Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 135-147

ANTONELLA FURIOLI MARTINOLLI (*)

Teoremi di esistenza in grande delle soluzioni di problemi di Cauchy per il sistema lineare

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{1}^{N}{}_j \{x a_{ij}(y) \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(y) z_j\} + c_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (**)$$

1 - Introduzione

Date le due variabili complesse $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ si ponga

$$R_\alpha = \{x\colon |x| < \alpha\}, \qquad S_\beta(y_0) = \{y\colon |y - y_0| < \beta\},$$

$$S_{\gamma,\delta}(y_0) = \{y\colon \gamma < |y - y_0| < \delta\}, \qquad \text{con } 0 < \alpha, \beta, \delta \leqslant +\infty \text{ e } \gamma \geqslant 0 .$$

Si tenga inoltre presente che tutte le volte che si parlerà di funzione analitica si farà riferimento alla definizione di funzione analitica secondo Weierstrass; le funzioni analitiche che si incontreranno possono pertanto presentare delle polidromie.

Ciò premesso, si considera il seguente problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{1}^{N}{}_j \{x a_{ij}(y) \dfrac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(y) z_j\} + c_i(x, y), \\ z_i(x, \bar{y}) = \varphi_i(x), \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

con le $\varphi_i(x)$ analitiche in un intorno del punto $x = 0$.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Ricevuto: 25-VII-1980.

Supponiamo che le $a_{ij}(y)$ e $b_{ij}(y)$ siano analitiche (non necessariamente monodrome) in un campo A di ordine di connessione qualsiasi, che $c_i(x, y)$ siano analitiche (non necessariamente monodrome) in $R_\alpha \times A$ con α reale positivo oppure $\alpha = +\infty$.

Fissato $\bar{y} \in A$ e, in corrispondenza, dei rami monodromi dei coefficienti e termini noti, si dimostra dapprima che la soluzione, analitica per il teorema di Cauchy-Kowalewski in un intorno conveniente di $(0, \bar{y})$, è dotata di sviluppo in serie di potenze del tipo $z_i(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{ik}(y)x^k$ dove gli $z_{ik}(y)$ (soddisfacendo un sistema lineare ordinario i cui coefficienti dipendono da k, $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$, $\partial^k c_i(0, y)/\partial x^k$) sono analitici in tutto il campo A di analiticità di $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$, $\partial^k c_i(0, y))/\partial x^k$.

Utilizzando il metodo delle funzioni maggioranti si riesce, in un secondo tempo, a prolungare analiticamente tale soluzione; *nell'ipotesi che i dati siano trascendenti intere e che i termini noti $c_i(x, y)$ siano analitici in $R_\infty \times A$ si riesce ad effettuare tale prolungamento analitico in tutto il campo di analiticità dei coefficienti e termini noti del sistema lineare assegnato*; nell'ipotesi invece che i dati siano analitici in R_α con α reale positivo arbitrario ed i termini noti analitici in $R_\alpha \times A$, il risultato ottenuto è più limitato poichè si dimostra l'analiticità della soluzione in ogni campo $R_{\alpha(A')} \times A'$ dove A' è un qualsiasi campo limitato strettamente contenuto in A ed $\alpha(A')$ è un conveniente numero reale positivo, che dipende da A'.

Considerato infine un problema singolare di Cauchy del tipo

$$
(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{1}^{N}{}_j \left\{ x a_{ij}(y) \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(y) z_j \right\} + c_i(x, y) \\ &z_i(0, y) = \psi_i(y)\,, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)
$$

si dà una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni, condizione che si dimostra essere anche sufficiente per l'esistenza di infinite soluzioni analitiche in $R_\infty \times A$ e di infinite soluzioni analitiche in campi $R_{\alpha(A')} \times A'$ del tipo sopra precisato, a seconda dei casi.

Si ricorda che in due lavori precedenti (cfr. $[\mathbf{1}]_{1,2}$) era stata dimostrata per due diverse classi di equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine, la possibilità di prolungare analiticamente la soluzione di un problema di Cauchy ben posto nell'intorno di un punto singolare per l'equazione stessa; tale risultato era stato ottenuto in entrambi i casi come conseguenza di teoremi di rappresentazione delle soluzioni, teoremi ottenuti in base alla teoria delle equazioni ordinarie di Fuchs e della equazione ipergeometrica.

Nella Osservazione 2 si dimostra come le equazioni precedentemente studiate rientrano come casi particolari nel sistema ora considerato; anche i risultati allora ottenuti per quanto riguarda il prolungamento analitico delle soluzioni sono contenuti nei risultati più generali ora conseguiti ed inoltre essi sono estensibili e generalizzabili ad una più vasta classe di equazioni a derivate parziali dotate di punti singolari. Problemi analoghi sono stati studiati da M. L. Ricci (cfr. [3]) e J. Kajiwara (cfr. $[\mathbf{2}]_{1,2,3,4,5}$).

La prima considera una equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine a coefficienti funzioni della sola y, analitici e monodromi in un campo del tipo $\{0 < |y| < \beta\}$ e dotati di un polo in $y = 0$; essa dà un teorema di esistenza e unicità per la soluzione di un problema singolare di Cauchy, che risulta analitica e quasi periodica rispetto ad x in un campo $J_\alpha \times S_\beta^{\neq} = \{x\colon |\mathrm{Im}\, x| < \alpha,\ 0 < |y| < \beta\}$.

Il secondo considera equazioni e sistemi lineari (di tipo diverso dal sistema (1)) i cui coefficienti, presentando dei poli, sono essi pure analitici e monodromi in un campo non semplicemente connesso ed ottiene teoremi di esistenza in piccolo e in grande di soluzioni analitiche nell'intorno di tali poli.

I risultati ottenuti sono precisati nei seguenti teoremi.

Teorema 1.

Ipotesi. (I) $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche nel campo connesso* A *di ordine di connessione qualsiasi*; $c_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $R_\infty \times A$. (II) $\varphi_i(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \varphi_{ik} x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* R_∞.

Tesi. *Dato il problema di Cauchy* (1) *con* $\bar{y} \in A$, *la soluzione è analitica in tutto il campo* $R_\infty \times A$.

Teorema 2.

Ipotesi. (I) $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j=1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche nel campo connesso* A, *di ordine di connessione qualsiasi*; $c_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano ana litiche in* $R_\alpha \times A$ *con* α *reale positivo.* (II) $\varphi_i(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \varphi_{ik} x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* R_α.

Tesi. *Dato il problema di Cauchy* (1) *con* $\bar{y} \in A$, *la soluzione è analitica in ogni campo* $R_{\alpha(A')} \times A'$, *dove* A' *è un arbitrario campo limitato tale che* $\overline{A'} \subset A$ *ed* $\alpha(A')$ *un conveniente numero reale positivo, dipendente da* A'.

Teorema 3.

Ipotesi. $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche nel campo connesso* A, *di ordine di connessione qualsiasi*; $c_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $R_\alpha \times A$.

Tesi. *Il problema singolare di Cauchy* (2) *non ammette soluzioni se le* $\psi_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *non soddisfano al sistema lineare ordinario*

$$\psi_i'(y) = \sum_{1}^{N}{}_j\, b_{ij}(y)\, \psi_j(y) + c_i(0, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{3}$$

Supponiamo ora che le $\psi_i(y)$ *soddisfino al sistema* (3). *In questo caso si possono assegnare in modo largamente (ma non del tutto) arbitrario i valori* $z_i(x, \bar{y}) = \varphi_i(x)$. *Si ottengono in corrispondenza infinite soluzioni analitiche in* $R_\infty \times A$ *se* $\alpha = +\infty$ *e le* $\varphi_i(x)$ *sono trascendenti intere; se invece* α *è finito oppure le* $\varphi_i(x)$ *non sono trascendenti intere si ottengono infinite soluzioni analitiche in ogni campo del tipo* $R_{\alpha(A')} \times A'$ *dove* A' *è un arbitrario campo limitato tale che* $\bar{A}' \subset A$ *ed* $\alpha(A')$ *è un conveniente numero reale positivo, dipendente da* A'.

Osservazione 1. Dai Teoremi 1 e 2 discendono, come casi particolari che conviene mettere in evidenza, i seguenti corollari.

Corollario 1.

Ipotesi. (I) $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $S_{0,\beta}(0)$ *con* β *reale positivo oppure* $\beta = +\infty$; $c_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $R_\infty \times S_{0,\beta}(0)$. (II) $\varphi_i(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \varphi_{ik} x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* R_∞.

Tesi. *Dato il problema di Cauchy* (1) *con* $\bar{y} \in S_{0,\beta}(0)$, *la soluzione è analitica in tutto il campo* $R_\infty \times S_{0,\beta}(0)$.

Corollario 2.

Ipotesi. (I) $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $S_{0,\beta}(0)$ *con* β *reale positivo oppure* $\beta = +\infty$; $c_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* $R_\alpha \times S_{0,\beta}(0)$ *con* α *reale positivo.* (II) $\varphi_i(x) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \varphi_{ik} x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *siano analitiche in* R_α.

Tesi. *Dato il problema di Cauchy* (1) *con* $\bar{y} \in S_{0,\beta}(0)$, *la soluzione è analitica in ogni campo del tipo* $R_{\alpha(\gamma,\delta)} \times S_{\gamma,\delta}(0)$, *dove* $\gamma > 0$ *e* $\delta < \beta$ *sono arbitrari ed* $\alpha(\gamma, \delta)$ *è un numero reale positivo conveniente che dipende da* γ *e* δ.

Osservazione 2. In $[\mathbf{1}]_{1,2}$ vengono dimostrati teoremi di prolungamento analitico della soluzione di un problema di Cauchy nell'intorno dei relativi punti singolari, per le seguenti equazioni

$$y^2 z_{yy} + y z_y + z = y x^2 z_{xx}\,, \tag{4}$$

$$y(y-1) z_{yy} + [(\alpha+\beta+1)y - \gamma] z_y + \alpha\beta z = \lambda x^2 z_{xx} + \mu x z_x + \nu z\,. \tag{5}$$

È immediato verificare che, posto $z_1(x, y) = z(x, y)$, $z_2(x, y) = x z_x(x, y)$, $z_3(x, y) = z_y(x, y)$, le equazioni (4) e (5) equivalgono ai seguenti sistemi lineari che sono del tipo (1):

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = z_3\,, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x\,\frac{\partial z_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{x}{y}\,\frac{\partial z_2}{\partial x} - \frac{1}{y^2}\,z_1 - \frac{1}{y}\,z_2 - \frac{1}{y}\,z_3\,,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = z_3\,, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x\,\frac{\partial z_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{1}{y(y-1)}\left\{\lambda x\,\frac{\partial z_2}{\partial x} + (\nu - \alpha\beta) z_1 + (\mu - \lambda) z_2 + [\gamma - (\alpha+\beta+1)y] z_3\right\}.$$

I risultati allora ottenuti per quanto riguarda problemi di Cauchy del tipo (1) con dati analitici in R_∞ sono completamente contenuti nel Teorema 1 e Corollario 1.

Se invece i dati sono analitici in R_α, in $[\mathbf{1}]_{1,2}$ si ottengono teoremi di prolungamento nell'intorno della singolarità che migliorano il risultato del Corollario 2 poichè permettono di giungere a prolungare analiticamente la soluzione a tutto un campo del tipo $R_{\alpha'}, \times S_{0,\delta}(0)$ e a mettere in evidenza un significativo legame fra i raggi α' e δ.

Il Teorema 2 nella forma più generale costituisce invece, anche per le equazioni (4) e (5), un risultato nuovo, non contenuto nei lavori citati.

Anche il Teorema 3 si applica alle equazioni (4) e (5) ottenendo per la (4) il seguente risultato che non è contenuto in $[\mathbf{1}]_1$.

Teorema. *Dato per la* (4) *un problema singolare di Cauchy del tipo*

$$z(0, y) = \varphi(y)\,, \qquad z_x(0, y) = \psi(y)\,,$$

esso non ammette soluzione se $\varphi(y)$ *e* $\psi(y)$ *non sono del tipo seguente*

$$\varphi(y) = C_1 y^i + C_2 \bar{y}^i\,, \qquad \psi(y) = C_3 y^i + C_4 \bar{y}^{-i}\,,$$

con i unità immaginaria e C_1, C_2, C_3, C_4 *costanti complesse arbitrarie; se invece $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ sono di questo tipo, il problema singolare di Cauchy ammette infinite soluzioni.*

Per l'equazione (5) un analogo risultato si trova nel teorema 5 di **[1]**$_2$.

I risultati qui ottenuti sono inoltre applicabili ad una più generale equazione di ordine n del seguente tipo

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} + a_1(y)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(y)\frac{\partial z}{\partial y} \tag{6}$$

$$= x^n\, b_0(y)\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + x^{n-1} b_1(y)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \dots + b_n(y)z + c(x, y)\,,$$

in cui i coefficienti $a_i(y)$, $b_i(y)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sono analitici in un campo connesso A, di ordine di connessione qualsiasi, $c(x, y)$ è analitica in $R_\alpha \times A$ ed $a_0(y)$ è privo di zeri in A. L'equazione (6) è infatti equivalente ad un sistema del tipo (1) se si assumono come incognite la $z(x, y)$ e tutte le sue derivate parziali fino all'ordine $n-1$, dopo aver moltiplicato quelle d'ordine k rispetto ad x (con $k = 1, 2, \dots, n-1$) per il fattore x^k.

Il numero complessivo delle incognite, e quindi anche delle equazioni è $N = 1 + 2 + \dots + n$ essendo $z(x, y)$ dotata di $(k+1)$ derivate parziali di ordine k.

2 - Dimostrazioni

T e o r e m a 1. Per il teorema di Cauchy-Kowalewski il problema (1) ammette una e una sola soluzione analitica, sviluppabile in serie doppia di Taylor assolutamente convergente in un intorno di $(0, \bar{y})$, dotata pertanto del seguente sviluppo in serie di potenze

$$z_i(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, z_{ik}(y)x^k \qquad \text{con } z_{ik}(\bar{y}) = \varphi_{ik} \qquad (i = 1, 2, \dots, N)\,.$$

Derivando parzialmente rispetto alle due variabili complesse, si ha

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, z'_{ik}(y)x^k\,, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x} = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, z_{ik}(y)\,kx^{k-1} \qquad (i = 1, 2, \dots, N)\,.$$

Sostituendo nel sistema, dopo aver posto $c_i(x,y)=\sum_{0}^{+\infty}{}_k\, c_{ik}(y)x^k$ $(i=1,2,\dots,N)$ con $c_{ik}(y)$ analitici in A, si ha

$$\sum_0^{+\infty}{}_k\, z'_{ik}(y)\,x^k=\sum_1^N{}_j\,\{xa_{ij}(y)\sum_0^{+\infty}{}_k\, z_{jk}(y)kx^{k-1}+b_{ij}(y)\sum_0^{+\infty}{}_k\, z_{jk}(y)x^k\}+\sum_0^{+\infty}{}_k\, c_{ik}(y)x^k$$

$$=\sum_0^{+\infty}{}_k\ \{\sum_1^N{}_j\,[a_{ij}(y)k+b_{ij}(y)]z_{jk}(y)+c_{ik}(y)\}x^k\qquad(i=1,2,\dots,N)\,.$$

Per il principio di identità di due serie di potenze segue infine che le $z_{ik}(y)$ risolvono necessariamente i seguenti problemi di Cauchy per i sistemi lineari ordinari non omogenei dipendenti da k

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} &z'_{ik}(y)=\sum_1^N{}_j\,[a_{ij}(y)k+b_{ij}(y)]z_{jk}(y)+c_{ik}(y)\\ &z_{ik}(\bar y)=\varphi_{ik}\,. \end{aligned}\qquad (i=1,2,\dots,N;\ k=0,1,2,\dots)$$

Le $z_{ik}(y)$ sono pertanto individuate; esse risultano inoltre prolungabili analiticamente a tutto A, poichè ivi i coefficienti non presentano singolarità.

Limitiamoci tuttavia, per il momento, a ragionare nel cerchio $S_{\beta_1}(\bar y)$ con β_1 uguale alla distanza di $\bar y$ dalla frontiera di A. Prendiamo in esame i termini noti $c_i(x,y)=\sum_0^{+\infty}{}_{kn}\, c_{ikn}(y-\bar y)^n x^k$, analitici in $R_\infty\times S_{\beta_1}(\bar y)$; la funzione

$$c(x,y)=\sum_0^{+\infty}{}_{kn}\,\{\sum_1^N{}_i\,|c_{ikn}|\}(y-\bar y)^n x^k=\sum_0^{+\infty}{}_{kn}\, c_{kn}(y-\bar y)^n x^k$$

è maggiorante di tutti gli N termini noti ed è analitica ancora in $R_\infty\times S_{\beta_1}(\bar y)$.

Fissati ad arbitrio i due numeri reali e positivi α' e $\beta'<\beta_1$, esiste in corrispondenza un numero reale positivo M tale che $c_{kn}\leqslant M/\big((\alpha')^k(\beta')^n\big)$ e perciò la $c(x,y)$ (e quindi anche gli N termini noti $c_i(x,y)$) ammette come maggiorante la funzione

$$\frac{M}{(1-(y-\bar y)/\beta')(1-x/\alpha')}=\sum_0^{+\infty}{}_{kn}\,\frac{M}{(\alpha')^k(\beta')^n}(y-\bar y)^n x^k=C(y)\sum_0^{+\infty}{}_k\,\frac{M}{(\alpha')^k}x^k\,,$$

con $C(y)$ analitica in $S_{\beta'}(\bar y)$.

I coefficienti $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$, essendo analitici in $S_{\beta_1}(\bar y)$, saranno dotati dei seguenti sviluppi in serie di potenze

$$a_{ij}(y)=\sum_0^{+\infty}{}_n\, a_{ijn}(y-\bar y)^n\,,\qquad b_{ij}(y)=\sum_0^{+\infty}{}_n\, b_{ijn}(y-\bar y)^n\qquad(i,j=1,2,\dots,N)\,.$$

Posto $A_n = \sum_{ij}^{1..N} \{|a_{ijn}| + |b_{ijn}| + 1/(\beta')^n\}$ e considerata la funzione $A(y) = \sum_0^{+\infty}{}_n A_n(y-\bar{y})^n$, essa risulta analitica in $S_{\beta'}(\bar{y})$ e maggiorante di tutti i $2N^2$ coefficienti $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ e della funzione $C(y)$.

Posto inoltre $\varphi_k = \sum_1^N{}_i |\varphi_{ik}|$, la funzione $\varphi(x) = \sum_0^{+\infty}{}_k \varphi_k x^k$ risulta analitica in R_∞ e maggiorante degli N dati $\varphi_i(x)$ del problema di Cauchy (1).

Il seguente problema di Cauchy, *che dipende da* α' e β'

$$
(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial Z_i}{\partial y} = \sum_1^N{}_j \{xA(y)\frac{\partial Z_j}{\partial x} + A(y)Z_j\} + A(y)\sum_0^{+\infty}{}_k \frac{M}{(\alpha')^k} x^k \\ &Z_i(x,\bar{y}) = \varphi(x) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)
$$

è pertanto maggiorante del problema (1) e le $Z_i(x, y)$ che risolvono il problema (8) saranno maggioranti delle $z_i(x, y)$ che risolvono il problema (1).

Per determinare tali $Z_i(x, y)$ osserviamo innanzitutto che, considerato lo sviluppo in serie di potenze $Z_i(x, y) = \sum_0^{+\infty}{}_k Z_{ik}(y)x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, in modo analogo a quanto fatto per le $z_{ik}(y)$, si dimostra che le $Z_{ik}(y)$ risolvono $\forall k \geqslant 0$ intero i seguenti problemi di Cauchy per i sistemi lineari ordinari

$$
(9) \qquad \begin{aligned} &Z'_{ik}(y) = (k+1)A(y)\sum_1^N{}_j Z_{jk}(y) + \frac{M}{(\alpha')^k}A(y) \\ &Z_{ik}(\bar{y}) = \varphi_k, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ k = 0, 1, 2, \ldots)
$$

problemi che a loro volta sono maggioranti degli analoghi problemi (7); infatti $a_{ij}(y)$ e $b_{ij}(y)$ ammettono $A(y)$ come maggiorante e le $c_{ik}(y) = \sum_0^{+\infty}{}_n c_{ikn}(y-\bar{y})^n$ sono maggiorate successivamente dalle $c_k(y) = \sum_0^{+\infty}{}_n c_{kn}(y-\bar{y})^n$, da $MC(y)/(\alpha')^k = \sum_0^{+\infty}{}_n \big(M/(\alpha')^k(\beta')^n\big)(y-\bar{y})^n$ e infine da $\big(M/(\alpha')^k\big)A(y)$.

Le soluzioni $Z_{ik}(y)$ dei problemi (9) si ottengono facilmente ponendo $Z_{ik}(y) = Z_k(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ e risolvendo i seguenti problemi di Cauchy per le equazioni lineari ordinarie seguenti

$$
(10) \qquad \begin{aligned} &Z'_k(y) = N(k+1)A(y)\ Z_k(y) + \frac{MA(y)}{(\alpha')^k}, \\ &Z_k(\bar{y}) = \varphi_k. \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)
$$

Si ha pertanto, $\forall k \geqslant 0$ intero e per $i = 1, 2, \ldots, N$

$$Z_{ik}(y) = Z_k(y) = \exp\,[N(k+1)\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy]\,\{\varphi_k + \frac{M}{N(\alpha')^k(k+1)}\} - \frac{M}{N(\alpha')^k(k+1)}$$

(dove il cammino di integrazione da $\bar y$ a y è ovviamente contenuto in $S_{\beta'}(\bar y)$).

Risulta quindi

$$\begin{aligned} Z_i(x, y) &= \sum_0^{+\infty}{}_k\, Z_{ik}(y) x^k \\ &= \sum_0^{+\infty}{}_k \{[\varphi_k + \frac{M}{N(\alpha')^k(k+1)}]\exp\,[N(k+1)\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy] - \frac{M}{N(\alpha')^k(k+1)}\}\, x^k \\ &= \exp\,[N\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy] \sum_0^{+\infty}{}_k\, \varphi_k \{\exp\,[N\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy]\,x\}^k \end{aligned}$$

$$+ M \exp[N\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy] \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{1}{N(\alpha')^k(k+1)}\{\exp[N\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy]x\}^k - M\sum_0^{+\infty}{}_k \frac{x^k}{N(\alpha')^k(k+1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Le $Z_i(x, y)$ sono quindi analitiche nel campo definito nel seguente modo

$$\{y \in S_{\beta'}(\bar y)e,\ \forall y,\ |x| < \frac{\alpha'}{|\exp\,[N\int_{\bar y}^{y} A(y)\,dy]\,|}\}\ ;$$

nello stesso campo risulteranno analitiche le $z_i(x, y)$, soluzioni del problema (1).

Quanto è stato fatto in corrispondenza della coppia (α', β') di partenza *si può ripetere* $\forall \alpha'$ *reale positivo e* $\forall \beta'$ *reale positivo con* $\beta' < \beta_1$.

Ne segue l'analiticità delle $z_i(x, y)$ in $R_\infty \times S_{\beta_1}(\bar y)$.

Consideriamo ora un punto qualsiasi $y_0 \in A$; essendo A connesso è possibile congiungere $\bar y$ ad y_0 mediante una linea Γ generalmente regolare contenuta in A e ricoprire Γ con un numero finito di cerchi, $S_{\beta_1}(y_1 = \bar y)$, $S_{\beta_2}(y_2)$, $\ldots$, $S_{\beta_{n-1}}(y_{n-1})$, $S_{\beta_n}(y_n = y_0)$ con i centri su Γ, tali che β_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ sia la distanza di y_l dalla frontiera di A e tali che ciascun cerchio contenga il centro del successivo.

La soluzione del problema (1) si può allora prolungare analiticamente nel campo $R_\infty \times \{\bigcup_{l=1,\ldots n} S_{\beta_l}(y_l)\}$ risolvendo gli n problemi di Cauchy che si ottengono assumendo successivamente come dati le $z_i(x, y_l)$ $(i = 1, 2, \ldots, N;$ $l = 1, 2, \ldots, n)$, tutte trascendenti intere.

Si deduce allora che $\forall y_0 \in A$ esiste un intorno $S_{\beta(y_0)}(y_0)$ tale che le $z_i(x, y)$ sono analitiche in $R_\infty \times S_{\beta(y_0)}(y_0)$ e quindi risultano analitiche secondo Weierstrass (non necessariamente monodrome) in tutto il campo $R_\infty \times A$.

Teorema 2. Dimostriamo dapprima che, $\forall y_0 \in A$, esistono due numeri reali positivi dipendenti da y_0, $\alpha(y_0)$ e $\beta(y_0)$, tali che le $z_i(x, y)$ siano analitiche in $R_{\alpha(y_0)} \times S_{\beta(y_0)}(y_0)$.

Sia Γ una linea generalmente regolare contenuta in A congiungente $\bar{y}$ ad y_0 e siano $S_{\beta'_1}(y_1 = \bar{y})$, $S_{\beta'_2}(y_2)$, ..., $S_{\beta'_n}(y_n = y_0)$ n cerchi con i centri su Γ tali che $\overline{S_{\beta'_l}(y_l)} \subset A$ $(l = 1, 2, ..., n)$ e tali che ciascuno contenga il centro del successivo.

Abbiamo già dimostrato che le $z_i(x, y)$ ammettono maggioranti $Z_i(x, y)$ dotate della seguente espressione

$$\begin{aligned} Z_i(x, y) = {} & \exp\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big] \sum_0^{+\infty}{}_k\, \varphi_k \Big\{\exp\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big]x\Big\}^k \\ & + M \exp\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big] \sum_0^{+\infty}{}_k\, \frac{1}{N(\alpha')^k(k+1)}\Big\{\exp\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big]x\Big\}^k \\ & - M \sum_0^{+\infty}{}_k\, \frac{x^k}{N(\alpha')^k(k+1)} \qquad (i = 1, 2, ..., N), \end{aligned}$$

dove $0 < \alpha' < \alpha$ è arbitrario, ma *fissato*, e dove abbiamo posto, per comodità di notazioni successive, $A_1(y) = A(y)$ maggiorante di $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ e $C(y)$ $(i, j = 1, 2, ..., N)$ in $\overline{S_{\beta'}(\bar{y})}$ con β' arbitrario, ma *fissato*, tale che $\beta'_1 < \beta' < \beta_1$; la serie $\sum_0^{+\infty}{}_k\, \varphi_k x^k = \sum_0^{+\infty}{}_k \{\sum_1^N{}_i\, |\varphi_{ik}|\} x^k$ è ora analitica in R_α.

Tali $Z_i(x, y)$ risultano pertanto analitiche nell'insieme contenuto in $R_\alpha \times A$ definito dalla condizione seguente

$$\Big\{y \in \overline{S_{\beta'_1}(\bar{y})} \text{ e, } \forall y,\ |x| < \frac{\alpha'}{\big|\exp\big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\big]\big|}\Big\};$$

nello stesso insieme risulteranno analitiche le $z_i(x, y)$.

Sull'arco $\Gamma \cap \overline{S_{\beta'_1}(\bar{y})}$ risulta olomorfa la funzione $\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy$; perciò $\operatorname{Re}\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy$ è continua e limitata. Si avrà perciò

$$m_1 \leqslant \Big|\exp\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big]\Big| = \exp\Big[\operatorname{Re}\Big[N\int_{\bar{y}}^{y} A_1(y)\,dy\Big]\Big] \leqslant M_1 \quad \text{per } y \in \Gamma \cap \overline{S_{\beta'_1}(\bar{y})},$$

e si può concludere che le $z_i(x, y)$ sono olomorfe $\forall y \in \Gamma \cap \overline{S_{\beta'_1}(\bar{y})}$ in $R_{\alpha_1 = \alpha'/M_1}$.

Assumendo ora come dati di un secondo problema di Cauchy le $z_i(x, y_2)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ è possibile analogamente concludere che le $z_i(x, y)$ che risolvono questo secondo problema di Cauchy sono analitiche nell'insieme definito nel modo seguente

$$\{y \in \overline{S_{\beta_2'}(y_2)} \text{ e, } \forall y, |x| < \frac{\alpha_1'}{|\exp[N\int_{\bar{y}}^{y} A_2(y)\, dy]|}\},$$

dove $0 < \alpha_1' < \alpha_1$ è arbitrario, ma *fissato*, a $A_2(y)$ è la maggiorante dei coefficienti $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ e di $C(y)$ nel cerchio $\overline{S_{\beta_2'}(y_2)}$ costruita in modo analogo ad $A_1(y)$.

Con un numero finito di passi si riesce a prolungare le $z_i(x, y)$ nell'insieme definito dalla condizione

$$\{y \in \bigcup_{l=1,2,\dots n} \overline{S_{\beta_l'}(y_l)} \text{ e, } \forall y \in S_{\beta_l'}(y_l), |x| < \frac{\alpha_{l-1}'}{|\exp[N\int_{\bar{y}}^{y} A_l(y)\, dy]|}\},$$

dove l'insieme $\bigcup_{l=1,2,\dots n} \overline{S_{\beta_l'}(y_l)}$ ricopre l'intera linea Γ.

Posto infine

$$\beta(y_0) = \beta_n', \qquad \alpha(y_0) = \frac{\alpha_{n-1}'}{\underset{y \in \overline{S_{\beta_n'}(y_n)}}{\operatorname{Max}} |\exp[N\int_{y_n}^{y_0} A_n(y)\, dy]|},$$

si può concludere che le $z_i(x, y)$ sono analitiche in $R_{\alpha(y_0)} \times S_{\beta(y_0)}(y_0)$.

Consideriamo ora un campo limitato A' tale che $\bar{A}' \subset A$.

Il campo $\bigcup_{y \in \bar{A}'} S_{\beta(y)}(y)$ costituisce una ricopertura di $\bar{A}'$ che è compatto poichè chiuso e limitato.

È possibile allora estrarre una sottoricopertura costituita da un numero finito m di cerchi: $S_{\beta(y_l)}(y_l)$ $(l = 1, 2, \dots, m)$.

Posto $\alpha(A') = \min_{l=1,2,\dots m} \alpha(y_l)$ è immediato concludere l'analiticità delle $z_i(x, y)$ nel campo $R_{\alpha(A')} \times A'$.

T e o r e m a 3. Osserviamo innanzitutto che, se $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ costituiscono una soluzione del problema singolare (2), le (3) seguono necessariamente dal sistema (1) ponendo ivi $x = 0$. Supponiamo ora che le $c_i(x, y)$

siano analitiche in $R_\infty \times A$. Essendo il sistema (3) a coefficienti e termini noti analitici in A tali saranno le $\psi_i(y)$.

Fissato $\bar{y} \in A$ consideriamo N serie di potenze del tipo $\sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{ik0}\, x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ soggette alle sole due condizioni di avere i primi coefficienti $z_{i,0,0} = \psi_i(\bar{y})$ e di essere tutte convergenti in uno stesso cerchio R_α con α reale positivo oppure $\alpha = +\infty$. Considerato allora il problema di Cauchy $z_i(x, \bar{y}) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{ik0} x^k$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, esso ammette una e una sola soluzione analitica nel campo definito dal Teorema 1 oppure 2 a seconda che sia $\alpha = +\infty$ oppure α finito.

Dimostriamo che tale soluzione soddisfa il problema singolare di Cauchy assegnato.

Infatti in un intorno di $(0, \bar{y})$, essa è dotata del seguente sviluppo

$$z_i(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{ikn} x^k (y - \bar{y})^n\,, \qquad z_i(0, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{i,0,n} (y - \bar{y})^n\,,$$

risolve necessariamente il sistema (3); è immediato ora constatare che, in base al teorema di unicità in grande della soluzione di un problema di Cauchy per i sistemi lineari ordinari, risulta $z_i(0, y) \equiv \psi_i(y)$ in tutto A, essendo entrambe soluzioni, per il sistema (3), dello stesso problema di Cauchy $\psi_i(\bar{y}) = z_i(0, \bar{y}) = z_{i,0,n}$.

Dall'arbitrarietà delle N serie $\sum_{0}^{+\infty}{}_k z_{ik0} x^k$ segue l'esistenza di infinite soluzioni analitiche in $R_\infty \times A$ oppure nel campo precisato dal Teorema 2 a seconda che tali serie abbiano raggio di convergenza infinito o finito.

Supponendo infine le $c_i(x, y)$ analitiche in $R_\alpha \times A$ si ottiene, in modo perfettamente analogo, l'esistenza di infinite soluzioni del secondo tipo cioè analitiche in ogni campo del tipo $R_{\alpha(A')} \times A'$ dove A' è un arbitrario campo limitato tale che $\bar{A}' \subset A$ ed $\alpha(A')$ è un conveniente numero positivo, dipendente da A'.

Bibliografia

[1] F. Dal Fabbro e A. Furioli Martinolli: [•]$_1$ *Sull'analiticità delle soluzioni di alcune equazioni differenziali a derivate parziali nell'intorno di punti singolari.* Nota I, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **111** (1977), 281-295. Nota II, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **113** (1979); [•]$_2$ *Analisi delle soluzioni di una equazione differenziale a derivate parziali del tipo ipergeometrico in una variabile.* Nota I, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **112** (1978), 246-260. Nota II (in corso di stampa).

[2] J. KAJIWARA: [•]$_1$ *Some systems of partial differential equations in the theory of soil mechanics*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (A) **24** (1970), 147-230; [•]$_2$ *Some systems of partial differential equations in complex domains*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (A) **25** (1971), 21-143; [•]$_3$ *Cauchy-Kowalewski theorem for a partial differential equation of mixed type*, RNMTAN (VI) **6** (1973), 183-192; [•]$_4$ *On a holomorphic solution of a singular partial differential equation with many simple poles*, Czechoslovak Math. J. **24** (99) 3 (1974), 444-454; [•]$_5$ *Holomorphic solution of a singular Darboux problem*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **1** (1975), 17-31.

[3] M. L. RICCI, *Soluzioni quasi periodiche di una equazione a derivate parziali del tipo di Fuchs*, Ann. Mat. Pura e Appl. (4) **73** (1966), 367-404.

Summary

Let be given the following Cauchy-problem for a linear system of partial differential equations

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_1^N{}_j \left\{x a_{ij}(y)\frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(y) z_j\right\} + c_i(x, y)\,,$$

$$z_i(x, \bar{y}) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)\,,$$

where x, y are complex variables and $z_i(x, y)$ are the complex, unknown functions.

The coefficients $a_{ij}(y)$ and $b_{ij}(y)$ are analytic in some open, simply or multiply-connected region A and the known terms $c_i(x, y)$ are analytic in an open region $\{|x| < \alpha\}\times\{y \in A\}$ ($\alpha > 0$ or $\alpha = +\infty$).

The initial data are analytic in an open disk $\{|x| < \alpha\}$.

When referring to analytic functions, we refer to the Weierstrass definition; therefore the coefficients and the known terms may have singularities of any type: even branch points.

By using the method of majorants we prove two analytic-continuation theorems: if $\alpha = +\infty$ the solution is analytic in the cylinder $\{(x, y) : y \in A\}$; if α is finite the solution is analytic in any open region $\{|x| < \alpha(A')\}\times\{y \in A'\}$, where A' is an arbitrary open limited with $\bar{A}' \subset A$ and $\alpha(A')$ is a convenient positive number.

These results show, if $\alpha = +\infty$, the following analogy between the solutions of the system above mentioned and those of a system of linear ordinary differential equations: the singular points of the solutions are only among those of the coefficients and the known terms.

We consider also the following singular Cauchy-problems

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_1^N{}_j \left\{x a_{ij}(y)\frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(y) z_j\right\} + c_i(x, y)\,,$$

$$z_i(0, y) = \psi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

under the same hypotheses for $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(y)$ and $c_i(x, y)$.

We give a necessary condition for the existence of solutions; if it is satisfied, we prove the set of solutions is infinite.

* * *