Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 91-106

CARLA LUPPI (*)

Sul problema della rappresentabilità per le AHT (**)

1 - Introduzione

In [2] si è introdotto il concetto di algebra di Heyting topologica (AHT); si tratta di una generalizzazione alle algebre di Heyting del concetto di algebra di chiusura (cfr. [4]), cioè detto in breve: una AHT è una algebra di Heyting dotata di una « topologia », che, contrariamente a ciò che accade nelle algebre di chiusura, non può essere definita da un solo operatore, ma da una coppia di operatori $\langle K, I\rangle$, dove K è un operatore di chiusura e I un operatore di interno.

Ricordiamo gli assiomi delle AHT

(α) $K(0)=0$	$(\alpha)'$ $I(1)=1$
(β) $x\leqslant K(x)$	$(\beta)'$ $I(x)\leqslant x$
(γ) $K^2(x)=K(x)$	$(\gamma)'$ $I^2(x)=I(x)$
(δ) $K(x\cup y)=K(x)\cup K(y)$	$(\delta)'$ $I(x\cap y)=I(x)\cap I(y)$
(ε) $K(I(x)\Rightarrow K(y))=I(x)\Rightarrow K(y)$	$(\varepsilon)'$ $I(K(x)\Rightarrow I(y))=K(x)\Rightarrow I(y)$.

Ci si pone ora il problema di dare una eventuale rappresentazione delle AHT. È noto (cfr. [4]) che ogni algebra di Heyting è immergibile nell'algebra degli aperti di uno spazio topologico; perciò sembra naturale, nell'intento di affrontare il problema della rappresentabilità delle AHT, orientarsi verso spazi con due topologie (spazi doppi): una legata alla rappresentazione dell'algebra di Heyting, l'altra legata alla topologia della AHT. Tale approccio si basa sul seguente risultato: se $\mathscr{X}=\langle X, K_1, K_2\rangle$ è uno spazio doppio (soddisfacente opportune condizioni: spazio bitopologico), si può definire una AHT, che indicheremo con $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ come segue

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A. (C. N. R.). — Ricevuto: 11-VII-1980.

(i) l'algebra di Heyting sottogiacente è l'algebra $\mathscr{G}(X, K_1)$ degli elementi aperti relativamente alla prima topologia,

(ii) gli operatori topologici sono costruiti utilizzando la seconda topologia, mediante le formule $K = K_2 \restriction \mathscr{G}(X, K_1)$, $I = I_1 I_2 \restriction \mathscr{G}(X, K_1)$.

Viene spontaneo chiedersi se ogni AHT sia isomorfa ad una sottalgebra dell'algebra $\mathscr{G}(\mathscr{X})$, per un qualche spazio bitopologico $\mathscr{X}$.

Si osserva che ogni AHT finita non solo è rappresentabile nel senso precedente, ma anzi si ha che se $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ è finita, allora per ogni $\langle X, K_1\rangle$ tale che H sia immergibile in $\mathscr{G}(X, K_1)$ è possibile definire un operatore K_2 su X tale che $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$ sia bitopologico e $\mathscr{H}$ sia immergibile in $\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

Questo ed altri esempi spingono ad affrontare il problema della rappresentabilità su due livelli, introducendo accanto al concetto di AHT rappresentabile (cfr. Def. 6) quello di AHT fortemente rappresentabile (cfr. Def. 7).

Per alcune classi di AHT si ottiene una «rappresentazione» in un senso più debole del precedente utilizzando uno spazio doppio non necessariamente bitopologico. Sorgono così i concetti di AHT concreta (cfr. Def. 4) e AHT fortemente concreta (cfr. Def. 5), che corrispondono, in forma più debole, ai due livelli di rappresentabilità sopra introdotti.

Nella ricerca di condizioni sufficienti affinchè una AHT sia rappresentabile ha un particolare interesse il caso in cui l'algebra sia della forma $\mathscr{G}(X, K_1)$ per un qualche spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$; il paragrafo **3** dà una caratterizzazione algebrica di tali algebre.

I paragrafi **4**, **5**, **6** forniscono teoremi di rappresentazione in uno dei sensi precedenti per alcune classi di AHT.

I quattro concetti di rappresentabilità introdotti non sono indipendenti; così ogni algebra fortemente rappresentabile è sia rappresentabile che concreta. Si osserva invece che esistono algebre non fortemente concrete, che sono tuttavia rappresentabili e quindi concrete. La presente nota lascia aperti alcuni problemi, così ad esempio si ignora se esistano AHT non concrete e in particolare non rappresentabili.

2 - Definizioni e teoremi fondamentali

Definizione 1. Si dice che $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$ è uno *spazio doppio* se K_1, K_2 sono operatori di Kuratowski su X [1].

---

[1] In tutto il lavoro ogni qual volta si menzionerà un operatore di Kuratowski K_j, indicheremo con I_j il corrispondente operatore di interno ($I_j = \sim K_j \sim$) e viceversa.

Definizione 2. Uno spazio doppio $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$ si dice *spazio bitopologico* se vale,

$$\text{(i)}\ K_2 I_1(x) \subseteq I_1 K_2(x) \quad \forall x \subseteq X; \qquad \text{(ii)}\ I_2 I_1(x) \supseteq I_1 I_2(x) \quad \forall x \subseteq X .$$

Si osservi che (ii) è equivalente a

$$\text{(ii)}'\ I_1 I_2 I_1(x) = I_1 I_2(x) \quad \forall x \subseteq X \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}''\ I_2 I_1 I_2(x) = I_1 I_2(x) \quad \forall x \subseteq X .$$

Da semplici esempi risulta inoltre che le proprietà (i) e (ii) sono indipendenti.

Teorema 1. *Sia $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$ uno spazio bitopologico e sia $\mathscr{G}_1(\mathscr{X})$* (2) *l'algebra di Heyting degli aperti dello spazio topologico $\langle X, K_1 \rangle$; allora, posto $K = K_2 \restriction \mathscr{G}_1(\mathscr{X})$, e $I = I_1 I_2 \restriction \mathscr{G}_1(\mathscr{X})$, si ha che $\langle K, I \rangle$ è una topologia su $\mathscr{G}_1(\mathscr{X})$. La* AHT *$\langle \mathscr{G}_1(\mathscr{X}), K, I \rangle$ verrà indicata con $\mathscr{G}(\mathscr{X})$* (3).

Dimostrazione. Si deve anzitutto osservare che K, I sono operatori a valori in $\mathscr{G}_1(\mathscr{X})$; a tale scopo basta dimostrare che vale, $\forall x \subseteq X$, $K_2 I_1(x) \subseteq I_1 K_2 I_1(x)$; ciò segue direttamente da (i) della Def. 2 ponendo $I_1(x)$ al posto di x.

Per dimostrare che $\langle K, I \rangle$ è una topologia su $\mathscr{G}_1(\mathscr{X})$ è sufficiente dimostrare che per $\langle K, I \rangle$ valgono i sette assiomi delle AHT menzionati nel teor. 3.2 di [**2**]. Si osserva che (α), (β), (δ) valgono in quanto K_2 è un operatore Kuratowski. Dimostriamo che vale (ε). Tenendo presente la Def. 2 si ha $\forall x, y \in \mathscr{G}_1(\mathscr{X})$:

$$\begin{aligned} K(I(x) \Rightarrow K(y)) &= K I_1(\sim I(x) \cup K(y)) = K_2 I_1(\sim I_1 I_2(x) \cup K_2(y)) \\ &\subseteq I_1 K_2(\sim I_1 I_2(x) \cup K_2(y)) \\ &= I_1 K_2(\sim I_2 I_1 I_2(x) \cup K_2(y)) \\ &= I_1(\sim I_2 I_1 I_2(x) \cup K_2(y)) \\ &= I_2 I_1 I_2(x) \Rightarrow K_2(y) \\ &= I_1 I_2(x) \Rightarrow K_2(y) \\ &= I(x) \Rightarrow K(y) . \end{aligned}$$

---

(2) In generale se $\langle X, K_1 \rangle$ è uno spazio topologico, con $\mathscr{G}(X, K_1)$ indicheremo l'algebra degli aperti di $\langle X, K_1 \rangle$, mentre se $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$ è uno spazio doppio, porremo $\mathscr{G}_1(\mathscr{X}) = \mathscr{G}(X, K_1)$.

(3) Il concetto di spazio bitopologico si generalizza in modo naturale a quello di « algebra di Boole bitopologica », si noti che il Teor. 1 si estende a questa situazione più generale.

L'altra disuguaglianza segue da (β).

Le $(\beta)'$, $(\delta)'$ seguono ovviamente, tenendo presente che I_1, I_2 sono operatori di interno.

Dimostreremo ora $(\varepsilon)'$. Siano $x, y \in \mathscr{G}_1(\mathscr{X})$; tenendo presente (ii)$'$, (ii)$''$ della Def. 2 si ha

$$\begin{aligned} I(K(x) \Rightarrow I(y)) &= I_1 I_2(K_2(x) \Rightarrow I_1 I_2(y)) = I_1 I_2 I_1(\sim K_2(x) \cup I_1 I_2(y)) \\ &= I_1 I_2(\sim K_2(x) \cup I_2 I_1 I_2(y)) \\ &= I_1(\sim K_2(x) \cup I_2 I_1 I_2(y)) \\ &= I_1(\sim K_2(x) \cup I_1 I_2(y)) \\ &= K_2(x) \Rightarrow I_1 I_2(y) \\ &= K(x) \Rightarrow I(y)\,. \end{aligned}$$

Come si è detto in **1**, il problema di una eventuale rappresentazione delle AHT viene affrontato considerando vari concetti di « rappresentabilità »; a tale scopo diamo le seguenti definizioni

Definizione 3. Sia $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$ uno spazio doppio, $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT; si dice che $\mathscr{H}$ *è associata a* $\mathscr{X}$ (*mediante* h), se

(i) $h\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}_1(\mathscr{X})$ è un monomorfismo,

(ii) $K_2(h(a)) = h(K(a))$ $\forall a \in H$, (iii) $I_1 I_2(h(a)) = h(I(a))$, $\forall a \in H$.

Definizione 4. Si dice che $\mathscr{H}$ *è concreta* se esiste uno spazio doppio $\mathscr{X}$, cui essa sia associata.

Definizione 5. Si dice che $\mathscr{H}$ *è fortemente concreta* se per ogni $\langle X, K_1 \rangle$ e ogni $h\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ è possibile definire su X un operatore di Kuratowski K_2 tale che $\mathscr{H}$ sia associata ad $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$ (mediante h).

Corollario. *Se $\mathscr{H}$ è fortemente concreta è concreta.*

Dimostrazione. Basta ricordare che ogni algebra di Heyting è rappresentabile come reticolo di aperti di uno spazio topologico.

Definizione 6. Si dice che $\mathscr{H}$ è *rappresentabile* se è associata ad un qualche spazio bitopologico $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$. Talvolta in questo caso si dirà anche che $\mathscr{H}$ è rappresentabile in $\mathscr{X}$; in virtù del Teor. 1 e Def. 3 ciò equivale a chiedere che $\mathscr{H}$ sia immergibile in $\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

Definizione 7. Si dice che $\mathscr{H}$ è *fortemente rappresentabile* se per ogni spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ e ogni $h\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ è possibile definire un operatore K_2 tale che $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$ sia uno spazio bitopologico e $\mathscr{H}$ sia associata ad $\mathscr{X}$ (mediante h).

Corollario. *Se $\mathscr{H}$ è fortemente rappresentabile è fortemente concreta e rappresentabile; inoltre se $\mathscr{H}$ è rappresentabile è concreta.*

Data una AHT $\mathscr{H}$ e uno spazio doppio $\mathscr{X}$, il seguente lemma fornisce una condizione necessaria perchè $\mathscr{H}$ sia associata ad $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$.

Lemma 1. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ (4) una* AHT *associata mediante h ad uno spazio doppio $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$; allora, indicato con $\mathscr{S}$ l'insieme dei chiusi di $\langle X, K_2\rangle$, si ha*

$$\mathscr{S} \supseteq \mathscr{S}_0 = \{h(c)\colon c \in \mathscr{C}\} \cup \{\sim h(t)\colon t \in \mathscr{T}\}\,.$$

Dimostrazione. Sia $c \in \mathscr{C}$; da (ii) della Def. 3, si ha che $h(c) = h(K(c)) = K_2(h(c))$, da cui $h(c) \in \mathscr{S}$. Sia $t \in \mathscr{T}$, da (iii) della Def. 3, si ha $h(t) = h(I(t)) = I_1 I_2(h(t)) \subseteq I_2(h(t))$, da cui $h(t) = I_2(h(t))$, quindi $\sim h(t) \in \mathscr{S}$.

Considerata una $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$, uno spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ ed un monomorfismo $h\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(H, K_1)$, ci si chiede se sia possibile definire un operatore di chiusura K_2 in modo tale che $\mathscr{H}$ sia associata (mediante h) ad $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$. Il Lemma 2, il Teor. 2 seguenti e relative osservazioni esaminano il suddetto problema.

Lemma 2. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ una* AHT, *sia $\langle X, K_1\rangle$ uno spazio topologico, $h\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ un monomorfismo; allora in X è possibile definire un operatore di Kuratowski K_2 tale che si abbia*

$$\text{(i)}\ \ K_2(h(c)) = h(c) \quad \forall c \in \mathscr{C}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ I_2(h(t)) = h(t) \quad \forall t \in \mathscr{T}\,,$$

$$\text{(iii)}\ \ K_2 I_1(x) = \bigcap \{h(c)\colon h(c) \supseteq I_1(x) \ \ e \ \ c \in \mathscr{C}\} \quad \forall x \subseteq X\,.$$

Dimostrazione. Definiamo per ogni $x \subseteq X$

$$K_2(x) = \bigcap \{\sim h(t) \cup h(c)\colon t \in \mathscr{T},\ c \in \mathscr{C},\ \sim h(t) \cup h(c) \supseteq x\}; \tag{1}$$

---

(4) Ricordiamo che la topologia di una AHT è determinata da $\langle \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$, dove $\mathscr{C}$ è il reticolo dei chiusi e $\mathscr{T}$ quello degli aperti (cfr. [2], teor. 1.2).

si osservi che

$$I_2(x) = \bigcup \{h(t) \cap \sim h(c) \colon t \in \mathscr{T},\ c \in \mathscr{C},\ h(t) \cap \sim h(c) \subseteq x\}\,. \tag{2}$$

Poichè l'operatore K_2 è definito dalla sottobase $\mathscr{S}_0$ del Lemma 1, (i) e (ii) valgono ovviamente.

(iii). Ci limitiamo a dimostrare $K_2 I_1(x) \supseteq \bigcap \{h(c) \colon h(c) \supseteq I_1(x),\ c \in \mathscr{C}\}$, poichè l'altra disuguaglianza è ovvia. A tale scopo basta osservare che, posto $y = \sim h(t) \cup h(c)$, se $y \supseteq I_1(x)$ $\exists c' \in \mathscr{C}$ tale che $h(c') \supseteq I_1(x)$ e $y \supseteq h(c')$. Ora da $I_1(x) \subseteq y$ segue $I_1(x) \subseteq I_1(y) = h(t) \Rightarrow h(c) = h(t \Rightarrow c)$ e $y \supseteq I_1(y) = h(t \Rightarrow c)$. L'asserto segue ponendo $c' = t \Rightarrow c$.

Osservazione 1. La topologia definita da (1) è la meno fine topologia per cui valgano le (i) e (ii) del Lemma 2, come segue tenendo presente che essa è generata da $\mathscr{S}_0$. Definendo in X l'operatore K_2 come in (1), si ottiene uno spazio doppio $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$; tuttavia come si dedurrà dal teorema seguente ed esempio 1, $\mathscr{H}$ non sarà in generale associata ad $\mathscr{X}$; precisamente mentre l'uguaglianza definita da (i) del Lemma 2 si estende alla (ii) della Def. 3, non altrettanto accade per (ii) cioè, in generale, verrà a cadere la (iii) della Def. 3.

Teorema 2. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una* AHT, *e, come nel Lemma 2, siano $\langle X, K_1\rangle$ uno spazio topologico e $h \colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ un monomorfismo; allora in X è possibile definire un operatore K_2 tale che $\forall a \in H$ si abbia*

(i) $K_2(h(a)) = h(K(a))$, (ii) $I_2(h(a)) \supseteq h(I(a))$.

Dimostrazione. Definiamo K_2 come in (1).

(i). Segue da (iii) del Lemma 2, tenendo presente che h è iniettiva e $K(a) = \min\{c \colon c \in \mathscr{C},\ c \geqslant a\}$.

(ii). Si ha $I_2(h(a)) \supseteq \bigcup \{h(t) \colon t \in \mathscr{T},\ h(t) \subseteq h(a)\}$; d'altra parte, tenendo presente che h è inettiva e $I(a) = \max\{t \colon t \in \mathscr{T},\ t \leqslant a\}$ si ha

$$h(I(a)) = \bigcup \{h(t) \colon t \in \mathscr{T},\ h(t) \subseteq h(a)\}, \tag{3}$$

da cui l'asserto segue ovviamente.

Da noti teoremi di rappresentazione per le algebre di Heyting, segue ora

Corollario. *Per ogni $\mathscr{H} = \langle X, K, I\rangle$ esiste uno spazio doppio cui $\mathscr{H}$ è legata secondo il Teor. 2.*

Osservazione 2. Da (ii) del Teor. 2 segue che $\mathscr{H}$ è associata ad $\mathscr{X}$ sse $\forall a \in H$ vale

$$I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a)); \tag{4}$$

quest'ultima disuguaglianza però in generale non vale, come risulterà dal seguente esempio 1. Si noti inoltre che I_2 dipende oltre che da $\mathscr{T}$ anche da $\mathscr{C}$; naturalmente quanto più grande sarà $\mathscr{C}$, tanto più difficile sarà, quindi, che nella (4) valga l'uguaglianza.

Esempio 1. Sia $\langle X, K_1\rangle$ uno spazio topologico infinito, in cui l'insieme degli aperti $\mathscr{G}(X, K_1)$ sia definito nel seguente modo: $a \in \mathscr{G}(X, K_1)$ sse $a = \emptyset$ oppure a è cofinito. Ovviamente $\mathscr{G}(X, K_1)$ è un'algebra i cui elementi $\neq \emptyset$ sono densi. In $\mathscr{G}(X, K_1)$ si consideri la topologia $\langle \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ tale che $\mathscr{C} = \mathscr{G}(X, K_1)$, $\mathscr{T} = \{0, 1\}$. Definendo in X l'operatore I_2 come in (2), si ha facilmente $\forall x \subseteq X$ $I_2(x) = x$, da cui segue in particolare per $\emptyset \neq a \in \mathscr{G}(X, K_1)$, $a = I_1 I_2(a) \neq I(a) = \emptyset$. Da quest'ultima si deduce che $\langle \mathscr{G}(X, K_1), \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ non è associata ad $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2\rangle$.

Corollario. *Le* AHT *considerate nell'Esempio* 1 *non sono fortemente concrete.*

Dimostrazione. Dati $\mathscr{H}$, X, K_1, h come nella Def. 3, supponiamo che esista un K_2' tale che $\mathscr{H}$ sia associata a $\langle X, K_1, K_2'\rangle$ (mediante h).

Dimostriamo allora che $\mathscr{H}$ è associata (mediante h) anche a $\langle X, K_1, K_2\rangle$ con K_2 definito dalla (1). Infatti, per l'Osservazione 2, basta dimostrare la (4). Ora, per l'Osservazione 1, K_2' deve essere più fine di K_2, da cui $I_1 I_2(h(a)) \subseteq I_1 I_2'(h(a)) = h(I(a))$.

D'altra parte, scegliendo $\langle X, K_1\rangle$ come nell'Esempio 1 e come h l'identità, abbiamo visto che la (4) non vale per K_2.

Osservazione 3. Siano dati $\mathscr{H}$, X, K_1, h come nel Teor. 2; la dimostrazione del corollario precedente suggerisce di attenersi alla definizione di K_2 data in (1) nell'intento di ottenere uno spazio doppio $\mathscr{X}$ cui $\mathscr{H}$ sia associata.

Consideriamo una AHT $\mathscr{H}$ e uno spazio doppio come nel Teor. 2. Al fine di poter progredire dalla concretezza nella direzione della rappresentabilità, esaminiamo ora due condizioni sufficienti affinchè valgano le proprietà (i) e (ii) della Def. 2.

Lemma 3. *Siano* $\mathscr{H}$, X, K_1, K_2, h *come nel Lemma* 2. *Una condizione* *sufficiente perchè valga la* (ii) *della Def.* 2, *è che per ogni* $x \subseteq X$ *si abbia* $I_1 I_2(x) \in h[\mathscr{T}]$.

Dimostrazione. Dimostreremo, addirittura, che se un certo x è talè che $I_1 I_2(x) \in h[\mathscr{T}]$, allora esso soddisfa $I_1 I_2(x) \subseteq I_2 I_1(x)$. Sia dunque $I_1 I_2(x) = h(t)$, dove $t \in \mathscr{T}$, da (ii) del Lemma 2 si ha $I_1 I_2(x) = h(t) = I_2(h(t))$ $= I_2 I_1 I_2(x) \subseteq I_2 I_1(x)$.

Lemma 4. *Siano* $\mathscr{H}$, X, K_1, K_2, h *come nel Lemma* 2. *Se* h *è un isomorfismo allora vale la* (i) *della Def.* 2.

Dimostrazione. Sia $h: H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$; poichè $h[H] = \mathscr{G}(X, K_1)$, dalla (i) del Teor. 2 si ha $K_2 I_1(x) \in \mathscr{G}(X, K_1)$, da cui segue $K_2 I_1(x) = I_1 K_2 I_1(x)$ $\subseteq I_1 K_2(x)$.

La condizione espressa dal Lemma 4 coinvolge un'algebra di Heyting isomorfa all'algebra $\mathscr{G}(X, K_1)$ degli aperti di uno spazio topologico ed è noto che tali algebre sono complete; ci si chiede se ogni algebra completa sia della forma $\mathscr{G}(X, K_1)$ per qualche spazio topologico $\langle X, K_1 \rangle$. La risposta è negativa come mostra ogni algebra di Boole completa e non atomica (cfr. Teor. 5). Vale quindi la pena di caratterizzare tali algebre; è quanto faremo in **3**.

3 - Q-algebre

Per tutto il paragrafo si assume che i reticoli considerati siano distributivi e dotati di estremi 0,1 ed inoltre che gli omomorfismi fra essi conservino 0,1.

Definizione 8. Siano H, H' reticoli; un omomorfismo $h: H \to H'$ si dirà un *Q-omomorfismo* (5) se conserva tutti i supremi che esistono in H.

Definizione 9. Sia H un reticolo, ∇ un filtro di H; si dirà che ∇ è un *Q-filtro* se ∇ è un filtro proprio e vale

(i) se $\bigvee_{j \in J} a_j \in \nabla$ allora $\exists j \in J$ tale che $a_j \in \nabla$.

Si osserva facilmente che ogni Q-filtro è un filtro primo.

Sia H un reticolo, sia $S = \{\nabla : \nabla$ è un Q-filtro di $H\}$, e sia $\forall a \in H$, $h_Q(a)$ $= \{\nabla \in S : a \in \nabla\}$; vale allora il seguente lemma.

Lemma 5. *L'applicazione* $h_Q: H \to \mathscr{P}(S)$ *è un Q-omomorfismo.*

---

(5) Il simbolismo estende quello usato in [4].

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare che h_Q conserva $\bigvee$. Si ha

$$h_Q(\bigvee_{j\in J} a_j) = \{\nabla \in S\colon \bigvee_{j\in J} a_j \in \nabla\} = \{\nabla \in S\colon \exists j \in J,\ a_j \in \nabla\}$$

$$= \bigcup_{j\in J} \{\nabla \in S\colon a_j \in \nabla\} = \bigcup_{j\in J} h_Q(a_j)\,.$$

Teorema 3. *Sia H un reticolo. Allora sono equivalenti le seguenti proposizioni*:

(i) *se $a, b \in H$ e $a \nleqslant b$, allora esiste un Q-filtro ∇ tale che $a \in \nabla$ e $b \notin \nabla$;*

(ii) *h_Q è iniettiva;*

(iii) *$\exists X$, $\exists h\colon H \rightarrowtail \mathscr{P}(X)$ tale che h sia un Q-omomorfismo iniettivo.*

Se H è completo, le precedenti equivalgono a

(iv) *esiste uno spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ tale che $H \approx \mathscr{G}(X, K_1)$.*

Dimostrazione. (i) implica (ii). Se $a \nleqslant b$ da (i) segue $\{\nabla \in S\colon a \in \nabla\} \nsubseteq \{\nabla \in S\colon b \in \nabla\}$, quindi $h_Q(a) \neq h_Q(b)$.

(ii) implica (iii). Basta porre $X = S$, $h = h_Q$ e tener presente il Lemma 5.

(iii) implica (i). Siano $a, b \in H$ e $a \nleqslant b$; poichè h è un omomorfismo iniettivo $h(a) \nsubseteq h(b)$; sia $x_0 \in h(a) \setminus h(b)$ e sia $\nabla = \{c \in H\colon x_0 \in h(c)\}$; si osserva che ∇ è un Q-filtro, $a \in \nabla$ e $b \notin \nabla$.

(iii) implica (iv). Si osserva che $h[H]$ è un reticolo di insiemi chiuso rispetto alla $\bigcup$, contenente l'insieme vuoto e l'insieme X.

Definiamo lo spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ come quello che ha $h[H]$ come insieme degli aperti. L'asserto segue essendo $h[H] \approx H$.

(iv) implica (iii). Sia $k\colon H \rightarrow \mathscr{G}(X, K_1)$ un isomorfismo; poichè l'inclusione $j\colon \mathscr{G}(X, K_1) \rightarrow \mathscr{P}(X)$ è un Q-omomorfismo iniettivo anche $h = j \cdot k\colon H \rightarrow \mathscr{P}(X)$ è un Q-omomorfismo iniettivo.

Definizione 10. Si dice che un'algebra di Heyting H è una *Q-algebra* se è completa e se per essa vale (i) del Teor. 3.

Teorema 4. *Un'algebra di Heyting è isomorfa all'algebra degli aperti di uno spazio topologico sse è una Q-algebra.*

Dimostrazione. È un banale corollario del Teor. 3, tenendo presente che due algebre di Heyting sono isomorfe se lo sono come reticoli.

Osserviamo che ogni algebra di Heyting finita è una Q-algebra, giacchè in questo caso Q-filtro equivale a filtro primo. Un'altra classe notevole di Q-algebre è fornita dal seguente

Lemma 6. *Ogni catena completa è una Q-algebra.*

Dimostrazione. Sia H una catena completa, sia $a, b \in H$ e $a < b$, sia $\nabla = \{x \in H: x > a\}$. Si osserva che ∇ è un Q-filtro, $b \in \nabla$ e $a \notin \nabla$.

Concludiamo il paragrafo osservando che

Teorema 5. *Esistono algebre di Heyting complete che non sono Q-algebre.*

Dimostrazione. Basta considerare un'algebra di Boole completa e non atomica. Infatti se essa fosse una Q-algebra sarebbe atomica, poichè i Q-filtri di un'algebra di Boole completa sono principali e massimali.

Si osservi che se H non è una Q-algebra, non la è neppure $H \oplus \{1'\}$ (basta tener presente l'ovvio legame che c'è tra i filtri di H e quelli di $H \oplus \{1'\}$). Da ciò nasce ovviamente la possibilità di avere una infinità di esempi di algebre di Heyting che non sono Q-algebre.

4 - Teorema di rappresentabilità forte per le AHT finite

Lemma 7. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T} \rangle$ una* AHT, *$t_i \in \mathscr{T}$, $c_i \in \mathscr{C}$ $(i = 1, \dots, n)$ e $h: H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ un monomorfismo; allora $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \big(h(t_i) \cap \sim h(c_i)\big)$ può essere espressa come intersezione di termini della forma $\sim h(c) \cup h(t)$, con $c \in \mathscr{C}$, $t \in \mathscr{T}$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ l'asserto è ovvio; nel caso $n + 1$ si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \big(h(t_i) \cap \sim h(c_i)\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(h(t_i) \cap \sim h(c_i)\big) \cup \big(h(t_{n+1}) \cap \sim h(c_{n+1})\big)\,.$$

Dall'ipotesi induttiva segue che $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} \big(h(t_i) \cap \sim h(c_i)\big)$ è intersezione di termini della forma seguente: $\big(\sim h(c) \cup h(t)\big) \cup \big(h(t_{n+1}) \cap \sim h(c_{n+1})\big)$.

D'altra parte distribuendo si ha

$$\begin{aligned} &\big(\sim h(c) \cup h(t)\big) \cup \big(h(t_{n+1}) \cap \sim h(c_{n+1})\big) \\ &= \big(\sim h(c) \cup h(t) \cup h(t_{n+1})\big) \cap \big(\sim h(c) \cup h(t) \cup \sim h(c_{n+1})\big) \\ &= \big(\sim h(c) \cup h(t')\big) \cap \big(\sim h(c') \cup h(t)\big)\,, \end{aligned}$$

dove $t' = t \cup t_{n+1}$ e $c' = c \cap c_{n+1}$. Da ciò segue l'asserto.

Teorema 6. *Ogni* AHT $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T} \rangle$ *tale che* $\mathscr{C} \cup \mathscr{T}$ *sia finito è fortemente rappresentabile.*

Dimostrazione. Siano X, K_1, h come nel Lemma 2; definendo K_2 come in (1), dall'Osservazione 2 segue che è sufficiente dimostrare $I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a))$ e (i), (ii) della Def. 2. Osserviamo anzitutto che nelle nostre ipotesi è soddisfatta la condizione del Lemma 3. Sia infatti $x \subseteq X$; tenendo presente (2) e che $\mathscr{C}$, $\mathscr{T}$ sono finiti, si ha che $I_2(x)$ è espresso da una unione finita, diciamo $I_2(x) = \bigcup_{i=1}^{n} (h(t_i) \cap \sim h(c_i))$, con $t_i \in \mathscr{T}$ e $c_i \in \mathscr{C}$. Dal Lemma 7 segue che $I_1 I_2(x)$ è intersezione finita di elementi della forma $I_1(\sim h(c) \cup h(t))$, cioè $h(c \Rightarrow t)$; quindi essendo $c \Rightarrow t \in \mathscr{T}$, $I_1 I_2(x) \in h[\mathscr{T}]$. Sia ora $x = h(a)$ e sia $t_0 \in \mathscr{T}$ tale che $I_1 I_2 h(a) = h(t_0)$. Poichè $h(t_0) \subseteq h(a)$, dalla (3) segue allora $I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a))$.

Per quanto riguarda la (i) della Def. 2, osserviamo che essendo $\mathscr{C}$ e $\mathscr{T}$ finiti, si ha

$$\begin{aligned} I_1 K_2(x) &= I_1 \bigcap \{h(c_i) \cup \sim h(t_i) \colon h(c_i) \cup \sim h(t_i) \supseteq x\} \\ &= \bigcap \{I_1(h(c_i) \cup \sim h(t_i)) \colon h(c_i) \cup \sim h(t_i) \supseteq x\} \\ &= \bigcap \{h(t_i \Rightarrow c_i) \colon h(c_i) \cup \sim h(t_i) \supseteq x\} . \end{aligned}$$

Tenendo presente che $h(c_i) \cup \sim h(t_i) \supseteq x$ implica $h(t_i \Rightarrow c_i) \supseteq I_1(x)$, da (iii) del Lemma 2 si ha $I_1 K_2(x) \supseteq K_2 I_1(x)$. Infine la (ii) della Def. 2 segue dal Lemma 3.

5 - Teoremi di rappresentazione per le algebre di Boole e le catene topologiche

Teorema 7. *Ogni* ABT [6] $\mathscr{B} = \langle B, K \rangle$ *è fortemente concreta. Inoltre se* B *è una Q-algebra,* $\mathscr{B}$ *è rappresentabile.*

Dimostrazione. Siano X, K_1, K_2 come nel Lemma 2; basta dimostrare che $I_1 I_2(h(a)) = h(I(a))$. Osserviamo che per ogni $b \in B$, $\sim h(b) = h(-b)$ da ciò segue, per la (3), $I_2(h(a)) = \bigcup \{h(t) \colon h(t) \subseteq h(a)\} = h(I(a))$, da cui $I_1 I_2(h(a)) = h(I(a))$.

---

[6] Con ABT si intende algebra di Boole topologica o algebra di chiusura (cfr. [4]). Naturalmente se $\mathscr{B}$ è una ABT essa è anche una AHT.

Sia B una Q-algebra, dal Teor. 4 segue che esiste uno spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ ed un isomorfismo $h\colon B \to \mathscr{G}(X, K_1)$; tenendo presente i Lemmi 3 e 4, basta dimostrare che $I_1 I_2(x) \in h[\mathscr{T}]$, $\forall x \in X$. Essendo $I_1 I_2(x) = \bigcup \{h(t)\colon t \in \mathscr{T}, h(t) \subseteq x\}$, basta dimostrare che, se $(t_j)_{j\in J}$ è una famiglia di elementi di $\mathscr{T}$, allora $\big(\bigcup_{j\in J} h(t_j)\big) \in h[\mathscr{T}]$.

Indichiamo con $\bigvee$ l'operazione di supremo in B; $\bigvee_{j\in J}(t_j) \in \mathscr{T}$, (cfr. [2], teor 1.1), da cui $h\big(\bigvee_{j\in J}(t_j)\big) \in h[\mathscr{T}]$. Tenendo presente che h è un isomorfismo si ottiene direttamente l'asserto.

Teorema 8. *Ogni* AHT $\mathscr{H} = \langle X, \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ *tale che H sia una catena è fortemente concreta ed inoltre se H è completa $\mathscr{H}$ è rappresentabile.*

Dimostrazione. Siano X, K_1, K_2, h come nel Lemma 2. Dimostriamo dapprima che per ogni $x \subseteq X$ tale che $I_1(x) \in h[H]$ si ha

$$I_2(x) = A \cup B \tag{5}$$

dove: $A = \bigcup \{h(t) \cap \sim h(c)\colon h(c) \subset h(t) \subseteq I_1(x)\}$

$$B = \bigcup \{h(t) \cap \sim h(c)\colon h(t) \cap \sim h(c) \subseteq x,\ I_1(x) \subset h(c) \subset h(t)\}$$

con c che varia in $\mathscr{C}$ e t che varia in $\mathscr{T}$. In particolare, per $x = h(a)$, si ha

$$I_2(h(a)) = \bigcup \{h(t) \cap \sim h(c)\colon c < t \leqslant a\}\,. \tag{6}$$

Per dimostrare (5), basta osservare che $h(c) \supseteq h(t)$ implica $h(t) \cap \sim h(c) = \emptyset$ ed inoltre che $h(t) \supset I_1(x) \supseteq h(c)$ implica $h(t) \cap \sim h(c) \nsubseteq x$.

Per dimostrare (6) basta osservare che da $h(c) \supseteq h(a)$ e $h(t) \cap \sim h(c) \subseteq h(a)$ segue $h(t) \cap \sim h(c) = \emptyset$. Da (6) segue quindi $I_2(h(a)) \subseteq \bigcup \{h(t)\colon t \leqslant a\} \subseteq h(I(a))$; da cui si ottiene $I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a))$ e in virtù dell'Osservazione 2 $\mathscr{H}$ risulta essere fortemente concreta.

Supponiamo ora che H sia completa. Per il Lemma 6 si possono scegliere uno spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ e un isomorfismo $h\colon H \to \mathscr{G}(X, K_1)$.

Tenendo presente il Lemma 4, basta dimostrare la (ii)$'$ della Def. 2; poichè $I_1 I_2(x) \subseteq I_1(x)$, ciò equivale a dimostrare

$$I_1 I_2 I_1(x) = I_1 I_2(x) \cap I_1(x)\,. \tag{7}$$

Da (5) segue

$$I_1 I_2(x) \cap I_1(x) = I_1(I_2(x) \cap I_1(x))$$

$$= I_1(\bigcup \{h(t) \cap \sim h(c) \colon h(c) \subset h(t) \subseteq I_1(x)\} \cup$$

$$\bigcup \{\sim h(c) \cap I_1(x) \colon h(t) \cap \sim h(c) \subseteq x,\ I_1(x) \subset h(c) \subset h(t)\}) .$$

Da $I_1(x) \subseteq h(c)$ segue $\sim h(c) \cap I_1(x) = \emptyset$, tenendo presente che h è biunivoca e posto $I_1(x) = h(a)$, si ha $I_1 I_2(x) \cap I_1(x) = I_1(\bigcup \{h(t) \cap \sim h(c)\colon c < t \leqslant a\})$. Dalla (6) segue la (7).

6 - Altre classi di algebre concrete

Il successivo Teor. 9 presenta una classe di AHT rappresentabili; tali AHT non sono in generale fortemente concrete come mostra l'Esempio 1 che esamina particolari algebre di questa classe; tuttavia il Teor. 9 ci dice che sono rappresentabili e quindi concrete.

Dall'Esempio 1 e dal Teor. 9 appare perciò che i due concetti di AHT fortemente concreta e AHT concreta sono distinti, così pure i due concetti di AHT fortemente rappresentabile e AHT rappresentabile sono distinti.

Teorema 9. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T}\rangle$ una* AHT *tale che H sia una Q-algebra i cui elementi $\neq 0$ sono densi e $\mathscr{T} = \{0, 1\}$. Si ha allora che $\mathscr{H}$ è rappresentabile.*

Dimostrazione. Per il Teor. 4 esiste uno spazio topologico $\langle X, K_1\rangle$ e un isomorfismo $h\colon H \to \mathscr{G}(X, K_1)$. Cominciamo col dimostrare che $\mathscr{H}$ è concreta; tenendo presente l'Osservazione 2 basta dimostrare $I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a))$, $\forall a \in H$. Consideriamo dapprima il caso in cui in $\langle X, K_1\rangle$ valga

(8) $$\exists y_0,\ \emptyset \neq y_0 \subseteq X \quad \text{tale che} \bigcap \{h(a)\colon 0 \neq a \in H\} \supseteq y_0 .$$

Si ha quindi $\forall x \subseteq X$

(9) $$I_1(x) \neq \emptyset \quad \text{implica} \quad x \supseteq y_0 .$$

Sia I_2 definito come in (2) e sia $x \neq X$; allora $I_2(x) = \bigcup \{\sim h(c)\colon c \in \mathscr{C}, \sim h(c) \subseteq x\}$. Quindi $I_2(x) \cap y_0 = \bigcup \{\sim h(c) \cap y_0\colon c \in \mathscr{C}, \sim h(c) \subseteq x\}$. Ora $\sim h(c) \subseteq x$ implica $h(c) \neq \emptyset$ e, per la (9), $\sim h(c) \subseteq \sim y_0$; quindi, $I_2(x) \cap y_0 = \emptyset$. Inoltre si ha per la (9)

$$I_1 I_2(x) = \emptyset \,. \tag{10}$$

In particolare per ogni $1 \neq a \in H$, si ha $I_1 I_2(h(a)) = \emptyset = h(I(a))$.

Per dimostrare che $\mathscr{H}$ è rappresentabile basta tener presente la (10) e il Lemma 4.

Consideriamo ora il caso in cui non valga la (8). In questo caso è possibile trovare uno spazio topologico $\langle X', K_1' \rangle$ e un isomorfismo $h'\colon H \rightarrowtail \mathscr{G}(X', K_1')$ per cui valga la (8). Sia $p_0 \notin X$, sia $X' = X \cup \{p_0\}$ e sia $\mathscr{G}(X', K_1') = \{\emptyset\} \cup \{h(a) \cup \{p_0\}\colon 0 \neq a \in H\}$. Sia $\forall a \in H$

$$h'(a) = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ h(a) \cup \{p_0\}, & a \neq 0\,, \end{cases}$$

tenendo presente che gli elementi di H sono densi e quindi $\forall a_1, a_2 \in H$ $h(a_1) \cap h(a_2) = \emptyset$ sse $(h(a_1) = \emptyset$ oppure $h(a_2) = \emptyset)$, si dimostra facilmente che h' è un isomorfismo fra H e $\mathscr{G}(X', K_1')$. Ovviamente si ha $\bigcap \{h'(a)\colon 0 \neq a \in H\} \supseteq \{p_0\}$.

Il seguente Teor. 10 rappresenta in parte una generalizzazione del Teor. 9, giacchè l'ipotesi $\mathscr{T} = \{0, 1\}$ viene sostituita con $\mathscr{T} \subseteq R$, dove con R indichiamo l'insieme dei regolari.

Lemma 8. *Sia H un'algebra di Heyting, h l'omomorfismo di Stone* (7) *e sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T} \rangle$ una* AHT *tale che $\mathscr{T} \subseteq R$. Sia inoltre per ogni $1 \neq a \in H$, $F_a = \{-t \cup c\colon t \in \mathscr{T},\ c \in \mathscr{C},\ h(t) \cap \sim h(c) \subseteq h(a)\}$ e sia $b_0 \in H$. Si ha allora che $F_a \cup \{b_0\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita* (PIF) *sse $b_0 \nleqslant I(a)$.*

Dimostrazione. Se $F_a \cup \{b_0\}$ ha la PIF, essendo $-I(a) \in F_a$, si ha $b_0 \cap -I(a) \neq 0$ e quindi $b_0 \nleqslant I(a)$. Supponiamo ora che $F_a \cup \{b_0\}$ non abbia la PIF, ne segue, senza perdere in generalità, che esistono n elementi di F_a $(-t_1 \cup c_1), \ldots, (-t_n \cup c_n)$ tali che

$$b_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} (-t_i \cup c_i) = 0\,. \tag{11}$$

Da (11) segue $b_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (-t_i \cup c_i) \leqslant t_n \cap -c_n$; poichè $h(t_n) \cap \sim h(c_n) \subseteq h(a)$

(7) Cioè: $h(a) = \{\nabla\colon \nabla$ filtro primo di H e $a \in \nabla\}$; (cfr. [4]).

si ha $I_1(h(t_n)) \cap I_1(\sim h(c_n)) \subseteq I_1 h(a)$, da cui $h(t_n) \cap - h(c_n) \subseteq h(a)$ e quindi, tenendo presente che h è un omomorfismo iniettivo e che t_n, $-c_n \in \mathscr{T}$, $t_n \cap - c_n \leqslant I(a)$.

Si ottiene così $b_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (-t_i \cup c_i) \leqslant I(a)$ e quindi

$$b_0 \cap - I(a) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (-t_i \cup c_i) = 0 .$$

Ripetendo $n-1$ volte il procedimento precedente si ottiene $b_0 \cap - I(a) = 0$, quindi $b_0 \leqslant - - I(a) = I(a)$, essendo $I(a) \in R$.

Teorema 10. *Ogni* AHT $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T} \rangle$ *tale che* $\mathscr{T} \subseteq R$ *è concreta.*

Dimostrazione. Sia $\langle X, K_1 \rangle$ lo spazio di Stone di H, sia h: $H \rightarrowtail \mathscr{G}(X, K_1)$ l'omomorfismo di Stone. Sia K_2 l'operatore di chiusura definito da (1); dall'Osservazione 2 si ha che $\mathscr{H}$ è concreta sse $\forall a \in H$ vale $I_1 I_2(h(a)) \subseteq h(I(a))$. Ovviamente basta dimostrare che la disuguaglianza vale $\forall a \neq 1$. Dimostreremo che $\forall a \neq 1$ esiste un $Y_a \subseteq X$ tale che $I_2(h(a)) \subseteq Y_a$ e $I_1 Y_a \subseteq h(I(a))$.

Per ogni $a \neq 1$ sia $F_a = \{-t \cup c : t \in \mathscr{T},\ c \in \mathscr{C},\ h(t) \cap \sim h(c) \subseteq h(a)\}$ e sia $Y_a = \sim \{\nabla \in X : \nabla \supseteq F_a\}$. Si osserva che se $\nabla \in I_2(h(a))$ allora $\exists t_0 \in \mathscr{T}$, $\exists c_0 \in \mathscr{C}$ tali che $-t_0 \cup c_0 \notin \nabla$ e $h(t_0) \cap \sim h(c_0) \subseteq h(a)$, da cui segue $\nabla \in Y_a$; quindi si ha $I_2(h(a)) \subseteq Y_a$.

Dimostriamo ora che $I_1 Y_a \subseteq h(I(a))$. Tenendo presente che $I_1 Y_a = \bigcup \{h(b) : b \in H,\ h(b) \subseteq Y_a\}$, si ha che

$$(12) \qquad \nabla \in I_1 Y_a \quad \text{sse} \quad \exists b_0 \in H \quad \text{tale che} \quad \nabla \in h(b_0) \text{ e } h(b_0) \subseteq Y_a .$$

Si osserva che la condizione $h(b_0) \subseteq Y_a$ è equivalente ad affermare che ogni filtro primo $\nabla \notin Y_a$ è tale che $b_0 \notin \nabla$; questo è possibile solo se $F_a \cup \{b_0\}$ non ha la PIF e quindi, per il Lemma 8, solo se $b_0 \leqslant I(a)$. Sia dunque $\nabla \in I_1 Y_a$, dalla (12) segue, per l'osservazione fatta, che $\exists b_0 \in \nabla$ tale che $b_0 \leqslant I(a)$; da cui si ha $I(a) \in \nabla$, cioè $\nabla \in h(I(a))$.

Bibliografia

[1] J. Kotas and A. Pieczkowski, *On a generalized cylindrical algebra and intuitionistic logic,* Studia logica **18** (1966), 73-80.

[2] C. Luppi, *Algebre di Heyting topologiche*, Matematiche (Catania) **32** (1977), 5-22.

[3] R. Magari, *Sulle connessioni fra i vari modi di rappresentare un'algebra monadica*, Matematiche (Catania) **20** (1965), 22-40.

[4] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, Warsaw 1963.

Summary

Given a bitopological space $\mathscr{X} = \langle X, K_1, K_2 \rangle$, one gets a topological Heyting algebra $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ by taking the K_1-open subsets of X for the underlying Heyting algebra, and by using K_1 and K_2 in order to induce a topology on it. We investigate the problem of embedding a topological Heyting algebra in one of the form $\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

We also give a necessary and sufficient condition for a complete *Heyting algebra to be the algebra of* all *open subsets of a topological space.*

* * *