prod_1^r{}_i\, (p_i + 2 - t_i) & \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, r)\,.$$

Dalle relazioni

$$\left(\int \mu f\right)(n) = \prod_{p \mid n} \big(1 - f(p)\big) \qquad (f \in \mathscr{C}_{(0)})\,, \tag{3.7}$$

$$f^{\times^{-1}} = \mu f \qquad (f \in \mathscr{C}_{(0)})\,, \tag{3.8}$$

(p. 497 di [**9**]$_6$) e dalla (2.2) segue facilmente

$$(\partial f)^{\times -1}(n) = \prod_{p|n}(1 - f(p)) \qquad (f \in \mathscr{C}_{(0)};\ n \in N_2)\,, \tag{3.9}$$

ovvero $(\int \mu f)^{\times -1} = \partial f$ e $(\int \mu^2 f)^{\times -1} = f \cdot \partial\lambda \times \partial f$ $(f \in \mathscr{C}_{(0)})$.

4 – Riteniamo ora opportuno di esporre varie relazioni che, oltre ad avere interesse generale, sono utili per ottenere la somma di numerose serie di Dirichlet, come del resto può vedersi scorrendo i n. 3, 4 e segg. di [**9**]$_7$.

Tenuto presente [**9**]$_7$, p. 433, dalla definizione di $Q \in I$ e, osservando che è $Q \in \mathscr{M}$ ed $f(Q) \in \mathscr{M}$, si ha

$$\big(f(Q)\big)(n) = \big(f(Q)\big)\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \prod_1^r{}_i\, f(p_i^{t_i-1}) \qquad (f \in \mathscr{M})\,.$$

Alla (3.1), tenuta presente la (3.9) può darsi allora la forma

$$\partial f = (-1)^K f(Q)(\partial f)^{\times -1}\,. \tag{4.1}$$

Tenendo presente la (35, 48) di [**9**]$_7$, dalla (4.1) si ha

$$(\partial f)^{\times -1} = (-1)^K \frac{\partial f}{f(Q)} = \frac{\partial f}{f} \int \mu \int f\,. \tag{4.2}$$

Questa formula ci dà un'altra espressione della (3.9) e della (3.4). Tenendo presente poi la (35,48) di [**9**]$_6$, la (2.2) e la (4.2) si ha

$$\Big(\partial \frac{1}{f}\Big)^{\times -1} = \frac{(\partial f)^{\times -1}}{\int \mu \int f} = \frac{\partial f}{f}\,. \tag{4.3}$$

Del resto, dalle (3.3), (3.8) e (4.3) si ha

$$\partial f = f \int \frac{\mu}{f} = f\Big(\partial \frac{1}{f}\Big)^{\times -1}\,, \tag{4.4}$$

$$\partial \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \int \mu f = \frac{1}{f} (\partial f)^{\times -1}\,, \tag{4.5}$$

e quindi $\partial f \partial(1/f) = (\partial f)^{\times -1}\big(\partial(1/f)\big)^{\times -1}$.

Dalle formule date si ottiene facilmente

$$\partial \frac{1}{q^\tau} = \frac{(1-q)^K}{q^\tau}, \qquad (\partial \frac{1}{q^\tau})^{\times -1} = (\frac{q-1}{q})^K .$$

Si noti che la (4.5) poteva ottenersi anche dalla (35,48) di [**9**]$_7$ formula che, nel caso $f \in \mathscr{C}$, per le (3.7), (3.9), (4.4) e (4.5) può scriversi

$$f(\frac{N}{Q}) = (-1)^K \frac{(\partial f)^{\times -1}}{(\partial(1/f))^{\times -1}} = (-1)^K \frac{\partial(1/f)}{\partial f},$$

e dall'essere $f \in \mathscr{C}$, che comporta $f(N) = f(Q) \cdot f(N/Q)$, si ha anche

$$f(Q) = (-1)^K f \frac{(\partial(1/f))^{\times -1}}{(\partial f)^{\times -1}} = (-1)^K f \frac{\partial f}{\partial(1/f)} \qquad (f \in \mathscr{C}) .$$

Volendo esprimere $\partial(1/f)$ in funzione di $\partial f$, basta cambiare $f$ in $1/f$ nella (3.1) e confrontare l'espressione ottenuta con la (3.3). Si ottiene

$$\partial \frac{1}{f} = (-1)^K \frac{f(N/Q)}{f^2} \partial f = (-1)^K \frac{\partial f}{f \cdot f(Q)} \qquad (f \in \mathscr{C}_{(0)};\ f(n) \neq 0).$$

Infine dal confronto di (4.4) e (4.5), tenendo presente che se $f \in \mathscr{C}_{(0)}$ è a valori non nulli e $g$ è di ordine 1 vale la relazione $(f \cdot g)^{\times -1} = f \cdot g^{\times -1}$ ([**9**]$_7$, p. 450), si ha

$$(\textstyle\int \mu f)^{\times -1} = \partial f = f \int \frac{\mu}{f} \qquad (f \in \mathscr{C}_{(0)};\ f(n) \neq 0) .$$

Essendo, per ogni elemento di $I$ normalizzato ([**9**]$_2$, p. 497), e quindi in particolare per ogni $f \in \mathscr{M}$, $(\partial f)(p) = f(p) - 1$, si ha $\int \mu/f \cdot \int \mu^2/\partial f = u$.

Supposto ora $f \in \mathscr{C}$, tenendo presenti la (3.8) e la (4.4) si ha

$$\int \frac{\mu}{f} \int \frac{\mu^2}{\partial f} = \int (\frac{1}{f})^{\times -1} \int \frac{\mu^2}{\partial f} = (\partial \frac{1}{f})^{\times -1} \int \frac{\mu^2}{\partial f} = \frac{\partial f}{f} \int \frac{\mu^2}{\partial f} = u .$$

Si perviene cioè alla relazione $\int \mu^2/\partial f = f/\partial f$, il cui caso particolare, per $f = N$ è ben noto.

**5** – Usando le formule stabilite si ottengono interessanti relazioni per alcune classi di funzioni. Ricordiamo che dalla dimostrazione che $\varphi$ è moltiplicativa segue $\varphi = \partial N$.

La (3.3) ci dà allora la nota espressione, $\forall n \in N_2$,

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) .$$

Posto poi, per definizione, $\varphi_q = \partial N^q$, $\sigma_q(n) = \sum_{d|n} d^q$, $(q \in \pm N_0)$, risulta $\varphi_q, \sigma_q \in \mathscr{M}$; $\int^2 \varphi_q = \int N^q = \sigma_q$ $(q \in \pm N_0)$, ovvero $\varphi_q = \partial N^q = \partial^2 \sigma_q$ $(q \in \pm N_0)$, nonchè $\varphi_q(n) = n^q \prod_{p|n} (1 - 1/p^q)$, $(n \in N_2;\ q \in \pm N_0)$ (2).

Dalla (4.5) si ha poi $\varphi_q = N^q \int \mu / N^q$, nonchè $\varphi_q \in \mathscr{M}^*$, $\varphi_q(1) = 1$ e $\overline{\varphi_q(s)} = (\zeta(s-q))/\zeta(s)$, $(q \in \pm N_0)$ (3).

Inoltre

$$\varphi_q \times \nu = \sigma_q \qquad (q \in \pm N_0) . \tag{5.1}$$

Dalla equazione caratteristica $([9]_7$, p. 447$)$ degli elementi di $\mathscr{C}$ e dalla distributività del prodotto ordinario di una funzione $f \in \mathscr{C}$, rispetto al prodotto integrale di due qualsiasi elementi di $I$, si ha

$$\varphi_q \times \sigma_q = N^q \nu \qquad (q \in \pm N_0) , \tag{5.2}$$

da cui segue $\overline{(\nu N^q)(s)} = \zeta^2(s-q)$.

Dalle (5.1) e (5.2) segue poi $\sigma_q \times \nu^{\times^{-1}} = N^q \nu \times \sigma_q^{\times^{-1}}$ $(q \in \pm N_0)$.

Tenendo presente poi la (3.5) di [**8**] si ottiene facilmente

$$\prod_{d|n} \varphi_q(d) = n^{q(\nu(n)/2)} \prod_{1}^{r}{}_i \left(1 - \frac{1}{p_i^q}\right) t_i\ \nu(n/p_i^{t_i}) \qquad (q \in \pm N_0) ,$$

mentre dalla (3.4) segue

$$\varphi_q^{\times^{-1}} = \int (N^q)^{\times^{-1}} = \int \mu N^q \qquad (q \in \pm N_0) ,$$

(2) Queste funzioni si incontrano nella teoria dei gruppi abeliani. Per $q = 2$ la funzione $\varphi_2$ interviene anche nella teoria delle funzioni modulari ellittiche [**6**] e nella teoria delle sostituzioni ([**1**], p. 351).

(3) Cfr. $[\mathbf{9}]_1$ dove è indicato con $I^*$ l'insieme delle funzioni $f \in I$ tali che $\bar{f} = \sum_{1}^{\infty}{}_n f(n)/n^s$ sia convergente.

e ricordando la (35,20) di [9]$_7$ si ha

$$(\varphi_q^{\times^{-1}})(n) = \prod_{p|n} (1 - p^q) \qquad (q \in \pm N_0)\,.$$

Altre importanti relazioni, in cui compare la $\varphi$, sorgono quando si considerano le *classi di funzioni* $C_r$ e $D_r$ che danno, $\forall n$, $r \in N_1$, rispettivamente la somma delle potenze $r$-esime di tutte le radici $n$-esime di 1 e la somma delle potenze $r$-esime di tutte le radici $n$-esime primitive di 1.

Posto allora $\eta = \exp[2\pi i/n]$ si ha [5]

$$C_r(n) = \sum_{1}^{n-1}{}_q \eta^{qr} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \nmid r \\ 1 & \text{se } n|r\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

ed anche [7] $C_r = \int D_r$, nonchè il risultato di Hölder [5]: $C_r$, $D_r \in \mathscr{M}$.

Si trova inoltre la formula

$$\partial C_r(n) = \sum_{d|(n,r)} d\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

formula alla quale può darsi la forma di Ramanujan-Hölder

$$\partial C_r(n) = D_r(n) = \frac{\mu(n/(n,r))\,\varphi(n)}{\varphi(n/(n,r))}\,, \tag{5.4}$$

ritrovata anche dal Gagliardo [3].

Possiamo scrivere allora, per la (2.5),

$$D_r\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \prod_1^t{}_i \left(C_r(p_i^{t_i}) - C_r(p_i^{t_i-1})\right),$$

ma dalla (5.3) si ha $C_r(p_i^{t_i}) = p_i^{t_i}$ se $p_i^{t_i}/r$, $C_r(p_i^{t_i}) = 0$ se $p_i^{t_i} \nmid r$, e quindi risulta

$$D_r(n) = D_r\Big(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \prod_{p_j^{t_j-1}|r} p_j^{t_j-1}(\varepsilon_j p_j - 1)\,,$$

dove $\varepsilon_j = 0$ se $p_j^{t_j} \nmid r$, $\varepsilon_j = 1$ se $p_j^{t_j}\,|r$ o anche

$$D_r\Big(\prod_1^t{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \begin{cases} 0 \qquad \text{se } p_i^{t_i-1} \nmid r & (i = 1, \ldots, t)\,, \\ D_r\Big(\prod\limits_{p_j^{w_j-1}|r} p_j^{w_j}\Big) = \prod\limits_{p_j^{w_j-1}|r} p_j^{w_j-1} & (\varepsilon_j p_j - 1)\,. \end{cases}$$

Da notare poi che dalla (5.4) si ha ([**3**], p. 272) $D_r(n) = \varphi(n)$ se $(n, r) = n$, $D_r(n) = \mu(n)$ se $(n, r) = 1$, e seguono anche le formule, anch'esse ben note, $D_1 = \mu$, $C_1 = \alpha$, $\sum_K \exp[2K\pi i/n] = \mu(n) = \sum_K \cos 2K\pi/n$, mentre, sempre dalla (5.4), segue $D_r(n) = D_s(n)$ se $r \equiv s$ (mod. $n$).

Infine per le funzioni $\beta^{(r)}$ ([**9**]$_7$, p. 470) e $\gamma^{(r)}$ ([**9**]$_7$, p. 478), indicatrici rispettivamente delle potenze $r$-esime e dei numeri non divisibili per una potenza $r$-esima, si ha

$$\partial\beta^{(r)} = (\gamma^{(r)})^{\times^{-1}}, \qquad \partial\gamma^{(r)} = (\beta^{(r)})^{\times^{-1}},$$

ed in particolare

$$\partial\beta^{(2)} = \lambda \quad \text{e} \quad \partial^2\beta^{(2)} = \partial\lambda = (2^K)^{\times^{-1}}, \qquad \partial\gamma^{(2)} = (\beta^{(2)})^{\times^{-1}} = \partial\,|\mu|, \qquad \gamma^{(2)} = |\mu|\,.$$

**6** – In questo numero vogliamo parlare brevemente delle derivate delle funzioni additive. Indichiamo con $\mathscr{A}$ la classe delle funzioni additive e con $\mathscr{L}$ quella delle funzioni logaritmiche [**8**].

È opportuno osservare, e ci sarà utile in seguito, che $\forall a \in \mathscr{A}$ è

$$(6.1) \qquad (\textstyle\int\mu a)(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p^t \\ -a(p) & \text{se } n = p^t \end{cases} \qquad (p \in \mathscr{P};\ t \in N_1;\ a \in \mathscr{A})\,.$$

Infatti, mentre si ha subito

$$(\textstyle\int\mu a)(1) = 0 \qquad (a \in \mathscr{A})\,,$$

per ogni naturale di ordine 1, $n = p^t$, è

$$(\textstyle\int\mu a)(p^t) = \mu(1)\,a(1) + \mu(p)\,a(p) = -\,a(p)\,, \qquad (a \in \mathscr{A})\,.$$

Per ogni altro naturale $n = \prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}$, con $r > 1$, si ha invece

$$(\textstyle\int\mu a)(\prod_1^r{}_i\, p_i^{t_i}) = \sum\limits_{\substack{0\\ i=1,\dots,r}}^{1}{}_{h_i} \Big(\mu(\prod_1^r{}_i\, p_i^{h_i}) \sum_1^r{}_j\, a(p_j^{h_j})\Big) = \sum\limits_{\substack{0\\ i=1,\dots,r}}^{1}{}_{h_i} \Big((-1)^{\sum_1^r{}_i h_i} \sum_1^r{}_j\, a(p_j{}^{h_j})\Big)$$

$$= \sum_1^r{}_i \Big(a(p_i) \sum_0^{r-1}{}_j\, (-1)^{j+1} \binom{r-1}{j}\Big) = 0$$

sussiste dunque la (6.1).

Dalla (3.4) di [**8**], per $f = \mu$, ed essendo $\mu \in \mathscr{M}$ si ha facilmente

$$(6.2) \qquad (a \times \mu)(n) = (\partial a)(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p^t \quad (t \in N_0;\ a \in \mathscr{A};\ p \in \mathscr{P}) \\ a(p^t) - a(p^{t-1}) & \text{se } n = p^t \quad (t \in N_1;\ a \in \mathscr{A}) \,, \end{cases}$$

relazione già nota al Cipolla.

Dalla $(\partial a)(n) = 0$ se $n \neq p^t$ e $t \in N_0$, segue che gli unici naturali in cui $\partial a$ può essere diversa da zero sono quelli il cui ordine non è maggiore di 1, e cioè quelli di ordine 1 ed il numero 1. Ma per $n = 1$, essendo $\chi(\partial a) = \chi(\mu)\,\chi(a) > 1$, è $(\partial a)(1) = 0$. Inoltre avendosi dalla (6.2) $(\partial a)(p^t) = a(p^t) - a(p^{t-1})$, quando $a = k$, risulta

$$(\partial K)(p^t) = K(p^t) - K(p^{t-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in N_2 \\ 1 & \text{se } t = 1 \,. \end{cases}$$

Ne segue

$$(\partial K)(n) = 1 \quad \forall n \in \mathscr{P}, \qquad\qquad (\partial K)(n) = 0 \quad \forall n \notin \mathscr{P} \,.$$

In conclusione $\partial K$ *è una funzione indicatrice dei numeri primi*. Si può porre perciò $\big([\mathbf{9}]_4$, p. $260\big)$ $(\partial K)(n) = P(n)$.

Se è $l \in \mathscr{L}$ si ha poi

$$(\partial l)(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p^t \quad (p \in \mathscr{P};\ t \in N_0;\ l \in \mathscr{L}) \,, \\ l(p) & \text{se } n = p^t \quad (p \in \mathscr{P};\ t \in N_1;\ l \in \mathscr{L}) \,. \end{cases}$$

A causa della (6.1) può dirsi allora che, fissato comunque $l \in \mathscr{L}$, $\forall a \in \mathscr{A}$ tale che per ogni $p \in \mathscr{P}$ risulti $a(p) = l(p)$ si ha $\int \mu a = -\,\partial l$, $\big(a \in \mathscr{A};\ l \in \mathscr{L};\ a(p) = l(p)\big)$. In particolare si ha

$$(6.3) \qquad \int \mu l = -\,\partial l \,,$$

da cui

$$(6.4) \qquad l = -\overset{2}{\int} \mu a = -\overset{2}{\int} \mu l \qquad \big(l \in \mathscr{L};\ a \in \mathscr{A};\ a(p) = l(p)\big) \,.$$

*Il secondo membro della* (6.4) *genera, al variare di $a$ in $\mathscr{A}$-$\mathscr{L}$, tutti gli elementi di $\mathscr{L}$.*

Del resto, dall'equazione $\int l = \frac{1}{2}\nu l$ $\big($v. [**8**]$\big)$, messa nella forma

$$(6.5) \qquad l = \tfrac{1}{2}\,\partial(\nu l)$$

si trae l'identità

$$2l(n) = (\nu l \times \mu)(n) \qquad (n \in N_1;\ l \in \mathscr{L})\ ;$$

sviluppandone il secondo membro secondo la (2.4) si perviene alla (6.4) tenendo conto che è $l(n/d) = l(n) - l(d)$. È dunque

$$l = \tfrac{1}{2}(\nu l \times \mu) = -\,\mu l \times \nu \qquad (l \in \mathscr{L})\,.$$

Notiamo che la (6.5) per $l = \tau$ fornisce una espressione della $\tau$ in funzione della $\nu$, se si tiene conto che è $\partial\nu = 1$. Si ha pertanto

$$\text{(6.6)} \qquad \tau(n) = \tau\,\Big(\prod_{1}^{r}{}_i\, p_i^{t_i}\Big) = \sum_{p|n} \nu\Big(\frac{n}{p}\Big) - 2\sum_{i<j} \nu\Big(\frac{n}{p_i p_j}\Big) + 3\sum_{i<j<h} \nu\Big(\frac{n}{p_i p_j p_h}\Big) - \ldots\,.$$

È poi facile calcolare il numero dei termini del secondo membro della (6.6) osservando che è $r$ il numero dei divisori distinti di $n$ e che la $s$-esima $(1 \leqslant s \leqslant r)$ sommatoria contiene $\binom{r}{s}$ termini. Si ha perciò $\sum_{1}^{r}{}_s \binom{r}{s} - 1 = 2^r - 1$. Ricordando che $\int\Lambda = \log N$, la (6.3) dà poi $\Lambda = -\int\mu \log N$.

Dalla relazione fondamentale delle funzioni logaritmiche [**8**]

$$l\cdot(g \times h) = g \times hl + h \times gl\,,$$

per $g = \mu$, qualunque sia $h \in I$ ed $l \in \mathscr{L}$, si ha

$$\text{(6.7)} \qquad \partial(hl) = l\partial h - h \times \mu l\,,$$

che per $h = u$ ridà la (6.3).

La (6.5) è poi caso particolare della (6.7) e si ottiene da quest'ultima per $h = \nu$.

Infine si noti che dalla (6.7) segue $\partial(l\int h) - \partial(h \times l) = \int(l\cdot\partial h) - \int(h \times \mu l)$.

**7** – Può essere utile la seguente *tabella delle derivate* di alcune importanti funzioni aritmetiche.

$$\partial u^{\times q} = u^{\times q-1} = \mu^{\times 1-q} = \partial\mu^{\times -q} \qquad (q \in \pm N_0)\,.$$

In particolare

$\partial\alpha = \mu$; $\partial u = \alpha$; $\partial\nu = u$; $\partial\mu = \mu^{\times 2}$. $\partial\sigma_r = N^r$ $(r \in \pm N_0)$; $\partial N^r = \varphi_r$; $\partial C_r = D_r$ $(r \in N_2)$; $\partial \log N = \Lambda$; $\partial\beta^{(r)} = (\gamma^{(r)})^{\times -1}$; $\partial\beta^{(2)} = (\gamma^{(2)})^{\times -1} = \lambda$; $\partial\lambda = (2^{K})^{\times -1}$; $\partial\gamma^{(r)}$

$= (\beta^{(r)})^{\times -1}$; $\partial\gamma^{(2)} = (\beta^{(2)})^{\times -1} = \partial|\mu|$; $\partial q^k = \mu(1-q)^k = \mu(1-q)^\tau = \mu\cdot\mu^{\times q-1}$; $\partial 2^k = \gamma^{(2)} = |\mu| = \mu^2 = \mu\lambda$; $\partial\big(\nu(N^q)\big) = q^k$; $\partial 3^k\ \nu(Q) = \int\gamma^{(3)}$; $\partial q^\tau = \big((1-q)^k\big)^{\times -1}$; $\partial 2^\tau = 2^{\tau-k}$; $\partial(1-q)^\tau = (q^k)^{\times -1} = \lambda q^k(q-1)^{\tau-k}$; $(\partial q^k)^{\times -1} = (1-q)^\tau$; $\partial(u^{\times q} /_{\times} \beta^{(r)}) = \int^{q-2}\gamma^{(r)}$; $\partial\nu^2 = \nu(N^2) = \nu\times|\mu|$; $\partial K = P$.

## Bibliografia


[1] E. Cahen, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris 1900.

[2] M. Cipolla: [•]$_1$ *Specimen de calculo arithmetico-integrale*, Revista de Mathematica, T. IX, Torino 1908; [•]$_2$ *Sui principi del calcolo aritmetico-integrale*, Atti Acc. Gioenia, Catania **8** (1915).

[3] E. Gagliardo, *Le funzioni simmetriche semplici delle radici n-esime primitive dell'unità*, Boll. Un. Mat. Ital. **3** (1953), 269-273.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, IV Ed. Oxford, at the Clarendon Press 1959.

[5] O. Holder, *Zur theorie kreisteilungsgleichung* $K_m(X) = 0$, Prace Mat.-Fiz. **43** (1936), 13-23.

[6] F. Klein, *Vorlesungen über theorie der elliptischen modulfunctionen.*

[7] E. Landau, *Vorlesungen über zahlentheorie*, Hirgel, Laeipzing 1927.

[8] S. Patrizio, *Le funzioni aritmetiche additive*, Rend. Acc. Sc. Bologna (13) **7** (1979-80).

[9] F. Pellegrino: [•]$_1$ *Sviluppi moderni del calcolo numerico integrale di M. Cipolla*, Atti del IV Congresso U.M.I., Taormina 1951; [•]$_2$ *Lineamenti di una teoria delle funzioni aritmetiche* (I), Rend. Mat. (5) **15** (1956), 469-504; [•]$_3$ *La divisione integrale*, Rend. Mat. (5) **22** (1963), 489-497; [•]$_4$ *Teorema di Wilson e numeri primi gemelli*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **5** (1963), 35; [•]$_5$ *La potenza integrale*, Rend. Mat. (5) **23** (1964), 201-220; [•]$_6$ *Operatori lineari dell'anello delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat. (5) **25** (1966), 308-332; [•]$_7$ *Elementi moltiplicativi dell'anello delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat. (5) **25** (1967), 422-509.

[10] F. Pellegrino e R. Migliorato, *La divisione con resto nell'anello delle funzioni aritmetiche*, Rend. Acc. Sc. Ital. Bologna (13) **2** (1975), 85-123.



## Summary

*This work has the purpose to obtain in an organic way many formulas, bound together by the concept of numerical, derivative according to its divisors.*


* * *