Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 1-7

MARIO GIONFRIDDO (*)

Sul parametro $\Delta_s(G)$ d'un grafo L_s-colorabile e problemi relativi (**)

1 - Sia $G = (V, S)$ un *grafo* non orientato. Fissato $s \in \boldsymbol{N}$, s'indicherà con γ_s il *numero s-cromatico* di G ($[\mathbf{10}]_2$, p. 54), con d_s la sua *s-densità* (1), con $\bar{G}$ il suo grafo complementare, con G^s il grafo tale che $V(G^s) = V(G)$ e $\{x, y\} \in S(G^s)$ se e solo se $d(x, y) \leqslant s$ in G ([**7**], p. 14).

Posto $\Delta_s = \gamma_s - d_s$, in **2** si proverà che per ogni $h \in \boldsymbol{N}$ esiste almeno un grafo G_h tale che $\Delta_2(G_h) = h$. Tale risultato si ricollega ad altri precedentemente ottenuti in $[\mathbf{6}]_{1,2,3}$ e ad un problema ivi descritto. In **3** verranno, inoltre, segnalati alcuni problemi relativi a grafi L_s-colorabili $[\mathbf{10}]_2$.

Se $r \in \boldsymbol{R}$, s'indicherà con $[r]$ il massimo intero non maggiore di r, con $[r]^*$ il minimo intero non minore di r.

2 - Teorema 2.1. *Per ogni $h \in \boldsymbol{N}$ esiste almeno un grafo G_h tale che $\Delta_2(G_h) = h$.*

Dim. Supponiamo $h \geqslant 3$. Siano allora:

$\boldsymbol{K}_h$ un grafo *completo* di ordine h con $V(\boldsymbol{K}_h) = \{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$;

$\boldsymbol{K}_{h,h}$ un grafo *bipartito completo*, bipartito in $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ ed in $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_h\}$;

$\boldsymbol{K}^*_{h,h}$ il grafo che si ottiene da $\boldsymbol{K}_{h,h}$ con la soppressione degli spigoli $\{y_i, z_{i+[h/2]}\}$, per $i = 1, 2, \ldots, h$ (2);

(*) Indirizzo: Seminario Matematico, Città Universitaria, 95125 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 1-X-1979.

(1) $d_s = \max\{|X| : X \subseteq V, \operatorname{diam} X \leqslant s\}$.

(2) S'intende di porre $i + u = j$ nel caso $i + u = h + j$, e $i - u = h + (i - u)$ nel caso $i - u \leqslant 0$.

$\boldsymbol{K}_{5h}$ un grafo *completo* di ordine $5h$ con $V(\boldsymbol{K}_{5h}) = \bigcup_{j=1}^{5} A_j$, $A_j = \{a_{j,i}\colon i = 1, 2, \ldots, h\}$;

J_h il grafo tale che

$$V(J_h) = V(\boldsymbol{K}_h) \cup V(\boldsymbol{K}_{h,h}),$$
$$S(J_h) = S(\boldsymbol{K}_h) \cup S(\boldsymbol{K}^*_{h,h}) \cup \bigcup_{i=1}^{h} \{\{x_i, y_i\}, \{x_i, z_i\}\};$$

Z_h il grafo che si ottiene da K_{5h} con la soppressione degli spigoli

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} \{a_{1,i}, a_{4,i-1}\}, & \{a_{2,i}, a_{5,i-1+[h/2]^*}\}, & \{a_{3,i}, a_{4,i-1}\}, & \{a_{3,i}, a_{5,i-1}\}, \\ \{a_{4,i-1}, a_{4,i}\}, & \{a_{4,i}, a_{4,i+1}\}, & \{a_{5,i}, a_{5,i-1+[h/2]^*}\}, & \{a_{5,i}, a_{5,i+1+[h/2]}\}, \end{array}$$

per $i = 1, 2, \ldots, h$ (2).

Osserviamo che in J_h si ha $\forall i \in \boldsymbol{N}_h = \{1, 2, \ldots, h\}$

$$(2)_1 \qquad d(x_i, v) \leqslant 2 \qquad \forall v \in V(J_h),$$

$$(2)_2 \qquad d(y_i, v) \begin{cases} \leqslant 2 & \forall v \in V(J_h),\ v \neq z_{i+[h/2]} \\ = 3 & \text{per } v = z_{i+[h/2]}, \end{cases}$$

$$(2)_3 \qquad d(z_i, v) \begin{cases} \leqslant 2 & \forall v \in V(J_h),\ v \neq y_{i+[h/2]^*} \\ = 3 & \text{per } v = y_{i+[h/2]^*}. \end{cases}$$

Segue che il grafo $\overline{J}^2_h$ risulta formato dai 3h vertici $x_1, x_2, \ldots, x_h, y_1, y_2, \ldots, y_h, z_1, z_2, \ldots, z_h$ e dagli spigoli $\{y_i, z_{i+[h/2]}\}$ per $i = 1, 2, \ldots, h$ (2).

Inoltre, essendo in Z_h

$$(3) \qquad d(x, y) \leqslant 2 \qquad \forall (x, y) \in A_i \times A_j,\ \forall (i, j) \in \boldsymbol{N}^2_5,$$

il grafo Z^2_h risulta essere isomorfo ad un grafo completo con $5h$ vertici e, quindi, $\overline{z^2_h}$ formato dai $5h$ vertici *isolati* $a_{j,i}$.

Consideriamo, adesso, il grafo G_h tale che

$$V(G_h) = V(J_h) \cup V(Z_h), \qquad S(G_h) = S(J_h) \cup S(Z_h) \cup T,$$

dove

$$T = \bigcup_{i \in N_h} \{\{x_i, a_{3,i}\}, \{y_i, a_{1,i}\}, \{z_i, a_{2,i}\}\}.$$

Si può constatare che il grafo G_h, così definito, è di ordine $8h$ e che in esso oltre le (2) e la (3) sussistono, $\forall i \in \boldsymbol{N}_h$ ([2]), anche le seguenti

$$(4)_1 \qquad d(x_i, a_{j,k}) \left\langle \begin{array}{ll} \leq 2 & \forall (j,k) \in \boldsymbol{N}_5 \times \boldsymbol{N}_h \quad (j,k) \neq \left\langle \begin{array}{l}(4, i-1) \\ (5, i-1)\end{array}\right. \\ = 3 & \text{per } (j,k) = \left\langle \begin{array}{l}(4, i-1) \\ (5, i-1)\end{array}\right. , \end{array}\right.$$

$$(4)_2 \qquad d(y_i, a_{j,k}) \left\langle \begin{array}{ll} \leq 2 & \forall (j,k) \in \boldsymbol{N}_5 \times \boldsymbol{N}_h \quad (j,k) \neq (4, i-1) \\ = 3 & \text{per } (j,k) = (4, i-1) , \end{array}\right.$$

$$(4)_3 \qquad d(z_i, a_{j,k}) \left\langle \begin{array}{ll} \leq 2 & \forall (j,k) \in \boldsymbol{N}_5 \times \boldsymbol{N}_h \quad (j,k) \neq (5, i-1+[h/2]^*) \\ = 3 & \text{per } (j,k) = (5, i-1+[h/2]^*) . \end{array}\right.$$

Dalle (2), (3), (4) segue che il grafo G_h^2 può essere ottenuto a partire dal grafo completo $\boldsymbol{K}_{8h}$, tale che $V(\boldsymbol{K}_{8h}) = V(G_h)$, con la soppressione degli spigoli, $\forall i \in \boldsymbol{N}_h$ ([2]),

$$(5) \qquad \begin{array}{lll} \{x_i, a_{4,i-1}\} , & \{x_i, a_{5,i-1}\} , & \{y_i, z_{i+[h/2]}\} , \\ \{y_i, a_{4,i-1}\} , & \{z_i, a_{5,i-1+[h/2]^*}\} , & \{z_i, y_{i+[h/2]^*}\} , \end{array}$$

e che, quindi, $\overline{G_h^2}$ è formato dai $3h$ vertici isolati $a_{j,i}$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \ldots, h$, e da h componenti connesse W_i, ognuna isomorfa a C_5 (ciclo di 5 vertici), tali che $\forall i \in \boldsymbol{N}_h$ ([2])

$$V(W_i) = \{x_i, a_{4,i-1}, y_i, z_{i+[h/2]}, a_{5,i-1}\} ,$$

$$S(W_i) = \{\{x_i, a_{4,i-1}\}, \{a_{4,i-1}, y_i\}, \{y_i, z_{i+[h/2]}\}, \{z_{i+[h/2]}, a_{5,i-1}\} \{x_i, a_{5,i-1}\}\}.$$

Fatte queste considerazioni, dimostriamo che

$$(6) \qquad d_2(G_h) = 5h ,$$

$$(7) \qquad \gamma_2(G_h) = 6h ,$$

$$(8) \qquad \Delta_2(G_h) = h .$$

Essendo $\Delta_2(G_h) = \gamma_2(G_h) - d_2(G_h)$, basterà provare la (6) e la (7).

Consideriamo il grafo $\overline{G_h^2}$ ed osserviamo che se u, v sono due vertici non adiacenti in $\overline{G_h^2}$ allora si ha $d(u, v) \leq 2$ in G_h. Dunque se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_h\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_h\} \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$, si ha $A \subseteq V(G_h)$ e diam $A \leq 2$ in G_h. Proviamo che $|A| = d_2$. Infatti se $B \subseteq V(G_h)$ è tale che $\operatorname{diam} B \leqslant 2$ (s'intende in G_h), allora necessariamente si ha

$$\forall i \in N_h \quad |B \cap V(W_i)| \leqslant 2\,, \qquad \text{da cui} \qquad |\bigcup_{i=1}^{h} B \cap V(W_i)| \leqslant 2h\,,$$

e quindi essendo

$$V(G_h) - \bigcup_{i=1}^{h} V(W_i) = A_1 \cup A_2 \cup A_3\,, \qquad |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3h\,,$$

si ha $|B| \leqslant 5h$. Dunque $d_2(G_h) = 5h$.

Dimostriamo, adesso, la (7). Osserviamo che se K è una L_2-colorazione di G_h dev'essere

(I) $\quad |K(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3|,$

(II) $\quad K(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap \bigcup_{i=1}^{h} K(V(W_i)) = \emptyset,$

(III) $\quad K(V(W_i)) \cap K(V(W_j)) = \emptyset,\ \forall i, j \in N_h,\ i \neq j,$

(IV) $\quad |K(V(W_i))| \geqslant 3 \quad \forall i \in N_h.$

Dalle (I), ..., (IV), essendo $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3h$, si ha $|K(V(G_h))| \geqslant 6h$. Poichè l'applicazione $K\colon V(G_h) \to C$ (insieme di colori) tale che

$$K(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3h}\}\,, \qquad K(x_i) = K(a_{5,i-1}) = \beta_i\,,$$

$$K(y_i) = K(a_{5,\,i-1}) = \gamma_i\,, \ \forall i \in N_h\ (^2)\,, \qquad K(z_i) = \mu_i\,,$$

è una colorazione L_2 di G_h mediante $6h$ colori, si ha la (7).

Per completare la dimostrazione del teorema, bisogna esaminare i casi in cui è $h = 1$ o $h = 2$. In [**6**]$_1$ ed in [**6**]$_2$ abbiamo spesso riportato grafi G tali che $\Delta_2(G) = 1$ o $\Delta_2(G) = 2$. Vogliamo qui considerare i grafi G_1 e G_2 tali che

(I) $G_1 \simeq C_7$ (ciclo di 7 vertici),

(II) $V(G_2) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{11}\}$, $S(G_2) = \big\{\{x_i, x_{i+1}\}$ per $i = 1, 2, \ldots, 9$, $\{x_1, x_{10}\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_9\}$, $\{x_3, x_8\}$, $\{x_6, x_{11}\}$, $\{x_{10}, x_{11}\}\big\}$.

Per quanto provato in [**6**]$_2$, si ha $\Delta_2(G_1) = 1$, $\Delta_2(G_2) = 2$, inoltre per ogni grafo $G = (V, S)$ tale che $|V(G)| < |V(G_i)|$, $i = 1, 2$, si ha $\Delta_2(G) < \Delta_2(G_i)$ (cfr. [**6**]$_2$, n. 5).

Dal Teor. 2.1 si ha che

$$\sup \Delta_2(G) = +\infty . \tag{9}$$

3 – In questo numero esponiamo alcuni problemi, ancora aperti, relativi a grafi L_s-colorabili.

(1) In **[10]**$_2$ F. Speranza aveva segnalato il problema dello studio del numero s-cromatico d'un grafo planare (o, più in generale, tracciabile su una assegnata superficie). A questo proposito, in **[6]**$_1$ avevamo provato che

$$\forall h \in \boldsymbol{N}, \ \forall s \geqslant 3, \quad \exists G \text{ planare} \quad \gamma_s = d_s + \left[\frac{[(s-1)/2]^* \cdot (h+1)}{2}\right]^*, \tag{10}$$

dalla quale, posto $\Delta_s = \gamma_s - d_s$, si ha che

$$\forall s \geqslant 3 , \quad \sup \Delta_s(G) = +\infty , \qquad G \text{ planare} . \tag{11}$$

In **[6]**$_1$ avevamo anche fornito l'esistenza di grafi G planari tali che $\Delta_2(G) = 0$, $\Delta_2(G) = 1$, $\Delta_2(G) = 2$, ed avevamo inoltre segnalato la difficoltà di trovare grafi, planari o no, tali che $\Delta_2(G) > 2$. La successione di grafi $\{G_h\}_{h \in \boldsymbol{N}}$, considerata nel Teor. 2.1, è costituita da grafi che per $h \geqslant 3$ sono non planari e tali che $\Delta_2(G_h) = h$, $\forall h \in \boldsymbol{N}$. Rimane, dunque, aperto il problema seguente: « *Determinare il* sup $\Delta_2(G)$, *per* G *planare*; *in particolare determinare, se esiste, per ogni* $h \geqslant 3$ *almeno un grafo planare tale che* $\Delta_2(G) = h$ ».

(2) Un altro problema che riteniamo interessante e che affronteremo in seguito è quello della *determinazione, per ogni* $(s, h) \in \boldsymbol{N}^2$, *dei parametri* $v_s(h)$, $\delta_s(h)$, $m_s(h)$, *così definiti*:

$$v_s(h) = \min \{v \in \boldsymbol{N} \colon \forall G = (V, S) \text{ tale che } |V(G)| < v \text{ si abbia } \Delta_s(G) < h\} ,$$

$$\delta_s(h) = \min \{v \in \boldsymbol{N} \colon \forall G = (V, S) \text{ tale che } |V(G)| - d_s(G) < v \text{ si abbia } \Delta_s(G) < h\},$$

$$m_s(h) = \min \{v \in \boldsymbol{N} \colon \forall G = (V, S) \text{ tale che } |S(G)| < v \text{ si abbia } \Delta_s(G) < h\} .$$

Osserviamo che, per il teor. 3.1 di **[6]**$_1$ ed il Teor. 2.1, tali parametri esistono per ogni $(s, h) \in \boldsymbol{N}^2$. Più esattamente si ha $\forall s \geqslant 3$, $\forall h \in \boldsymbol{N}$, s dispari $v_s(h) \leqslant (h+1)\big((3s+1)/2\big)$, $\delta_s(h) \leqslant (h+1)s$, $m_s(h) \leqslant h(3s+1)$; s pari $v_s(h) \leqslant (h+1)(3s/2) + 2h$, $\delta_s(h) \leqslant (h+1)s + h$, $m_s(h) \leqslant h(3s+4) - 2$.

In particolare, per alcuni risultati ottenuti in **[6]**$_1$ ed in **[6]**$_2$ e per il Teor. 2.1, si ha $v_2(1) = 7$, $\delta_2(1) = 3$, $m_2(1) = 7$, $v_2(2) = 11$, $\delta_2(2) = 6$, $m_2(2) \leqslant 15$, $v_2(h) \leqslant 8h$, $\delta_2(h) \leqslant 3h$, $m_2(h) \leqslant 13h^2$, $\forall h \geqslant 3$.

(3) Siano $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 0$, $s \geqslant 1$. Se esiste un grafo G ed una sua L_s-colorazione tali che $\gamma_s(G) = a$, $d_s(G) = b$, $\max |\Gamma_{G^s}(x)| = c$, $x \in V(G)$ (3), diremo che (a, b, c) è una L_s-*terna* che indicheremo con $T(G, L_s) = (a, b, c)$.

Se $v(a, b, c) = \min \{v \in \boldsymbol{N}: \exists T(G, L_s) = (a, b, c) \text{ con } |V(G)| = v\}$, si pone il problema di *trovare per quali terne* (a, b, c) *esiste* $v(a, b, c)$ *e, in tali casi, di determinarne il valore.*

Osserviamo che problemi analoghi, ma solo per $s = 1$, sono stati affrontati in [6]. In tale lavoro, l'autore propone inoltre due congetture relative ai parametri a, b, c, $v(a, b, c)$.

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[2] C. BERGE: $[\cdot]_1$ *Problèmes de coloration en théorie des graphes*, Publ. Inst. Stat. Univ. de Paris **9** (1960), 123-160; $[\cdot]_2$ *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] G. CHARTRAND, D. P. GELLER and S. HEDETNIEMI, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **64** (1968), 265-271.

[4] G. CHARTRAND and D. P. GELLER, *On uniquely colorable planar graphs*, J. Comb. Theory **6** (1969), 271-278.

[5] P. CHINN and J. M. BENEDICT, *On graphs having prescribed clique number, chromatic number, and maximum degree*, Lecture Notes in Mathematics 642 (« Theory and Applications of Graphs », Y. Alavi, D. R. Lick eds.), Springer-Verlag, New York 1978.

[6] M. GIONFRIDDO: $[\cdot]_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454; $[\cdot]_2$ *Su un problema relativo alle colorazioni L_2 d'un grafo planare e colorazioni L_s*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 151-160; $[\cdot]_3$ *Alcuni risultati relativi alle colorazioni L_s d'un grafo*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 125-133; $[\cdot]_4$ *Automorfismi colorati e colorazioni $L(r, s)$ in un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17** B(1980), 1338-1349.

[7] F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[8] S. HEDETNIEMI, *Disconnected colorings of graphs*, Combinatorial Structures, Gordon & Breach eds., New York 1970.

---

(3) $\Gamma_{G^s}(x) = \{v \in V: \{x, v\} \in S(G^s)\} = \{v \in V: 0 < d(x, v) \leqslant s \text{ in } G\}$ per $x \in V$.

[9] O. ORE, *The four color-problem*, Acad. Press, New York-London 1967.

[10] F. SPERANZA: $[\cdot]_1$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; $[\cdot]_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** (1975), 53-62; $[\cdot]_3$ *Sur les colorations des graphes orientés*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-A (1979), 517-522.

Summary

We present a result concerning the s-chromatic number (see [**10**]$_2$) *of a graph. In particular, we show that for every positive integer h there exists a graph* G_h *such that* $\Delta_2(G_h) = h$, *where* $\Delta_s(G_h)$ *is the difference between the s-chromatic number of* G_h *and the clique number of* G_h^s. *Finally, we state some problems concerning* L_s*-colourable graphs.*

* * *