Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 351-359

DOMENICO LENZI (*)

Sulle funzioni finitamente additive in un'algebra booleana (**)

1 - Introduzione

Nel capitolo 7 del suo libro [1] B. de Finetti studia l'insieme di tutte le « distribuzioni » in un fissato insieme C, ossia l'insieme di tutte le funzioni reali positive μ finitamente additive nell'algebra $\mathscr{A}$ di tutte le parti di C. Egli analizza in particolare due tipi estremi di distribuzioni:

(a) le distribuzioni « continue »: sono quelle per le quali ogni elemento A di $\mathscr{A}$ si possa decomporre nell'unione di due elementi disgiunti, sui quali μ assuma valori arbitrariamente vicini a $\frac{1}{2}\mu(A)$;

(b) le distribuzioni « a due valori »: se, per ogni ultrafiltro x dell'algebra $\mathscr{A}$, si denota con δ_x la funzione così definita in $\mathscr{A}$

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in x \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{1.1}$$

la più generale distribuzione « a due valori » è della forma $c \cdot \delta_x$, con c numero reale maggiore di zero. Una siffatta distribuzione è detta da de Finetti « concentrata » quando l'ultrafiltro x sia principale (cioè costituito da tutti gli elementi di $\mathscr{A}$ contenenti un fissato punto di C); « agglutinata » nell'altro caso.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italy.
(**) Ricevuto: 28-IV-1980.

de Finetti dimostra poi che la più generale distribuzione μ ammette una decomposizione del tipo

$$\mu = \mu_0 + \sum_{x \in D} c_x \cdot \delta_x \,, \tag{1.2}$$

dove μ_0 è una distribuzione continua, D è un insieme al più numerabile di ultrafiltri di $\mathscr{A}$ e c_x è, per ogni elemento x di D, un numero reale maggiore di zero.

Il concetto di distribuzione continua era già stato introdotto (in forma diversa, ma equivalente) da A. Sobczyk e P. C. Hammer (vedi [**5**]), i quali avevano anche dimostrato l'esistenza ed unicità della decomposizione (1.2).

Su questi argomenti è tornato recentemente R. Scozzafava (vedi [**3**]), il quale, oltre alla decomposizione (1.2), ha dimostrato il seguente risultato: se μ è una distribuzione continua, l'insieme dei suoi valori è un intervallo della retta reale; inoltre, per ogni α interno a questo intervallo, esiste una successione (F_k) di elementi di $\mathscr{A}$, a due a due disgiunti, tale che si abbia $\mu(F_k) > 0$ per ogni k, $\alpha = \mu(\bigcup_k F_k) = \sum_k \mu(F_k)$.

È d'altra parte ben noto che, se si denota con X lo spazio di Stone associato ad una qualsiasi algebra booleana $\mathscr{A}$, una funzione μ finitamente additiva in $\mathscr{A}$ può essere identificata con una misura di Borel regolare ν sullo spazio X.

È dunque naturale domandarsi in qual modo le precedenti nozioni riguardanti una funzione additiva μ si traducano in proprietà della misura di Borel ν ad essa associata. Risponderemo a questa domanda mostrando che:

(a) μ è «a due valori» se e solo se la misura ν è concentrata in un punto;

(b) μ è «continua» se e solo se la misura ν è diffusa (cioè nulla su ogni insieme costituito da un sol punto).

Questa duplice caratterizzazione ci permetterà, da un lato, di ottenere la decomposizione (1.2) come una semplice conseguenza della classica decomposizione di ν in «parte diffusa» e «parte atomica» (cfr. Coroll. 2.5), dall'altro, di ricondurre i risultati di Scozzafava riguardanti il caso di una μ «continua» a risultati riguardanti una misura di Borel diffusa (cfr. Coroll. 2.6).

2 - Un teorema sulle funzioni finitamente additive in un'algebra booleana

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra booleana. Denoteremo con 0,1 gli elementi minimo e massimo di $\mathscr{A}$, con $\leqslant$ la relazione d'ordine e con V, Λ, $'$ le operazioni booleane di $\mathscr{A}$. Denoteremo inoltre con X l'insieme degli ultrafiltri di $\mathscr{A}$ e con h l'omomorfismo (iniettivo) di $\mathscr{A}$ nell'algebra delle parti di X definito da

$$h(A) = \{x \in X \colon A \in x\} . \tag{2.1}$$

Considereremo su X la topologia che ha come base la classe $\mathscr{F}$ costituita dagli insiemi della forma $h(A)$, con $A \in \mathscr{A}$. Munito di questa topologia, X è uno spazio separato e compatto («spazio di Stone» associato ad $\mathscr{A}$); inoltre la base $\mathscr{F}$ coincide con la classe degli insiemi simultaneamente aperti e chiusi in X (cfr. [**4**], § 8).

Chiameremo brevemente «funzione additiva» su $\mathscr{A}$ ogni funzione reale positiva in $\mathscr{A}$ e finitamente additiva. Se μ è una siffatta funzione, l'isomorfismo $A \mapsto h(A)$ dell'algebra $\mathscr{A}$ sull'algebra $\mathscr{F}$ permette di identificare μ con una funzione additiva su $\mathscr{F}$. Questa funzione, essendo numerabilmente additiva (in senso insiemistico, cfr. [**4**], pag. 203), può essere univocamente prolungata in una misura sulla tribù generata da $\mathscr{F}$ (tribù di Baire di X, cfr. [**2**]$_2$, § 22), e quindi in una misura di Borel regolare su X (cfr. [**2**]$_1$, § 54, Th. D). Pertanto, se ad ogni misura di Borel regolare ν su X si associa la funzione additiva μ così definita su $\mathscr{A}$

$$\mu(A) = \nu(h(A)) , \tag{2.2}$$

si ottiene un'applicazione biunivoca dell'insieme delle misure di Borel regolari su X nell'insieme delle funzioni additive su $\mathscr{A}$ ([1]). In particolare questa applicazione biunivoca trasforma, per ogni $x \in X$, la misura ε_x (misura di Borel su X definita da una massa unitaria concentrata in x) nella funzione additiva δ_x definita da (1.1) sull'algebra $\mathscr{A}$.

Inoltre è facile vedere che, se ν è una misura di Borel regolare su X e se μ è la corrispondente funzione additiva su $\mathscr{A}$ (definita da (2.2)) allora, per

---

([1]) A questa conclusione si può giungere anche nel modo seguente. Sullo spazio X le funzioni indicatrici degli insiemi della base $\mathscr{F}$ sono continue; anzi lo spazio vettoriale $\mathscr{R}$ da esse generato è denso, per il teor. di Stone-Weiestrass, nello spazio $\mathscr{K}(X)$ di tutte le funzioni reali continue su X (munito della topologia della convergenza uniforme). Assegnata una funzione additiva μ su $\mathscr{A}$, esiste una ed una sola forma lineare positiva J su $\mathscr{R}$, tale che sia $J(1_{h(A)}) = \mu(A)$ per ogni elemento $A \in \mathscr{A}$. Poichè J è univocamente prolungabile in una forma lineare positiva su $\mathscr{K}(X)$, esiste su X, per il teorema di Riesz-Markov, un'unica misura di Borel regolare ν, tale che si abbia $\int f \, d\nu = J(f)$ per ogni elemento f di $\mathscr{R}$ (o, ciò è lo stesso, $\nu(hA) = \mu(A)$ per ogni elemento A di $\mathscr{A}$).

ogni $x \in X$, risulta

$$(2.3) \qquad \nu(\{x\}) = \inf\{\mu(A)\colon A \in x\}\,.$$

Basta per questo osservare che $\nu(\{x\})$ coincide, in virtù della regolarità di ν, con l'estremo inferiore dei valori di ν sugli insiemi aperti della base $\mathscr{F}$ contenenti $\{x\}$ sicchè risulta (tenendo conto di (2.2), (2.1))

$$\begin{aligned}\nu(\{x\}) = \inf\{\nu(U)\colon U \in \mathscr{F},\ x \in U\} &= \inf\{\nu(h(A))\colon A \in \mathscr{A},\ x \in h(A)\} \\ &= \inf\{\mu(A)\colon A \in x\}\,.\end{aligned}$$

Se μ è una funzione additiva su $\mathscr{A}$ e se A_1, A_2 sono due fissati elementi di $\mathscr{A}$, con $A_1 < A_2$ e $\mu(A_1) < (A_2)$, si possono considerare, per ogni elemento A di $\mathscr{A}$ compreso tra A_1 e A_2, i due rapporti $|\mu(A) - \mu(A_i)|/(\mu(A_2) - \mu(A_1))$ $(i = 1, 2)$. La somma di questi due rapporti è eguale ad 1, sicchè, detto $r(A)$ il più grande di essi, risulta $r(A) \geqslant \frac{1}{2}$. L'estremo inferiore dei numeri $r(A)$ (al variare di A nell'insieme degli elementi di $\mathscr{A}$ compresi tra A_1 e A_2) sarà denotato con $\varrho(\mu, A_1, A_2)$. Si osservi che è $\varrho(\mu, A_1, A_2) = \varrho(\mu, 0, A_2 \wedge A_1')$. Diremo che μ è « continua nel senso di de Finetti » se ciascuno dei coefficienti $\varrho(\mu, A_1, A_2)$ è eguale a $\frac{1}{2}$. È facile vedere che, affinchè ciò avvenga, occorre e basta che la misura di Borel sia diffusa. Più precisamente

Teorema 2.4. *Sia μ una funzione additiva sull'algebra booleana $\mathscr{A}$, e sia ν la misura di Borel regolare, sullo spazio di Stone X, caratterizzata dalla relazione* (2.2). *Le condizioni che seguono sono equivalenti*:

(a) *la misura ν è diffusa (cioè la quantità* (2.3) *è nulla per ogni $x \in X$)*;

(b) *per ogni coppia A_1, A_2 di elementi di $\mathscr{A}$, con $A_1 \leqslant A_2$, l'insieme $\{\mu(A)\colon A \in \mathscr{A},\ A_1 \leqslant A \leqslant A_2\}$ è denso nell'intervallo* $[\mu(A_1), \mu(A_2)]$;

(c) *μ è continua nel senso di de Finetti*;

(d) *esiste un numero c, minore di* 1, *tale che tutti i coefficienti $\varrho(\mu, A_1, A_2)$ siano minori di c*;

(e) *esiste in $\mathscr{A}$ una catena $\mathscr{C}$ tale che l'insieme $\mu(\mathscr{C})$ sia denso nell'intervallo* $[0, \mu(1)]$.

Non dimostriamo, per ora, il teorema sopra enunciato, perchè preferiamo dedurlo da un teorema più generale, riguardante le misure di Borel diffuse, che dimostreremo nel prossimo paragrafo. Osserviamo però sin d'ora che il Teorema 2.4 ammette il seguente

Corollario 2.5. *Ogni funzione additiva μ sull'algebra booleana $\mathscr{A}$ ammette una decomposizione unica nella somma di una funzione additiva μ_0, continua nel senso di de Finetti, e di un insieme numerabile di funzioni additive a due valori. Precisamente, se si denota con ν la misura di Borel regolare (sullo spazio di Stone X) caratterizzata dalla relazione (2.2), le componenti «a due valori» della decomposizione di μ sono le funzioni della forma $\nu(\{x\})\delta_x$, con x elemento di X tale che la quantità (2.3) sia diversa da zero.*

Dimostrazione. Si denoti con D l'insieme (numerabile) costituito dagli $x \in X$ tali che sia $\nu(\{x\}) > 0$. È ben noto che la misura ν ammette la decomposizione

$$\nu = \nu_0 + \sum_{x \in D} \nu(\{x\})\,\varepsilon_x\,,$$

dove ν_0 è una misura diffusa. Posto $\mu_0(A) = \nu_0(h(A))$, la funzione additiva μ_0 è, grazie al teorema precedente, continua nel senso di de Finetti, e si ha

$$\mu = \mu_0 + \sum_{x \in D} \nu(\{x\})\,\delta_x\,.$$

È questa la desiderata decomposizione di μ. La sua unicità discende poi dall'unicità della decomposizione di ν in «componente diffusa» e «componenti concentrate».

Osserviamo inoltre che, nel caso particolare in cui l'algebra $\mathscr{A}$ sia una σ-algebra, il Teorema 2.4 ammette il seguente corollario, il quale contiene il risultato di Scozzafava ricordato nell'introduzione.

Corollario 2.6. *Sia μ una funzione additiva sulla σ-algebra booleana $\mathscr{A}$. Se μ è continua secondo de Finetti, allora esiste in $\mathscr{A}$ una catena $\mathscr{D}$ tale che l'insieme $\mu(\mathscr{D})$ coincida con l'intero intervallo $[0, \mu(1)]$. Più precisamente, se $\mathscr{C}$ è una catena in $\mathscr{A}$ tale che l'insieme $\mu(\mathscr{C})$ sia denso in $[0, \mu(1)]$, allora:*

(1) *per ogni successione (A_n) di elementi di $\mathscr{C}$, risulta $\mu(\bigvee_n A_n) = \sup_n \mu(A_n)$;*

(2) *l'insieme $\mathscr{D}$ costituito dall'elemento minimo di $\mathscr{A}$ e dalle unioni, calcolate in $\mathscr{A}$, di successioni (A_n) di elementi di $\mathscr{C}$ è (grazie a semplici proprietà riguardanti gli insiemi ordinati) una catena in $\mathscr{A}$ ed inoltre $\mu(\mathscr{D}) = [0, \mu(1)]$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la (1). Data la successione (A_n) di elementi di $\mathscr{C}$ e posto $A = \bigvee_n A_n$, si supponga, per assurdo, che risulti $\sup_n \mu(A_n) < \mu(A)$. Esiste allora (grazie al fatto che $\mu(\mathscr{C})$ è denso in $[0, \mu(1)]$) un elemento B di $\mathscr{C}$ tale che $\sup_n \mu(A_n) < \mu(B) < \mu(A)$.

Poichè $\mathscr{C}$ è una catena, B contiene ciascun A_n in virtù del fatto che $\mu(A_n) < \mu(B)$. Ma allora B contiene A, e ciò contrasta con la diseguaglianza $\mu(B) < \mu(A)$. Si ha dunque necessariamente $\sup_n \mu(A_n) = \mu(A)$.

3 - Una caratterizzazione delle misure di Borel diffuse

Ci proponiamo ora di giungere ad un teorema, caratterizzante le misure di Borel diffuse, il quale contenga come caso particolare il Teorema 2.4 Basterebbe per questo limitarsi al caso delle misure di Borel su uno spazio compatto e separato (tale essendo lo spazio di Stone). Tuttavia, poichè con egual fatica si tratta il caso delle misure di Borel su un arbitrario spazio separato, preferiamo metterci in questo caso più generale. Cominciamo col richiamare alcune definizioni.

Se X è uno spazio topologico separato, si chiama *misura di Borel regolare* su X (positiva e finita) ogni funzione reale positiva ν definita nella tribù boreliana $\mathscr{B}(X)$, numerabilmente additiva e tale che:

(1) per ogni insieme boreliano B, $\nu(B)$ sia eguale all'estremo superiore dei valori assunti da ν sugli insiemi chiusi contenuti in B;

(2) per ogni sistema filtrante decrescente (F_i) d'insiemi chiusi, si abbia

$$\nu\left(\bigcap_i F_i\right) = \inf_i \nu(F_i).$$

N.B. Poichè il complementare di un insieme boreliano è boreliano ed inoltre il complementare di un insieme chiuso è un insieme aperto, sussisteranno allora le condizioni duali delle (1) e (2).

Se ν è una misura di Borel regolare su X, si chiama *supporto* di ν il più piccolo insieme chiuso avente complementare trascurabile secondo ν. Ed ecco l'annunciata caratterizzazione delle misure diffuse.

Teorema 3.1. *Siano X uno spazio separato, $\mathscr{U}$ una base per la topologia di X, contenente $\{\emptyset, X\}$ e stabile per l'unione finita, ν una misura di Borel regolare su X, μ la restrizione di ν ad $\mathscr{U}$.*

Per ogni coppia U_1, U_2 di elementi di $\mathscr{U}$, con $U_1 \subset U_2$ e $\mu(U_1) < \mu(U_2)$, si ponga

$$\varrho(\mu, U_1, U_2) = \inf\{\max_{i=1,2} |\mu(U) - \mu(U_i)|/(\mu(U_2) - \mu(U_1)) \colon U \in \mathscr{U},\ U_1 \subset U \subset U_2\}.$$

Le condizioni che seguono sono allora equivalenti:

(a) *la misura ν è diffusa;*

(b) *la misura ν è priva di atomi;*

(c) *per ogni coppia B_1, B_2 di insiemi boreliani, con $B_1 \subset B_2$, si ha*

$$\{\nu(B): B \in \mathscr{B}(X),\ B_1 \subset B \subset B_2\} = [\nu(B_1), \nu(B_2)];$$

(d) *per ogni coppia U_1, U_2 di elementi di $\mathscr{U}$, con $U_1 \subset U_2$, l'insieme $\{\mu(U): U \in \mathscr{U},\ U_1 \subset U \subset U_2\}$ è denso nell'intervallo $[\mu(U_1), \mu(U_2)]$;*

(e) *i coefficienti $\varrho(\mu, U_1, U_2)$ sono tutti eguali a $\frac{1}{2}$;*

(f) *esiste un numero c, minore di 1, tale che tutti i coefficienti $\varrho(\mu, U_1, U_2)$ siano minori di c;*

(g) *esiste una catena $\mathscr{C}$ di elementi di $\mathscr{U}$, tale che l'insieme $\mu(\mathscr{U})$ sia denso nell'intervallo $[0, \mu(X)]$;*

(h) *esiste una catena $\mathscr{D}$ di insiemi aperti, tale che si abbia $\nu(\mathscr{D}) = [0, \mu(X)]$;*

(i) *esiste una catena $\mathscr{D}$ di insiemi boreliani, tale che l'insieme $\nu(\mathscr{D})$ sia denso nell'intervallo $[0, \mu(X)]$.*

Dimostrazione. $(a) \Rightarrow$ (b): supposto che ν sia diffusa, consideriamo un insieme boreliano F, con $\nu(F) > 0$, e mostriamo che F non è un atomo per ν. Possiamo facilmente ricondurci al caso in cui F sia chiuso. In tal caso la restrizione di ν a $\mathscr{B}(F)$ è una misura di Borel regolare su F, diffusa e non identicamente nulla. Siano x, y due punti distinti del suo supporto e siano G, H due insiemi aperti di F, disgiunti e contenenti rispettivamente x, y. Allora G, H sono due insiemi boreliani di X contenuti in F, disgiunti e non trascurabili secondo ν. Dunque F non è un atomo per ν.

(b) $\Rightarrow$ (c): questa implicazione è ben nota (cfr. [**2**]$_1$, § 41, eserc. (3)).

(c) $\Rightarrow$ (d): supposta soddisfatta la condizione (c), siano U_1, U_2 due elementi di $\mathscr{U}$, con $U_1 \subset U_2$, e sia c un numero compreso tra $\mu(U_1)$ e $\mu(U_2)$. Per l'ipotesi (c), esiste un insieme boreliano B, compreso tra U_1 e U_2, tale che sia $c = \nu(B)$. Fissato $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un insieme aperto G tale che si abbia $B \subset G \subset U_2$, $\nu(G) - \nu(B) < \varepsilon/2$. D'altra parte, poichè l'insieme G è l'unione del sistema filtrante crescente costituito dagli elementi di $\mathscr{U}$ in esso contenuti, esiste uno di questi elementi, diciamolo U, tale che sia $\nu(G) - \nu(U) < \varepsilon/2$. Si può naturalmente supporre che U contenga U_1. Si ha allora $U_1 \subset U \subset U_2$, $|\mu(U) - c| \leqslant |\mu(U) - \nu(G)| + |\nu(G) - \nu(B)| < \varepsilon$, e ciò prova che è soddisfatta la condizione (d).

(d) $\Rightarrow$ (e): assegnati gli elementi U_1, U_2 di $\mathscr{U}$, con $U_1 \subset U_2$, $\mu(U_1) < \mu(U_2)$, la condizione (d) implica che l'insieme $H = \{[\mu(U) - \mu(U_1)]/[\mu(U_2) - \mu(U_1)]: U \in \mathscr{U},\ U_1 \subset U \subset U_2\}$ è denso in $[0, 1]$, sicchè risulta

$$\varrho(\mu, U_1, U_2) = \inf\big(H \cap [\tfrac{1}{2}, 1]\big) = \tfrac{1}{2}\,.$$

(e) $\Rightarrow$ (f): implicazione evidente.

(f) $\Rightarrow$ (g): possiamo naturalmente supporre $\mu(X) = 1$. Sfruttando l'ipotesi (f) è possibile costruire (per induzione) una successione crescente $(\mathscr{C}_n)_{n\geqslant 0}$ di parti di $\mathscr{U}$, con $C_0 = \{\emptyset, X\}$ e tale che, per ogni $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}_n$ sia una catena costituita da $2^n + 1$ elementi ed ottenuta, intercalando, tra ogni coppia U_1, U_2 di elementi consecutivi di $\mathscr{C}_{n-1}$, un elemento U di $\mathscr{U}$ verificante le relazioni:

$$U_1 \subset U \subset U_2\,, \qquad |\mu(U) - \mu(U_i)| < c[\mu(U_2) - \mu(U_1)] \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Per ogni n, i punti dell'insieme $\mu(\mathscr{C}_n)$ dividono allora l'intervallo $[0, 1]$ in 2^n intervalli di lunghezza non superiore a c^n. Posto dunque $\mathscr{C} = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}$ è una catena di elementi di $\mathscr{U}$, e l'insieme $\mu(\mathscr{C})$ è denso in $[0, 1]$.

(g) $\Rightarrow$ (h): basta applicare il Corollario (2.6) in quella parte che non dipende dall'ancora non dimostrato Teorema 2.4.

(h) $\Rightarrow$ (i): implicazione evidente.

(i) $\Rightarrow$ (a): sia $\mathscr{D}$ una catena di insiemi boreliani, tale che l'insieme $\nu(\mathscr{D})$ sia denso in $[0, \mu(X)]$. Fissato un punto $x \in X$, denotiamo con $\mathscr{D}_1$ (risp. $\mathscr{D}_2$) l'insieme costituito dagli elementi di $\mathscr{D}$ che non contengono $\{x\}$ (risp. che contengono $\{x\}$). Evidentemente ogni elemento di $\mathscr{D}_1$ è contenuto in ogni elemento di $\mathscr{D}_2$, sicchè risulta $\sup \nu(\mathscr{D}_1) \leqslant \inf \nu(\mathscr{D}_2)$. Per l'ipotesi di densità si ha poi necessariamente l'eguaglianza. D'altra parte, per ogni elemento B_1 di $\mathscr{D}_1$ e per ogni elemento B_2 di $\mathscr{D}_2$, risulta $\nu(\{x\}) \leqslant \nu(B_2) - \nu(B_1)$. Ne segue $\nu(\{x\}) = 0$.

Il teorema è così completamente provato.

È chiaro che il Teorema 2.4 si può vedere come un caso particolare del teorema ora dimostrato, purchè si prenda X coincidente con lo spazio di Stone di $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{U}$ con la base data dall'immagine isomorfa di $\mathscr{A}$ tramite la (2.1).

Bibliografia

[1] B. DE FINETTI, *Probability, induction and statistic*, J. Wiley 1972.

[2] P. R. HALMOS: $[\cdot]_1$ *Measure theory*, Van Nostrand 1950; $[\cdot]_2$ *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand 1963.

[3] R. SCOZZAFAVA, *Alcune osservazioni sulle misure di probabilità semplicemente additive*, Rapporti dell'Ist. di Mat. dell'Univ. di Lecce 1977.

[4] R. SIKORSKI, *Boolean algebras* (III Ed.) Springer-Verlag 1969.

[5] A. SOBCZYK and P. C. HAMMER, *A decomposition of additive set function*, Duke Math. J. **11** (1944), 847-851.

Summary

In this paper we characterize some properties of a positive, finite and finitely additive measure μ on a boolean algebra $\mathscr{A}$ in terms of the related Borel measure ν on the Stone's space of $\mathscr{A}$. As a consequence we can obtain from classical properties of Borel measures some results of de Finetti (see [**1**], chap. 7) *and Scozzafava* (see [**3**]).

* * *