Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 85-89

ANNA ZARETTI (*)

Ancora sul moto di un sistema elastico in presenza di un ostacolo deformabile (**)

1 – In una nota precedente [2] si è studiato il problema dell'urto di un sistema elastico contro un ostacolo deformabile.

La trattazione matematica ha portato ad associare al problema fisico considerato la disequazione

$$(1.1)\qquad \int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \beta(u(t), u'(t)) - f, \varphi - u'(t)\rangle \, dt \geqslant 0$$

$$\forall \varphi \in L^2(0, T; V), \quad \varphi \in K \text{ q.o.}, \quad f(t) \in L^2(0, T; V'),$$

ove: $K = \{v/v \in L^2(\Omega),\ |v| \leqslant M \text{ q.o. in } \Omega\}$; $u(t) = \{u(x, t),\ x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$; Ω è la regione limitata di $\boldsymbol{R}^n$ che si pensa occupata dal sistema fisico in esame; $\langle \cdot , \cdot \rangle$ indica la dualità tra uno spazio di Hilbert $V \subset L^2(\Omega)$ e il suo duale V'; $A \in \mathscr{L}(V, V')$ è autoaggiunto e tale che $\langle Av, v\rangle \geqslant \alpha \|v\|_V^2\ (\alpha > 0) \forall v \in V$; $\beta(u(t), u'(t))$ rappresenta l'azione del vincolo sul sistema stesso.

Alla (1.1) nel lavoro citato, venivano associate condizioni iniziali non omogenee

$$(1.2)\qquad u(0) = u_0\,, \qquad u'(0) = u_1$$

e, detta $u(t)$, con $u(t)$, $u'(t) \in L^\infty(0, T\cdot V)$, $u'(t) \in K$ q.o., $u''(t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, la soluzione del problema (1.1), (1.2), veniva dimostrato il seguente

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 10-VII-1980.

Teorema 1. *Se* $u_0 \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $u_1 \in K$, $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $f(t)$, $f'(t) \in L^2(Q)$ $(Q = \Omega \times [0, T])$ *e se* $\beta(\xi, \eta)$ *è tale che*

(i) $\xi \to \beta(\xi, \eta)$ *è continua in* $\boldsymbol{R}^2$, *con* β_ξ,

(ii) $\eta \to \beta(\xi, \eta)$ *è uniformemente lipschitziana in ogni compatto di* $\boldsymbol{R}^2$, *monotona non decrescente, con* $\beta(\xi, 0) = 0 \; \forall \xi \in \boldsymbol{R}^1$, *esiste un'unica soluzione del problema* (1.1), (1.2).

Lo scopo di questa breve nota è di fornire una generalizzazione del teorema precedente nel senso che si indeboliscono le ipotesi là fatte sulla funzione $\beta(\xi, \eta)$, considerando ora funzioni che, almeno rispetto alla seconda variabile, siano anche eventualmente discontinue. In tal modo sarà possibile considerare anche reazioni dell'ostacolo che dipendono dalla posizione e dalla velocità del sistema elastico con leggi diverse da quelle viste in [**2**].

Supponiamo pertanto che la funzione $\beta(\xi, \eta)$ che compare nella (1.1) soddisfi le seguenti ipotesi:

(i)' $\xi \to \beta(\xi, \eta)$ sia uniformemente lipschitziana in ogni insieme compatto di $\boldsymbol{R}^2$,

(ii)' $\eta \to \beta(\xi, \eta)$ sia monotona non decrescente,

(iii)' $\beta(\xi, 0^-) \leq 0$, $\beta(\xi, 0^+) \geq 0 \;\; \forall \xi$.

Osserviamo che ci riferiamo alla disequazione (1.1) con la condizione che $\beta(\xi, \eta)$ sia polidroma in ogni punto (ξ, η) di discontinuità e che $\beta(\xi, \eta) \in [\beta(\xi, \eta^-), \beta(\xi, \eta^+)]$.

Si dimostra allora che vale il

Teorema 2. *Nelle stesse ipotesi sui dati del Teorema* 1 *e con* $\beta(\xi, \eta)$ *soddisfacente le* (i)', (ii)', (iii)', *esiste una ed una sola soluzione del problema* (1.1), (1.2) *nel senso precedentemente precisato.*

2 – Cominciamo a dimostrare l'unicità.

Posto $\omega(t) = u_1(t) - u_2(t)$ $(u_1(t),\ u_2(t)$ eventuali soluzioni$)$, $\omega(t)$ soddisfa la

$$\int_0^s \langle \omega''(t) + A\omega(t) + \beta\big(u_1(t), u_1'(t)\big) - \beta\big(u_2(t), u_2'(t)\big),\ -\omega'(t)\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0 \qquad \forall s \in [0, T] .$$

Da cui

$$(2.1) \quad -\tfrac{1}{2} \|\omega'(s)\|^2_{L^2} - \langle A\omega(s), \omega(s)\rangle - \int_0^s \langle \beta\big(u_1(t), u_1'(t)\big) - \beta\big(u_2(t), u_2'(t)\big),\ \omega'(t)\rangle \mathrm{d}t \geq 0 .$$

Risulta

$$-\int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t)), u_1'(t) - u_2'(t)\rangle \, dt$$
$$= -\int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_1'(t)), \omega'(t)\rangle \, dt$$
$$-\int_0^s \langle \beta(u_2(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t)), \omega'(t)\rangle \, dt$$
$$\leqslant -\int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_1'(t)), \omega'(t)\rangle \, dt$$

per la monotonia di $\eta \to \beta(\xi, \eta)$.

Inoltre, poichè $u'(t) \in K$ e per l'uniforme lipschitzianità di $\xi \to \beta(\xi, \eta)$ risulta

$$\left|\int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_1'(t)), \omega'(t)\rangle \, dt\right|$$
$$\leqslant c\|\omega(t)\|_V \|\omega'(t)\|_{L^2} \leqslant \frac{c}{2}\left(\|\omega(t)\|_V^2 + \|\omega'(t)\|_{L^2}^2\right).$$

Dalla (2.1) segue pertanto

$$\|\omega(s)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\omega(s)\|_V^2 \leqslant \frac{c}{2}\int_0^s \left\{\|\omega(t)\|_V^2 + \|\omega'(t)\|_{L^2}^2\right\} dt \qquad \forall s \in [0, T],$$

da cui segue l'unicità.

3 – Per dimostrare l'esistenza si procede come in [**1**] sfruttando, in un primo momento, il teorema di esistenza là dimostrato nelle ipotesi in cui $\beta(\xi, \eta)$ sia continua e limitata in $\boldsymbol{R}^2$ con le due derivate parziali e con $\beta_\eta(\xi, \eta) \geqslant 0$, $\beta(\xi, 0) = 0$. Si costruisce poi un'opportuna successione di funzioni $\{\beta_n(\xi, \eta)\}$ che soddisfino $\forall n$ le ipotesi ora enunciate; ad essa corrisponde una successione di soluzioni $\{u_n(t)\}$ convergenti verso la soluzione $u(t)$ del problema (1.1), (1.2).

A questo scopo poniamo

$$\beta^+(\xi, \eta) = \begin{cases} \beta(\xi, \eta^-) & \text{per } |\xi| \leqslant M_1 \text{ (1)},\ 0 < \eta \leqslant M \\ 0 & \text{per } |\xi| > M_1,\ \eta \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\beta^-(\xi, \eta) = \begin{cases} \beta(\xi, \eta^+) & \text{per } |\xi| \leqslant M_1,\ -M \leqslant \eta < 0 \\ 0 & \text{per } |\xi| > M_1,\ \eta \geqslant 0. \end{cases}$$

Le due funzioni β^+, β^- risultano ovviamente limitate su tutto $\boldsymbol{R}^2$.

---

(1) Si ricorda che se $u'(t) \in K$ si ha $|u(x, t)| \leqslant |u_0(x)| + T \cdot M = M_1$.

Indichiamo ora con β_n^+ e β_n^- le funzioni ottenute applicando (rispettivamente a β^+ ed a β^-) un'opportuna successione di operatori regolarizzanti di Friedrichs. Precisamente, indichiamo con J_n la successione di tali operatori integrali e con j_n i loro nuclei.

Sia ora $j(\xi)$ una funzione $\in C^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ tale che $j(\xi)\geqslant 0$, $\int_{\boldsymbol{R}^1} j(\xi)\,d\xi=1$, $\sup j(\xi)\subset\,]0,1[$ e poniamo, $\forall n$, $j_n(\sigma-\xi,\tau-\eta)=n^2 j(n(\sigma-\xi))j(n(\tau-\eta))$.

Le funzioni regolarizzate sono allora

$$J_n\beta^+(\xi,\eta)=\beta_n^+(\xi,\eta)=n^2\int_{\boldsymbol{R}^2} j(n(\sigma-\varepsilon))\,j(n(\tau-\eta))\,\beta^+(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

$$J_n\beta^-(\xi,\eta)=\beta_n^-(\xi,\eta)=n^2\int_{\boldsymbol{R}^2} j(n(\sigma-\varepsilon))\,j(n(\tau-\eta))\,\beta^-(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

e poniamo $\beta_n(\xi,\eta)=\beta_n^-(\xi,\eta)+\beta_n^+(\xi,\eta)$.

Le funzioni $\beta_n(\xi,\eta)\in\mathscr{D}(Q)$ risultano limitate in $Q=\{(\xi,\eta)/|\xi|\leqslant M_1, |\eta|\leqslant M\}$ insieme alle loro derivate di tutti gli ordini, monotone non decrescenti rispetto ad η, e sono tali che $\beta_n(\xi,0)=0$.

Pertanto il problema

$$\int_0^T\langle u_n''(t)+Au_n(t)+\beta_n(u_n(t),u_n'(t))-f(t),\,\varphi(t)-u_n'(t)\rangle\,dt\geqslant 0\,, \tag{3.1}$$

$$u_n(0)=u_0\,,\qquad u_n'(0)=u_1\,, \tag{3.2}$$

ha, $\forall n$, soluzione unica.

Si possono ora ripetere, con le ovvie modifiche e tenendo conto che $u_n'(t)\in K$, i ragionamenti fatti in [**1**] per superare le difficoltà legate alla discontinuità di $\beta(\xi,\eta)$ rispetto alla seconda variabile. Si dimostra in tal modo che la soluzione $u_n(t)$ di (3.1), (3.2) converge per $n\to\infty$ alla soluzione di (1.1), (1.2).

4 – In base al risultato ottenuto si possono ora caratterizzare in altro modo le reazioni offerte dai diversi tipi di ostacolo considerati in [**2**] (solido perfettamente elastico, solido perfettamente anelastico, fluido).

Ad esempio, nel caso in cui l'ostacolo sia costituito da un solido perfettamente elastico rappresentato dal semipiano $u\geqslant 0$, si può ora pensare che sia

$$\beta(u,u')=\beta(u)=\begin{cases}\phi(u) & \text{se } u>0\\ 0 & \text{se } u\leqslant 0\end{cases}$$

con $\phi(\xi)$ funzione uniformemente lipschitziana e $\phi(\xi)\geqslant 0$.

Se invece si considera un ostacolo perfettamente anelastico, è possibile ora, con le nuove ipotesi, supporre che la reazione offerta dall'ostacolo dipenda esplicitamente dalla deformazione anzichè dalla velocità di deformazione come si era supposto in [2]. Infatti sembra più in accordo con le caratteristiche dell'urto anelastico dare alla funzione $\beta(u, u')$ la seguente espressione

$$\beta(u, u') = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leqslant 0 \\ 0 & \text{se } u > 0 \text{ e } u' \leqslant 0 \\ \psi(u) & \text{se } u > 0 \text{ e } u' < 0 \end{cases}$$

con $\psi(\xi)$ uniformemente lipschitziana e $\psi(\xi) \geqslant 0$.

Bibliografia

[1] L. Amerio and G. Prouse, *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **44** (1968), 491-496.

[2] A. Zaretti, *Sul moto di un sistema elastico in presenza di un ostacolo deformabile*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 73-87.

Sunto

Si generalizza un risultato ottenuto in un precedente lavoro; in tal modo si può caratterizzare con leggi diverse da quelle già considerate la reazione di un ostacolo deformabile su un sistema elastico vibrante in sua presenza.

* * *