Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 81-84

PIER LUIGI PAPINI (*)

Sui punti in cui non si annullano dei funzionali assegnati (**)

1 – Sia X uno spazio normato (su R o su C) e X^* il suo duale topologico. In [**2**] è stato notato che valgono i seguenti risultati.

Proposizione 1. *Data in X una successione $\{x_n\}$ di vettori non nulli, esiste $f \in X^*$ tale che*

$$f(x_n) \neq 0 \qquad \text{per } n \in N = \{1, \ldots, n, \ldots\}\,. \tag{1}$$

Proposizione 2. *Se X è uno spazio di Banach e $\{f_n\}$ è una successione di elementi non nulli di X^*, esiste $x \in X$ tale che*

$$f_n(x) \neq 0 \qquad \text{per } n \in N\,. \tag{2}$$

La Proposizione 2 (che contiene come caso particolare la Proposizione 1) si dimostra immediatamente; non può infatti accadere che ogni $x \in X$ appartenga al nucleo di almeno uno dei funzionali f_n, perchè allora X sarebbe unione di una famiglia numerabile di iperpiani chiusi; il che è assurdo, in quanto ogni spazio di Banach è anche di Baire. Tale ragionamento mostra anche che il sottoinsieme degli x per cui vale (2) è denso in X.

Si noti che — come si può facilmente vedere con esempi — la Proposizione 2 non vale per spazi non completi. Infine vogliamo segnalare che alcuni risultati — in qualche senso vicini a quelli qui considerati, ma per iperpiani non chiusi — sono stati dati in [**1**], teorema 1, nonchè in [**3**], e anche, per spazi più generali, in [**4**] e in [**5**].

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 87030 Arcavacata di Rende (Cosenza), Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 7-VII-1980.

Vogliamo ora dare una prova costruttiva della Proposizione 2.

2 - Costruzione di un elemento soddisfacente (2).

Ai fini della costruzione, non è restrittivo supporre che per ogni $n \in N$ sia $\|f_n\| = 1$, e che inoltre f_{n+1} non sia proporzionale a f_n. Daremo prima la dimostrazione per un caso particolare, riconducendo poi ad esso il caso generale.

Sia data la successione $\{f_n\}$ in X^*. Consideriamo dapprima il seguente

Caso A. I funzionali $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ sono fra loro linearmente indipendenti.

Scegliamo un punto x_1 tale che $f_1(x_1) \neq 0$; $\|x_1\| = \frac{1}{2}$. Consideriamo ora f_2: se $f_2(x_1) \neq 0$, poniamo $x_2 = 0$; altrimenti (essendo f_2 linearmente indipendente da f_1) vi sarà un punto, che chiameremo x_2, tale che

$$f_1(x_2) = 0\,, \qquad f_2(x_2) \neq 0\,, \qquad \|x_2\| \leqslant \frac{|f_1(x_1)|}{4}\,.$$

In generale, supponiamo di aver già costruito dei punti $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ tali che risulti

$$(\alpha) \quad \|x_i\| \leqslant \frac{1}{2^i} \quad \text{e} \quad f_i(x_1 + \ldots + x_i) \neq 0 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n\,,$$

$$(\beta) \quad |f_i(x_n)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1-i}}\,|f_i(x_1 + \ldots + x_i)| \qquad \text{per } n \geqslant 2 \ \text{ e } \ i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Costruiamo ora x_{n+1} nel modo seguente: se $f_{n+1}(x_1 + \ldots x_n) \neq 0$, poniamo $x_{n+1} = 0$; altrimenti osserviamo che esistono dei punti in cui si annullano $f_1, \ldots, f_n$ ma non f_{n+1}; chiameremo con x_{n+1} uno di tali punti, per il quale risulti inoltre $\|x_{n+1}\| \leqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(x_1 + \ldots x_i)|/2^{n+2-i}$. Si vede che le condizioni (α) e (β) continueranno a valere per i punti $x_1, \ldots, x_{n+1}$, per cui possiamo così costruire una successione $\{x_n\}$ tale che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge ad un elemento $x \in X$ (per la condizione (α), essendo X completo). Per tale elemento si avrà, per la (β) e la seconda parte della (α), per ogni n

$$|f_n(x)| \geqslant |f_n(x_1 + \ldots + x_n)| - \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(x_{n+k})| \geqslant \tfrac{1}{2}\,|f_n(x_1 + \ldots + x_n)| > 0\,.$$

Caso B. Sui funzionali $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ non facciamo alcuna ipotesi di indipendenza.

Scelto x_1 come nel Caso A, consideriamo f_2: se $f_2(x_1) \neq 0$, poniamo $x_2' = 0$; se invece $f_2(x_1) = 0$ (poichè f_2 è linearmente indipendente da f_1) vi sarà un punto, che indicheremo con x_2', tale che $f_1(x_2') = 0$; $f_2(x_2') \neq 0$; $\|x_2'\| = 1/8$. Prendiamo poi in esame f_3: se $f_3(x_1 + x_2') \neq 0$, o se f_3 è linearmente indipendente da $\{f_1, f_2\}$, poniamo $\bar{x}_2 = 0$; altrimenti vi sarà un punto $\bar{x}_2$ tale che $f_3(\bar{x}_2) \neq 0$, $f_2(\bar{x}_2) = 0$, $\|\bar{x}_2\| \leqslant |f_1(x_1)|/4$; quindi poniamo $x_2 = x_2' + \bar{x}_2$. In ogni caso, otterremo

$$\|x_2\| \leqslant \|x_2'\| + \frac{|f_1(x_1)|}{4} \leqslant \frac{1}{8} + \frac{\|x_1\|}{4} = \frac{1}{4},$$

$$f_2(x_1 + x_2) = f_2(x_1) + f_2(x_2') \neq 0, \qquad |f_1(x_2)| = |f_1(\bar{x}_2)| \leqslant \frac{|f_1(x_1)|}{4}.$$

Inoltre, se f_3 dipende linearmente da $\{f_1, f_2\}$, sarà comunque $f_3(x_1 + x_2) \neq 0$.

Costruiamo ora induttivamente una successione in X, usando il procedimento indicato per costruire x_2. Supponiamo cioè di aver già costruito $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ soddisfacenti le proprietà (α), (β), e inoltre

(γ) $f_{n+1}(x_1 + \ldots + x_n) \neq 0$ se f_{n+1} è linearmente dipendente da $f_1, \ldots, f_n$.

Vogliamo ora costruire un elemento x_{n+1} in modo tale che per $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ continuino a valere le proprietà (α), (β) e (γ).

Definiamo per induzione gli indici n_k nel modo seguente: $n_1 = 1$, e, per $k \geqslant 2$, $n_k = \inf \{n \in N;\ f_n$ è linearmente indipendente da $f_{n_1}, \ldots, f_{n_{k-1}}\}$ ogni qualvolta l'insieme ora indicato non è vuoto. Si noti che ciò accadrà per ogni $k \in N$ (e quindi potremo definire una sottosuccessione di indici) se $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ genera un sottoinsieme di X di dimensione infinita; in caso contrario, se ce ne sono k di linearmente indipendenti, in ciò che segue si penserà di porre $x_n' = 0$ per ogni $n > n_k$.

Consideriamo il funzionale f_{n+1}: se $f_{n+1}(x_1 + \ldots + x_n) \neq 0$, poniamo $x_{n+1}' = 0$; supponiamo invece che sia $f_{n+1}(x_1 + \ldots + x_n) = 0$; per la condizione (γ), f_{n+1} risulterà allora linearmente indipendente da $f_1, \ldots, f_n$ (o, ciò che è lo stesso, da $f_{n_1}, \ldots, f_{n_k}$ ove sia $n_k \leqslant n < n_{k+1}$). Si possono allora trovare dei punti $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}$ tali che $f_{n_i}(y_j) = \delta_{ij}$ per $i, j = 1, \ldots, k+1$ ove — per comodità di scrittura — si intenda che sia $f_{n+1} = f_{n_{k+1}}$. Poniamo allora

$$x_{n+1}' = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\| 2^{n+2}};$$

in questo punto si annulleranno allora i funzionali $f_{n_1}, \ldots, f_{n_k}$, quindi tutti i funzionali f_h, $1 \leqslant h \leqslant n$, mentre sarà $f_{n+1}(x_{n+1}') \neq 0$.

Porremo poi $\bar{x}_{n+1} = 0$ se non è contemporaneamente $f_{n+2}(x_1 + \ldots + x_n + x'_{n+1}) = 0$ e f_{n+2} linearmente dipendente da $f_1, \ldots, f_{n+1}$; altrimenti con $\bar{x}_{n+1}$ indicheremo un punto tale che sia

$$f_{n+2}(\bar{x}_{n+1}) \neq 0\,, \qquad f_{n+1}(\bar{x}_{n+1}) = 0\,, \qquad \|\bar{x}_{n+1}\| \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{|f_i(x_1 + \ldots + x_i)|}{2^{n+2-i}}\,.$$

Infine poniamo $x_{n+1} = x'_{n+1} + \bar{x}_{n+1}$. Risulteranno allora soddisfatte comunque le seguenti condizioni

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \|x'_{n+1}\| + \frac{\|x_1\|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\,, \quad f_{n+1}(x_1 + \ldots + x_{n+1}) = f_{n+1}(x_i + \ldots + x_n + x'_{n+1}) \neq 0,$$

$f_{n+2}(x_1 + \ldots + x_{n+1}) \neq 0$ ogniqualvolta f_{n+2} dipende linearmente da $f_1, \ldots, f_{n+1}$;

$$f_i(x'_{n+1}) = 0 \text{ per } i = 1, \ldots, n; \text{ dunque}$$

$$|f_i(x_{n+1})| = |f_i(\bar{x}_{n+1})| \leqslant \frac{1}{2^{n+2-i}} |f_i(x_1 + \ldots + x_i)|\,.$$

Continuano perciò a valere per $x_1, \ldots, x_{n+1}$ le proprietà (α), (β) e (γ). Posto $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, si vede allora — procedendo come per il Caso A — che tale elemento soddisfa la (2), il che completa la dimostrazione.

Bibliografia

[1] J. Arias de Reyna, *Dense hyperplanes of first category*, Math. Ann. **249** (1980), 111-114.

[2] G. Maltese, *A remark on the existence of nonannihilating vectors in normed spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17**-A (1980), 128-130.

[3] M. Talagrand, *Hyperplans universellement mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris **291** (1980), 501-502.

[4] B. Tsirulnikov, *Remarkable hyperplanes in locally convex spaces of dimension at most c*, Canad. Math. Bull. **24** (1981), 369-371.

[5] M. Valdivia, *On Baire-hyperplane spaces*, Proc. Edimb. Math. Soc. **22** (1979), 247-255.

Summary

Let X be a Banach space; given a sequence $\{f_n\}$ of non null elements of X^*, we construct a point $x \in X$ such that no element of the sequence annihilates on x.

* * *