Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 49-57

ADELINA TARSI SANTOLINI (*)

Regolarità e stime di omogeneizzazione per una disequazione quasi-variazionale (**)

Introduzione

Sia Ω un aperto limitato di R^N, di frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1, e siano date, $\forall u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, le forme integro-differenziali

$$(1) \qquad a^k(u, v) \qquad (k = 1, \dots, N)\,,$$

$$= \int_\Omega \sum_1^N{}_{ij}\, a_{ij}^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega \sum_1^N a_i^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx + \int_\Omega a_0^k(x)\, uv\, dx$$

con

$$(2) \qquad \sum_1^N{}_{ij}\, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \qquad \text{q.o. in } \Omega\,,$$

$$(3) \qquad a_0^k(x) \geqslant 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Si consideri poi il sistema di disequazioni quasi-variazionali introdotto da A. Bensoussan e J. L. Lions in [1]

$$(4) \qquad \begin{array}{lll} a^k(u_k, u_k - v) \leqslant \langle f_k, u_k - v\rangle\,, & & u_k \leqslant 1 + \bigwedge_{l\neq k} u_l\,, \\ u_k \in H_0^1(\Omega)\,, & \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, & v \leqslant 1 + \bigwedge_{l\neq k} u_l\,. \end{array} \qquad (k = 1, \dots, N)\,,$$

(*) Istituto di Matematica, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 3-VI-1980.

Supponendo che i coefficienti $a_{ij}^k(x)$, $a_i^k(x)$, $a_0^k(x)$ appartengano a $L^\infty(\bar{\Omega})$, estenderemo un risultato di regolarità per la soluzione $u_k(x)$, ottenuto, in caso di coefficienti regolari, da M. G. Garroni, B. Hanouzet, J. L. Joly in [**6**], dimostrando dapprima che $u(x)$ è holderiana, se $f_k(x) \in L^r(\Omega)$, $r > N/2$, e poi che esiste un $p_0 > 2$ tale che $u_k(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $\forall p$, $2 < p \leqslant p_0$, se $f_k(x) \in L^r(\Omega)$, $r > N$. Sfrutteremo allo scopo la linea della dimostrazione seguita in [**6**], utilizzando inoltre alcuni risultati di regolarità per le soluzioni di disequazioni variazionali, ottenuti da M. Biroli in [**3**]$_{1,3}$.

Supponendo poi che i coefficienti $a_{ij}^k(x)$, $a_i^k(x)$, $a_0^k(x)$ siano periodici di periodo Y e considerando le forme

$$a_\varepsilon^k(u, v) \qquad (k = 1, \dots, N) \tag{5}$$

$$= \int_\Omega \sum_1^N {}_{ij}\, a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_1^N {}_i\, a_i^k\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, \mathrm{d}x + \int a_0^k\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\, uv\, \mathrm{d}x$$

e le disequazioni quasi-variazionali

$$\begin{aligned} & a_\varepsilon^k(u_{k\varepsilon}, u_{k\varepsilon} - v) \leqslant \langle f_k, u_{k\varepsilon} - v\rangle, && u_{k\varepsilon} \leqslant 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l\varepsilon}, \\ & u_{k\varepsilon} \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), && v \leqslant 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l\varepsilon}, \end{aligned} \qquad (k = 1, \dots, N) \tag{6}$$

dimostreremo, sotto opportune ipotesi per $f_k(x)$, che la successione $\{u_{k\varepsilon}(x)\}$ converge in $L^\infty(\bar{\Omega})$ verso $u_{k0}(x)$, soluzione della disequazione quasi-variazionale a coefficienti costanti

$$\begin{aligned} & a_0^k(u_{k0}, u_{k0} - v) \leqslant \langle f_k, u_{k0} - v\rangle, && u_{k0} \leqslant 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{k0}, \\ & u_{k0} \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), && v \leqslant 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l0}, \end{aligned} \qquad (k = 1, \dots, N) \tag{7}$$

e forniremo una stima della differenza $\|u_{k\varepsilon} - u_{k0}\|_{L^\infty}$ prima in caso di coefficienti regolari e poi in caso di coefficienti irregolari ma limitati, sfruttando risultati analoghi ottenuti in [**2**], [**3**]$_4$ e [**4**] per disequazioni variazionali ellittiche.

1 – Dimostreremo ora il seguente

Teorema 1. *Siano verificate le ipotesi* (2), (3) *ed inoltre risulti*

$$a_{ij}^k(x),\ a_i^k(x),\ a_0^k(x) \in L^\infty(\bar{\Omega}), \tag{8}$$

$$f_k(x) \in L^r(\Omega) \qquad r > N/2, \tag{9}$$

allora

$$(10) \qquad u_k(x) \in \mathscr{C}^{\alpha}(\bar{\Omega}) \qquad 0<\alpha<1\,,$$

con α *dipendente dalla norma in* $L^{\infty}(\bar{\Omega})$ *dei coefficienti.*

Dim. Procediamo come in [6] supponendo per semplicità $N=3$.

Dopo aver osservato che $u_k(x)$ è continua (cfr. [6] e [7]) introduciamo gli aperti $C_k=\{x\in\bar{\Omega};\ u_k(x)<1+\bigwedge_{l\neq k} u_l(x)\}$, $k=1,2,3$, ed i compatti $S_{12}=\{x\in\bar{\Omega};\ u_1(x)=1+u_2(x)\}$, $S_{13}=\{x\in\bar{\Omega};\ u_1(x)=1+u_3(x)\}$ che soddisfano alla relazione

$$(10)' \qquad S_{12}\subset C_2\,, \qquad S_{13}\subset C_3\,.$$

Indicando con L^k l'operatore alle derivate parziali associato alla forma a^k, in C_k risulta $L^k u_k=f_k$; pertanto, sfruttando il teorema di De Giorgi-Nash-Moser possiamo affermare che $u_k(x)\in\mathscr{C}^{\beta}(C_k)$, $k=1,2,3$, dove β dipende dalla norma in $L^{\infty}(\bar{\Omega})$ dei coefficienti di L^k. Siano poi C_2' e C_3' due aperti tali che $S_{12}\subset C_2'\subset\subset C_2$, $S_{13}\subset C_3'\subset\subset C_3$ e sia $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_{23}$ una partizione $\mathscr{C}^{\infty}$ dell'unità subordinata al ricoprimento di $\bar{\Omega}$: C_1, C_2/C_3', C_3/C_2', $C_2\cap C_3$. Introdotto poi il nuovo ostacolo $\psi_1=\varphi_1(1+u_1)+\varphi_2(1+u_2)+\varphi_3(1+u_3)+\varphi_{23}(1+u_2\wedge u_3)$, si può dimostrare che u_1 è soluzione della disequazione variazionale

$$(11) \qquad \begin{aligned} &a^1(u_1,u_1-v)\leqslant\langle f_1,u_1-v\rangle \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\,,\ v\leqslant\psi_1\,,\\ &u_1\in H_0^1(\Omega)\,, \qquad u_1\leqslant\psi_1\,.\end{aligned}$$

Per le ipotesi (8), (9) e poichè $\psi_1\in\mathscr{C}^{\beta}(\bar{\Omega})$ possiamo affermare (cfr. $[3]_3$) che $u_1\in\mathscr{C}^{\alpha}(\bar{\Omega})$, dove α dipende da β e dalla norma in $L^{\infty}(\bar{\Omega})$ dei coefficienti di L^1.

In modo analogo si giunge allo stesso risultato per u_2 e u_3.

Con ragionamenti del tutto simili si può poi dimostrare il seguente

Teorema 1.2. *Siano verificate le ipotesi* (2), (3), (8) *ed inoltre risulti*

$$(12) \qquad f_k(x)\in L^r(\Omega) \qquad r>N\,,$$

allora esiste un numero $p_0>2$, *tale che* $\forall p$, $2<p\leqslant p_0$ *si abbia*

$$(13) \qquad u_k(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Dim. Dopo aver osservato che per l'ipotesi (12) $u_k(x)$ è continua (cfr. [**7**]) si procede come nella dimostrazione precedente, affermando (cfr. [**8**]) che $\exists p_0 > 2$ tale che $\forall p$, $2 < p \leqslant p_0$, risulti $u_k \in W^{1,p}(C_k)$.

Allora l'ostacolo $\psi_1 \in W^{1,p}(\Omega)$ e pertanto possiamo concludere (cfr. [**3**]$_1$) che la soluzione $u_1(x)$ della disequazione variazionale (11) appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2 – Supponendo ora che i coefficienti $a_{ij}^k(x)$, $a_i^k(x)$, $a_0^k(x)$ siano periodici di periodo Y, consideriamo, $\forall \varepsilon > 0$, le disequazioni quasi-variazionali (6); se i coefficienti appartengono a $L^\infty(\bar{\Omega})$ per il Teorema 1 le loro soluzioni $\{u_{k\varepsilon}(x)\}$ sono tutte hölderiane con lo stesso esponente α; possiamo dunque affermare che esiste una sottosuccessione, che chiameremo per semplicità ancora con lo stesso nome, convergente uniformemente in $\bar{\Omega}$ verso una funzione $u_{k0}(x)$ che è evidentemente soluzione della (7)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_{k\varepsilon}(x) = u_{k0}(x) \qquad \text{uniformemente in } \bar{\Omega}\,. \tag{14}$$

Considerando, al solito, $N = 3$, introduciamo, $\forall \varepsilon$, gli insiemi

$$C_{k\varepsilon} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{k\varepsilon} < 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l\varepsilon}\}\,, \qquad S_{12\varepsilon} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{1\varepsilon} = 1 + u_{2\varepsilon}\}\,,$$

$$S_{13\varepsilon} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{1\varepsilon} = 1 + u_{3\varepsilon}\}\,, \qquad S_{123\varepsilon} = S_{12\varepsilon} \cap S_{13\varepsilon}\,,$$

e, fissato h opportuno, gli insiemi

$$C_{kh} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{k0} < 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l0} - h\}\,, \qquad S_{12h} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{10} \geqslant 1 + u_{20} - h\}\,,$$

$$S_{13h} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_{10} \geqslant 1 + u_{30} - h\}\,, \qquad S_{123h} = S_{12h} \cap S_{13h}\,.$$

Per la (14) possiamo affermare che, almeno per ε abbastanza piccolo, risulta

$$C_{k\varepsilon} \supset C_{kh}\,, \tag{15}$$

poichè si ha $u_{k\varepsilon} - h/2 < u_{k0} < 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l0} - h < 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l\varepsilon} - h/2$, e quindi $u_{k\varepsilon} < 1 + \bigwedge_{l \neq k} u_{l\varepsilon}$.

Indicando con L_ε^K gli operatori differenziali associati alle forme $a_\varepsilon^k(u, v)$ negli insiemi $C_{k\varepsilon}$ valgono le equazioni

$$L_\varepsilon^K u_{k\varepsilon} = f_k\,, \tag{16}$$

che continuano evidentemente ad essere valide anche negli insiemi C_{kh}, che non dipendono da ε.

Dimostriamo ora che risulta

$$S_{12h} \subset C_{2h}\,, \qquad S_{13h} \subset C_{3h}\,. \tag{17}$$

Infatti in S_{12h} si ha $u_1 \geqslant 1 + u_2 - h$ e quindi

$$u_2 \leqslant u_1 - 1 + h < u_1 - h \leqslant 1 + u_2 \wedge u_3 - h$$

$$\leqslant 1 + (u_1 - 1 + h) \wedge u_3 - h < 1 + u_1 \wedge u_3 - h\,.$$

Siano poi gli insiemi $S_{12h} \subset C'_{2h} \subset\subset C_{2h}$, $S_{13h} \subset C'_{3h} \subset\subset C_{3h}$, e sia φ_1, φ_2, φ_3, φ_{23} una partizione $\mathscr{C}^\infty$ dell'unità subordinata al ricoprimento aperto di: C_{1h}, C_{2h}/C'_{3h}, C_{3h}/C'_{2h}, $C_{2h} \cap C_{3h}$.

Introdotto il nuovo ostacolo

$$\psi_{1\varepsilon} = \varphi_1(1 + u_{1\varepsilon}) + \varphi_2(1 + u_{2\varepsilon}) + \varphi_3(1 + u_{3\varepsilon}) + \varphi_{23}(1 + u_{2\varepsilon} \wedge u_{3\varepsilon})\,, \tag{18}$$

dimostriamo che $u_{1\varepsilon}$ soddisfa, $\forall \varepsilon > 0$, alla disequazione variazionale

$$\begin{aligned} &a^1_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon} - v) \leqslant \langle f_1, u_{1\varepsilon} - v \rangle\,, \qquad u_{1\varepsilon} \leqslant \psi_{1\varepsilon}\,, \\ &u_{1\varepsilon} \in H^1_0(\Omega) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \forall v \leqslant \psi_{1\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Infatti dalla (18) segue immediatamente $u_{1\varepsilon} \leqslant \psi_{1\varepsilon}$. Inoltre in $C_{1\varepsilon}$ vale l'equazione

$$L^1_\varepsilon u_{1\varepsilon} = f_1\,, \tag{20}$$

quindi in $C_{1\varepsilon}\, v$ può essere arbitraria. Per dimostrare allora la (20) basterà verificare che in $S_{12\varepsilon} \cup S_{13\varepsilon}$ risulta

$$\psi_{1\varepsilon} = u_{1\varepsilon}\,. \tag{21}$$

Infatti i punti di $S_{12\varepsilon} \cup S_{13\varepsilon}$, non appartenendo a $C_{1\varepsilon}$, non appartengono nemmeno a C_{1h}; quindi in $S_{12\varepsilon} \cup S_{13\varepsilon}$ si ha $\varphi_1 = 0$. Inoltre i punti di $S_{12\varepsilon}/S_{123\varepsilon}$, in cui risulta $u_{1\varepsilon} = 1 + u_{2\varepsilon}$, $u_{1\varepsilon} < 1 + u_{3\varepsilon}$ non possono appartenere, per la (17), a C_{3h}/C'_{2h} in cui risulta invece $u_{10} < 1 + u_{20} - h$.

Pertanto in $S_{12\varepsilon}/S_{123\varepsilon}$ si ha $\varphi_3 = 0$ e $\psi_{1\varepsilon} = (\varphi_2 + \varphi_{23})u_{1\varepsilon} = u_{1\varepsilon}$ poichè si ha anche $u_{2\varepsilon} < u_{3\varepsilon}$.

Con ragionamenti del tutto analoghi si può dimostrare che la (21) è valida anche nei punti di $S_{13\varepsilon}/S_{123\varepsilon}$.

Nei punti di $S_{123\varepsilon}$ si ha infine $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, poichè in tali punti risulta $u_{1\varepsilon} = 1 + u_{2\varepsilon}$, $u_{1\varepsilon} = 1 + u_{3\varepsilon}$, e quindi, per la (15), non possono essere verificate le disuguaglianze $u_{10} < 1 + u_{20} - h$, $u_{10} < 1 + u_{30} - h$, valide rispettivamente nei punti di C_{3h}/C'_{2h} e C_{2h}/C'_{3h}. Allora in $S_{123\varepsilon}$ si ha $u_{2\varepsilon} = u_{3\varepsilon}$ e quindi $\psi_{1\varepsilon} = \varphi_{23}(1 + u_{2\varepsilon}) = u_{1\varepsilon}$.

Potremo ora dimostrare il primo dei teoremi di approssimazione, valido in caso di coefficienti regolari.

Teorema 2.1. *Siano valide le ipotesi* (2), (3) *e siano inoltre verificate le seguenti condizioni*

$$a^k_{ij}(x),\ a^k_i(x),\ a^k_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})\,, \tag{22}$$

$$f_k(x) \in L^r(\Omega) \qquad r > N\,; \tag{23}$$

allora risulta

$$\|u_{k\varepsilon} - u_{k0}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \begin{cases} < K\,\varepsilon^{\alpha/(N-2+3\alpha)} & \text{se } N \geqslant 3 \\ < K\varepsilon^{\beta}\quad 0 < \beta < 1 & \text{se } N = 3\,, \end{cases} \tag{24}$$

dove α *è l'esponente di Hölder del teorema di De Giorgi-Nash, relativo a* $L^r(\Omega)$ *ed ai coefficienti* $a_{ij}(x)$.

Dim. Considerando, al solito, $N = 3$, introduciamo l'ostacolo

$$\psi_1 = \varphi_1(1 + u_{10}) + \varphi_2(1 + u_{20}) + \varphi_3(1 + u_{30}) + \varphi_{23}(1 + u_{20} \wedge u_{30})$$

e consideriamo la disequazione variazionale

$$\begin{aligned} &a^1_\varepsilon(\omega_{1\varepsilon}, \omega_{1\varepsilon} - v) \leqslant \langle f_1, \omega_{1\varepsilon} - v\rangle\,, \qquad \omega_{1\varepsilon} \leqslant \psi_1\,, \\ &\omega_{1\varepsilon} \in H^1_0(\Omega) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \forall v \leqslant \psi_1\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Poichè ψ_1 è regolare, essendo costruito mediante le soluzioni in C_{kh} di equazioni a coefficienti costanti, possiamo affermare, (cfr. [4])

$$\|\omega_{1\varepsilon} - u_{10}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leqslant K_1\,\varepsilon^{\alpha/(N-2+3\alpha)}\,. \tag{26}$$

Dalle (25) e (19) si ha poi

$$(27)\qquad \|\omega_{1\varepsilon}-u_{1\varepsilon}\|_{L^\infty(\bar\Omega)}\leqslant\|\psi_1-\psi_{1\varepsilon}\|_{L^\infty(\bar\Omega)}$$

$$\leqslant\|u_{1\varepsilon}-u_{10}\|_{L^\infty(C_{1h})}\|+u_{2\varepsilon}-u_{20}\|_{L^\infty(C_{2h})}+\|u_{3\varepsilon}-u_{30}\|_{L^\infty(C_{3h})}\,.$$

Ricordando che in C_{kh} valgono le equazioni (16) possiamo affermare (cfr. [**4**])

$$(28)\qquad \|u_{k\varepsilon}-u_{k0}\|_{L^\infty(C_{kh})}<K_2\,\varepsilon^{1/2}\,,$$

con K_2 eventualmente dipendente da h.

Dalle (26), (27), (28) segue allora la prima delle (24).

Ragionamenti del tutto analoghi si possono seguire per dimostrare anche la seconda.

Dimostreremo infine il secondo teorema di approssimazione.

Teorema 2.2. *Siano valide le ipotesi* (2), (3), *e siano verificate le seguenti condizioni*

$$(29)\qquad a_{ij}^k(x),\ a_i^k(x),\ a_0^k(x)\in L^\infty(\bar\Omega)\,,$$

$$(30)\qquad \|a_{ij}^k(x+h)-a_{ij}^k(x)\|_{L^{p^*}(\Omega)}+\|a_i^k(x+h)-a_i^k(x)\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

$$+\|a_0^k(x+h)-a_0^k(x)\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leqslant M|h|^\beta\qquad(0<\beta<1)\,,$$

con $p^*=p_0/(p_0-2)$, *dove* p_0 *è l'esponente di Mayer relativo agli operatori* L^K; *allora risulta*

$$(31)\qquad \|u_{k\varepsilon}-u_{k0}\|_{L^\infty(\bar\Omega)}\leqslant k\varepsilon^\tau\,,$$

con

$$(32)\qquad \tau=s\frac{\beta}{1+\beta}\;\frac{\gamma}{N-2(1-\gamma)}\,,$$

dove $s=\alpha/2(N-2+3\alpha)$, $N\geqslant3$ *e* $s<1/6$, $N=2$; $\gamma=\alpha^2/2$.

Dim. Introducendo ancora la disequazione (25) si ottiene (cfr. [**4**])

$$\|\omega_{1\varepsilon}-u_{10}\|_{L^{2N/N-2}(\Omega)}\leqslant\varepsilon^{s\beta/1+\beta}\,.$$

Poichè inoltre l'ostacolo $\psi_1 \in \mathscr{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ si ha anche (cfr. [**3**]$_3$)

$$\|\omega_{1\varepsilon}\|_{C^\gamma(\bar{\Omega})'}\ \|u_{10}\|_{C^\gamma(\bar{\Omega})} \leqslant L\,, \qquad \text{con } \gamma = \alpha^2/2\,.$$

Di qui si ricava allora

$$\|\omega_{1\varepsilon} - u_{10}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leqslant k_1\,\varepsilon^\tau\,, \tag{33}$$

e dalla (28) si ricava la (31).

Bibliografia

[**1**] A. Bensoussan et J. L. Lions, *Contrôle impulsionnel et systemes d'inéquations quasi variationnelles,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **279** (1974), 747-751.

[**2**] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures,* Academic Press 1978.

[**3**] M. Biroli: [•]$_1$ *Une estimation dans L^p du gradient de la solution d'une inéquation elliptique du second ordre,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **288** (1979), 453-455; [•]$_2$ *An estimate on convergence of approximation by iteratio of a solution to a quasi-variational inequality and some consequences in continuous dependence and in G-convergence,* Ann. Mat. Pura Appl. (in print); [•]$_3$ *A De Giorgi-Nash-Moser result for a variational inequality,* Boll. Un. Mat. Ital. (in print); [•]$_4$ *Estimates in homogeneization for variational and quasi-variational inequalities,* «Free boundary problems», Pavia, Settembre-Ottobre 1979, Ac. Press (in print).

[**4**] M. Biroli and S. Marchi, *An estimate in homogeneization problem for elliptic equations with discontinuous coefficients,* IAC Quaderni, Serie III n. 92 (1978).

[**5**] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari,* Mem. Acad. Sci. Torino **3** (1957), 1-19.

[**6**] M. G. Garroni, B. Hanouzet et J. L. Joly, *Regularité pour la solution d'un sisteme* IQV (in print).

[**7**] B. Hanouzet et J. L. Joly, *Convergence uniforme des itérés definissant la solution d'une inéquation quasi variationnelle abstraite,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A (1978), 735-738.

[**8**] N. G. Meyers, *An L^p estimates for the gradient of solutions of second order elliptic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 189-206.

[9] J. MOSER, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regular problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 457-468.

[10] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **80** (1958), 931-954.

[11] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Univ. de Montreal 1965.

Summary

We prove hölderian regularity and W_0^{1p} *regularity for the solutions of a linear quasi-variational inequality, with homogeneization estimates both for regular and bounded irregular coefficients.*

* * *