Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 347-350

GISÈLE FISCHER SERVI (*)

Teoremi di completezza per calcoli bimodali (**)

Lo scopo di questo lavoro è di dimostrare dei teoremi di completezza per la classe dei calcoli bimodali (S4, *)-C (cfr. [**2**]), dove * sta per uno dei seguenti calcoli: T(C), T(D), T, S4, S4.1, S4.2. Questi risultati sono stati già ottenuti dall'autore (cfr. [**2**]) con l'ausilio di strumenti algebrici e topologici. La presente dimostrazione ha il vantaggio di non utilizzare nè la dualità di Halmos nè le proprietà topologiche dello spazio di Stone; essa sfrutta, invece, la sola struttura sintattica dei calcoli considerati, basandosi sul concetto di « modello (di Kripke) canonico ».

Poichè i metodi usati per (S4, *)-C sono indipendenti dal calcolo * considerato, le singole dimostrazioni di completezza possono essere riassunte in un unico schema. Consideriamo dunque un generico (S4, *)-C definito, nel linguaggio $(\neg, \vee, L_1, L_2)$, dai seguenti schemi di assiomi e regole di inferenza:

(a) schemi di assiomi e regole del calcolo proposizionale classico,
(b) schemi di assiomi e regole di S4 su L_1,
(c) schemi di assiomi e regole di * su L_2,
(d) i seguenti « assiomi di connessione »

(1) $$M_2 M_1 \alpha \to M_1 M_2 \alpha\,,$$ (2) $$M_2 L_1 \alpha \to L_1 M_2 \alpha\,,$$

con $M_i \alpha = \neg L_i \neg \alpha \quad (i = 1, 2)$.

Per rendere più agevole la lettura del presente lavoro ricordiamo inoltre che una *-d.m.s. (double model-structure) è una terna $\mathscr{M} = (S; R_1, R_2)$ con

(*) Indirizzo: Istituto di Filosofia, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R). — Ricevuto: 18-IV-1980.

$S \neq \emptyset$ ed R_1, R_2 due relazioni in S tali che:

(3) R_1 è riflessiva e transitiva,

(4) R_2 ha le proprietà caratteristiche per la completezza del calcolo *,

(5) per ogni $m, n, p \in S$, se mR_2nR_1p allora esiste un $u \in S$ tale che mR_1uR_2p,

(6) per ogni $m, n, p \in S$ con mR_2n e mR_1p esiste un $u \in S$ t.c. $n\,R_1u$ e pR_2u.

Un *modello bimodale* v su $\mathscr{M}$ è, come al solito, una funzione che associa ad ogni variabile proposizionale in ogni mondo, un valore di verità (0 oppure 1). La definizione della funzione v' che estende v a tutte le formule ben formate è derivabile in modo naturale dal caso monomodale (cfr. [2]) ed altrettanto va detto per le definizioni di *verità*, di *validità bimodale* in una *-d.m.s. e di (S4, *)-C *validità* per una formula. A questo punto possiamo dimostrare il seguente

Teorema 1. *Se* $\vdash_{(S4,*)\text{-}C} \alpha$ *allora* α *è* (S4, *)-C *valida.*

Dim. Sia $\mathscr{M} = (S; R_1, R_2)$ una *-d.m.s. È ovvio (cfr. [**3**]$_{1,2}$) che tutti gli assiomi contenuti nei punti (a), (b), (c) sono validi in $\mathscr{M}$ e che le regole di inferenza conservano la validità in $\mathscr{M}$; resta da dimostrare che anche (1) e (2) sono validi in $\mathscr{M}$. Sia v un modello bimodale su $\mathscr{M}$ e sia $v'(M_2L_1\alpha, m) = 1$. Allora esiste $n \in S$ tale che mR_2n e $v'(L_1\alpha, n) = 1$, cioè

(7) $$v'(\alpha, t) = 1\,, \qquad \text{per ogni } t \in S \text{ tale che } nR_1t\,.$$

Sia ora p un qualunque elemento di S tale che mR_1p. In virtù della (6) esiste $q \in S$ tale che nR_1q e pR_2q e quindi per la (7), $v'(\alpha, q) = 1$. Poichè pR_2q, si ha $v'(M_2\alpha, p) = 1$ e infine, p essendo qualunque, possiamo concludere $v'(L_1M_2\alpha, m) = 1$. La validità di (1) si dimostra in modo analogo sfruttando la (5).

Per ottenere la completezza, cominciamo con l'estendere al caso bimodale la nota costruzione del modello (di Kripke) canonico. Sia dunque

$$S = \{m\colon m \text{ è un insieme (S4, *)-C completo di formule}\}$$

e siano R_i $(i = 1, 2)$ così definite su S_i

$$mR_in \quad \text{se e solo se per ogni } \alpha\,, \qquad L_i\alpha \in m \quad \text{implica } \alpha \in n\,.$$

In altri termini, posto

$$I_i(m) = \{\alpha \colon L_i\alpha \in m\} \qquad \text{e} \qquad K_i(m) = \{M_i\alpha \colon \alpha \in m\}\ ,$$

si ha

(8) mR_in se e solo se $n \supseteq I_i(m)$ (9) mR_in se e solo se $m \supseteq K_i(n)$.

Poniamo $\mathscr{M}_c = (S; R_1, R_2)$. Con questa notazione si ha il seguente

Teorema 2. *$\mathscr{M}_c$ è una* *-d.m.s.

Dim. È noto che R_1 è una relazione riflessiva e transitiva ed R_2 una relazione di tipo *. Dimostriamo dunque che esse sono ben collegate, ossia che soddisfano (5) e (6). Siano allora $m, n, p \in S$ tali che mR_2nR_1p. Dalla definizione di R_i, si ha che per ogni α, se $\alpha \in n$ allora $M_2\,\alpha \in m$ e per ogni β, se $\beta \in p$ allora $M_1\beta \in n$. Ne consegue che per ogni $\beta \in p$, si ha $M_2M_1\beta \in m$. In virtù della (1), vale dunque la seguente

(10) $$\text{per ogni } \beta \in p\ , \qquad M_1M_2\beta \in m\ .$$

Consideriamo ora l'insieme $I_1(m) \cup K_2(p)$; se esso è coerente, esiste un insieme u di formule (S4, *)-C completo tale che $u \supseteq I_1(m) \cup K_2(p)$ e quindi, in virtù della (8) e della (9), mR_1uR_2p. Basta dunque dimostrare che $I_1(m) \cup K_2(p)$ è coerente. Supponiamo che non lo sia; allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I_1(m)$ e $\beta_1, \ldots, \beta_j \in p$ tali che

(11) $$\vdash_{(S4,*)\text{-C}} \neg\,(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge M_2\beta_1 \wedge \ldots \wedge M_2\beta_j)\ .$$

Ora, posto $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, si ha

(12) $$L_1\alpha \in m\ .$$

Basta osservare infatti che $L_1\alpha_1 \wedge \ldots \wedge L_1\alpha_k \in m$ perchè m è una teoria e che $\vdash_{(S4,*)\text{-C}} L_1\alpha_1 \wedge \ldots \wedge L_1\alpha_k \leftrightarrow L_1(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)$.

Dalla (11) possiamo inferire $\vdash_{(S4,*)\text{-C}} \alpha \to \neg\,(M_2\beta_1 \wedge \ldots \wedge M_2\beta_j)$. Essendo * un calcolo normale, ne segue $\vdash_{(S4,*)\text{-C}} \alpha \to \neg\, M_2(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j)$, da cui

$$\vdash_{(S4,*)\text{-C}} L_1\alpha \to L_1 \neg\, M_2(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j)\ .$$

Per la (12) si ha dunque $\neg\, M_1M_2(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j) \in m$; ma $(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j) \in p$, per cui la (10) viene contraddetta.

Sia ora mR_2n e mR_1p. Per garantire l'esistenza di un insieme $u \in S$ tale che nR_1u e pR_2u è sufficiente, in virtù della (8), provare che $I_1(n) \cup I_2(p)$ è coerente. Supponiamo dunque che non lo sia: allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I_1(n)$ e $\beta_1, \ldots, \beta_j \in I_2(p)$ tali che

$$\vdash_{\overline{(S4,*)\text{-C}}} \neg (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j) . \tag{13}$$

Posto $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ e $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_j$, si ha analogamente a quanto fatto sopra

$$L_1 \alpha \in n \quad \text{e} \quad L_2 \beta \in p . \tag{14}$$

Dalla (13) possiamo inferire $\vdash_{\overline{(S4,*)\text{-C}}} \alpha \to \neg \beta$, da cui segue $\vdash_{\overline{(S4,*)\text{-C}}} L_1\alpha \to L_1 \neg \beta$ la quale in virtù della (14) implica che $L_1 \neg \beta \in n$. Ma mR_2n, perciò $M_2L_1 \neg \beta \in m$ e in virtù della (2) si ha $L_1M_2 \neg \beta \in m$ ossia $\neg M_1L_2\beta \in m$. D'altra parte mR_1p, il che insieme alla (14) fornisce $M_1L_2\beta \in m$ da cui l'assurdo.

Ora sia v il modello bimodale su $\mathscr{M}_c$ definito da $v(a, m) = 1$ se e solo se $a \in m$. Esso verrà detto *modello canonico*. Come nel caso monomodale si ha

Lemma. *Sia v il modello canonico. Per ogni formula α e ogni $m \in S$, $v'(\alpha, m) = 1$ se e solo se $\alpha \in m$.*

Corollario. *Se non $\vdash_{\overline{(S4,*)\text{-C}}} \alpha$ allora esiste una* *-d.m.s. $\mathscr{M}$ *in cui α non è bimodalmente valida.*

Dim. Basta prendere il modello canonico e utilizzare le consuete tecniche.

Bibliografia

[1] M. G. Cresswell, *Frames and models in modal logic* in *Algebra and logic*, Dold and Eckmann, ed, Lecture notes, 450 Springer 1975.

[2] G. Fischer Servi, *Semantics for a class of intuitionistic modal calculi* in *Italian Studies in the Philosophy of Science*, Boston Studies, Reidel 1981.

[3] E. J. Lemmon: $[\cdot]_1$ *Algebraic semantics for modal logic* (I), Journal of Symbolic Logic **31** (1966), 46-65; $[\cdot]_2$ *Algebraic semantics for modal logic* (II), Journal of Symbolic Logic **31** (1966), 191-210.

Riassunto

A syntactical proof of completeness for «bimodal calculi» (S4, *)-C (*where* * *stands for a given classical modal calculus*) *is given.*

* * *