

M. BOZZINI e L. LENARDUZZI (*)

**Formula a un passo
basata sui polinomi di ottima approssimazione
secondo Sard (**)**

1 - Introduzione

Consideriamo il problema alle condizioni iniziali ⁽¹⁾

$$y' = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0), \quad x \in [x_0, x_N],$$

con $f(x, y) \in C^m[x_0, x_N]$ e $f^{(m)}(x, y)$ lipschitziana rispetto a y .

Nella recente letteratura si nota una sempre maggiore tendenza a risolvere questo problema non solo fornendo una tabulazione dell'integrale particolare cercato, ma addirittura una sua approssimazione su tutto l'intervallo di integrazione [3], [2], [4].

Lo scopo che generalmente si vuole raggiungere è quello di fornire una soluzione approssimata che sia facilmente computabile e nel contempo di tipo smooth, poichè tale è in generale la soluzione nei casi che maggiormente si presentano nella pratica comune.

In questa nota presenteremo un metodo nel quale l'intervallo di integrazione $[x_0, x_N]$ viene, a partire da x_0 , progressivamente suddiviso in un certo

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via Cicognara 7, 20129 Milano, Italy.

(**) M. Bozzini ha eseguito il lavoro nell'ambito del G.N.I.M. (C.N.R.).

Ricevuto: 21-XI-1979.

⁽¹⁾ Qui di seguito considereremo per semplicità il caso scalare, benchè il metodo qui presentato possa essere applicato anche nel caso di un sistema.

numero di intervalli parziali $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) di ampiezza arbitraria, su ciascuno dei quali la soluzione cercata è approssimata mediante una funzione del tipo

$$(1) \quad Y(x) = w_1(x)P_1(x) + w_2(x)P_2(x),$$

dove $w_1(x)$ e $w_2(x)$ sono polinomi che fungono da funzione peso; $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi di ottima approssimazione secondo Sard, costruiti per interpolazione.

Le funzioni peso e i polinomi P_1 e P_2 dovranno poi essere tali da ottenere il grado di smoothness desiderato.

Abbiamo rivolto la nostra attenzione a una approssimazione di tipo polinomiale perchè in alcuni problemi (quali ad esempio quelli riferentesi alle equazioni di evoluzione) è questo il tipo di approssimazione che in generale meglio risponde alle comuni esigenze; inoltre sono ben noti i vantaggi che essi offrono da un punto di vista computazionale.

Osserviamo inoltre che questo metodo può offrire una alternativa a quelli basati su g -splines [2], [1], e potrebbe essere usato come algoritmo per la costruzione di sottoprogrammi destinati a minicalcolatori per la soluzione di equazioni di tipo stiff.

2 - Costruzione delle funzioni peso

Supponiamo che per la costruzione del polinomio interpolante $P_1(x)$ vengano usate p_1 condizioni di interpolazione in x_i e q_1 in x_{i+1} , mentre se ne utilizzano rispettivamente p_2 in x_i e q_2 in x_{i+1} per il polinomio $P_2(x)$ (con le ovvie condizioni $p_1 > q_1$ e $p_2 < q_2$).

Poniamo $R = \min(p_1, q_2)$, $S = \min(p_2, q_1)$. I polinomi peso $w_1(x)$ e $w_2(x)$ saranno scelti in modo da soddisfare le seguenti condizioni

$$w_1(x) + w_2(x) = 1, \quad w_1(x_i) = 1, \quad w_1(x_{i+1}) = 0,$$

$$w_j^{(k)}(x_i) = w_j^{(k)}(x_{i+1}) = 0 \quad (j = 1, 2; k = 1, \dots, (R-S)-1).$$

Essi risultano così di grado $2(R-S)-1$ e la soluzione approssimante di classe C^{R-1} su tutto l'intervallo di integrazione.

Infatti

$$Y^{(v)}(x_j) = w_1(x_j)P_1^{(v)}(x_j) + w_2(x_j)P_2^{(v)}(x_j) + \sum_0^{l-1} \binom{l}{r} \{w_1^{(l-r)}(x_j)P_1^{(r)}(x_j) + w_2^{(l-r)}(x_j)P_2^{(r)}(x_j)\} \quad (j = i, i+1).$$

Se $l \leq S-1$ allora, per le condizioni di interpolazione si ha $P_1^{(r)}(x_j) = P_2^{(r)}(x_j)$ ($r = 0, \dots, l; j = i, i+1$); quindi $Y^{(l)}(x_j) = P_1^{(l)}(x_j)$.

Se $S \leq l \leq R-1$, allora

$$\begin{aligned} Y^{(l)}(x_j) &= w_2(x_j) P_1^{(l)}(x_j) + (1 - w_2(x_j)) P_2^{(l)}(x_j) \\ &+ \sum_0^{s-1} \binom{l}{r} \{w_1^{(l-r)}(x_j) P_1^{(r)}(x_j) - w_1^{(l-r)}(x_j) P_2^{(r)}(x_j)\} \\ &+ \sum_s^{l-1} \binom{l}{r} \{w_1^{(l-r)}(x_j) P_1^{(r)}(x_j) - w_1^{(l-r)}(x_j) P_2^{(r)}(x_j)\} \end{aligned}$$

e per le condizioni poste sulle funzioni peso si avrà

$$Y^{(l)}(x_i) = P_1^{(l)}(x_i) \quad \text{e} \quad Y^{(l)}(x_{i+1}) = P_2^{(l)}(x_{i+1}).$$

3 - Costruzione dei polinomi P_1 e P_2 .

Supponiamo, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, di utilizzare $p_1 + q_1$ condizioni di interpolazione per il polinomio P_1 e $p_2 + q_2$ condizioni per il polinomio P_2 ; allora il generico polinomio P_j ($j = 1, 2$) sarà espresso dalla seguente relazione

$$(2) \quad P_j(x) = \sum_0^{p_j-1} \alpha_{rj}(x) Y_i^{(r)} + \sum_0^{q_j-1} \beta_{sj}(x) Y_{i+1}^{(s)} \quad (j = 1, 2); \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$Y_i^{(r)} = f^{(r-1)}(x_i, Y(x_i)) \quad (r = 1, \dots, p_j - 1),$$

$$Y_{i+1}^{(s)} = f^{(s-1)}(x_{i+1}, Y(x_{i+1})) \quad (s = 1, \dots, q_j - 1).$$

Le funzioni α_{rj} e β_{sj} sono determinate, seguendo Sard, imponendo la coincidenza fino al polinomio di grado n e cercando il minimo di $\int_{x_i}^{x_{i+1}} k^2(t) dt$; qui

$$-k(x) = \frac{(u-x)^n}{n!} \Theta(x, u) - P(x), \quad u, x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \text{dove} \quad \Theta(x, u) = \begin{cases} 1 & x \leq u \\ 0 & x > u \end{cases}$$

e $P(x)$ è il polinomio di grado n ottenuto interpolando la funzione $((u-x)^n/n!)$ $\cdot \Theta(x, u)$ con le sopradette condizioni di interpolazione.

Osserviamo quindi che l'unico elemento incognito nella (2) è il valore Y_{i+1} . Questo valore può essere ottenuto o per integrazione diretta, qualora ciò sia possibile,

$$Y_{i+1} = Y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, Y(t)) dt,$$

o, in generale, mediante una opportuna formula di quadratura, cioè

$$(3) \quad Y_{i+1} = Y_i + h \sum_1^l a_j f(x_{ij}, Y(x_{ij})) \quad (x_{ij} = x_i + \varepsilon_j h).$$

La (3) è una equazione non lineare implicita nella sola incognita Y_{i+1} e occorre determinare sotto quali condizioni ammette una e una sola radice nell'intervallo in questione. Occorre a tale proposito determinare la costante di Lipschitz ed imporre che sia minore di uno. Consideriamo due valori Y_{i+1} e Y_{i+1}^* ; allora, indicato con

$$Y^*(x) = w_1(x) \{ \sum \alpha_{r1}(x) Y_i^{(r)} + \sum \beta_{s1}(x) Y_{i+1}^{*(s)} \} + w_2(x) \{ \sum \alpha_{r2}(x) Y_i^{(r)} + \sum \beta_{s2}(x) Y_{i+1}^{*(s)} \}$$

(e analogamente, togliendo l'asterisco, dicasi per $Y(x)$) si ha

$$\begin{aligned} |Y_{i+1} - Y_{i+1}^*| &= |Y_i + h \sum a_j f(x_{ij}, Y(x_{ij})) - Y_i - h \sum a_j f(x_{ij}, Y^*(x_{ij}))| \\ &\leq h \sum |a_j| |f(x_{ij}, Y(x_{ij})) - f(x_{ij}, Y^*(x_{ij}))| \\ &\leq h L_1 \sum |a_j| |Y(x_{ij}) - Y^*(x_{ij})| \\ &\leq h L_1 \sum |a_j| \{ \sum B_{s1} L_s + \sum B_{s2} L_s \} |Y_{i+1} - Y_{i+1}^*|, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $B_{s1} = \max_{x_{ij}} \beta_{s1}(x_{ij})$, $B_{s2} = \max_{x_{ij}} \beta_{s2}(x_{ij})$ e con L_k la costante di Lipschitz di $f^{(k-1)}(x, Y)$ rispetto a Y .

Pertanto ci sarà contrazione se

$$h < \{ L_1 \sum |a_j| [\sum B_{s1} L_s + \sum B_{s2} L_s] \}^{-1}.$$

4 - Ordine di convergenza e approssimazione globale

Determiniamo in primo luogo l'ordine dell'approssimazione e cioè calcoliamo: $|Ry| = |y(x) - Y(x)| \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Supponendo $Y(x)$ combinazione convessa dei due polinomi di ottima approssimazione P_1 e P_2 , l'errore risulta non superiore al $\max_j |y(x) - P_j(x)| = \max_j R_j$ ($j = 1, 2$).

Ponendoci in questa condizione è quindi opportuno scegliere i due polinomi in modo che $R_1 = R_2$. Allora

$$|R_1| \leq \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} k_{\text{ott}}^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y^{(n)}(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dove k_{ott}^2 è il $k^2(t)$ che, sotto le condizioni imposte, rende minimo tale integrale.

Per il teorema del valor medio il secondo integrale sarà uguale a $C_0 h$. Per quanto riguarda il primo integrale osserviamo che

$$k_{\text{ott}}^2(t) = \frac{(u-t)^n}{n!} \theta(t, u) - \sum_0^{P_1-1} \frac{(x_j-t)^{n-r}}{(n-r)!} \alpha_r,$$

dove α_r sono polinomi nella variabile u che, posto $\gamma h = u - x_i$, possono scriversi nella forma $h^r Q(\gamma)$ con $Q(\gamma)$ polinomio di grado $2n+1$ in γ .

Allora, considerato il cambiamento di variabile $\delta = (t - x_i)/h$ si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[h^n \frac{(\gamma - \delta)^n}{n!} \theta(\gamma, \delta) - \sum_0^{P_1-1} \frac{(-h\delta)^{n-r}}{(n-r)!} h^r Q(\gamma) \right]^2 h d\delta \\ &= \int_0^\gamma \left\{ \frac{(\gamma h - \delta h)^{2n}}{(n!)^2} - 2 \frac{(\gamma h - \delta h)^n}{n!} \sum_0^{P_1-1} (-\delta h)^{n-r} * h^r * \alpha_r(\gamma^r) \right\} h * d\delta \\ & \quad + \int_0^1 \left\{ \sum_0^{P_1-1} (-\delta h)^{n-r} * h^r * \alpha_r(\gamma^r) \right\}^2 h * d\delta \leq C_1 h^{2n+1}, \end{aligned}$$

per cui $|R_1| \leq Ch^{n+1}$.

Passiamo ora a determinare l'ordine di convergenza del metodo. Consideriamo l'errore di troncamento locale

$$\begin{aligned} |y(x_1) - Y_1| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, y) dt - h \sum a_j f(x_{0j}, Y(x_{0j})) \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, y) - f(t, Y) dt \right| + \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, Y) dt - h \sum a_j f(x_{0j}, Y(x_{0j})) \right|. \end{aligned}$$

Supponendo l'ordine della formula di quadratura $O(h^t)$ si ha

$$|y(x_1) - Y_1| \leq L \int_{x_0}^{x_1} |y(t) - Y(t)| dt + O(h^t) \leq LCh^{n+2} + O(h^t).$$

E quindi per il teorema 2.2 di Henrici [5] avremo che

$$|Y_i - y(x_i)| \leq L * C * h^{n+2} * (x_i - x_0), \quad \text{se } t > n + 2.$$

5 - Esempi numerici

Forniremo a titolo esemplificativo i risultati ottenuti con il nostro metodo, relativi ad alcuni problemi test che si trovano nella bibliografia. A tale proposito abbiamo supposto il passo costante e utilizzato l'elaboratore PDP 11/40 dell'Università di Torino.

Abbiamo considerato due diversi tipi di polinomi: $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$. Nel primo caso supponiamo noto il valore della funzione e della derivata prima negli estremi dell'intervallo. Precisamente P_1 sarà individuato dalla conoscenza del valore della funzione e della derivata prima nell'estremo sinistro dell'intervallo e della conoscenza della funzione nell'estremo destro; mentre utilizzeremo la conoscenza della funzione nell'estremo sinistro e la conoscenza della funzione e della derivata prima nell'estremo destro per la costruzione di P_2 . Fisseremo inoltre per entrambi $n = 1$.

Nel secondo caso si supporrà nota anche la derivata seconda nei due estremi e si costruiranno i due polinomi, considerando per il primo P_1 il valore della funzione, della derivata prima e seconda nell'estremo sinistro e la sola conoscenza della funzione nell'estremo destro; si procede simmetricamente per il polinomio P_2 e si fissa $n = 2$.

Inoltre è stata usata una formula di quadratura di Gauss-Legendre a quattro punti e la soluzione dell'equazione non lineare (3) è stata ottenuta con un processo iterativo finchè la tolleranza sull'errore relativo è risultata inferiore a 10^{-12} . Qui di seguito riportiamo nei casi considerati l'errore

$$E(y, Y) = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i) - Y(x_i)|.$$

$$(1) \quad y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 20] \qquad (2) \quad y' = y \cos x \quad y(0) = 1 \quad x \in [0, 20]$$

h	$E(y, Y_1)$	$E(y, Y_2)$	h	$E(y, Y_1)$	$E(y, Y_2)$
2^{-3}	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	2^{-3}	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
2^{-4}	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-7}$	2^{-4}	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
2^{-6}	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	2^{-6}	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$

$$(3) \quad y_1' = y_1^2 y_2, \quad y_2' = -1/y_1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

h	$E(y_1, Y_1)$	$E(y_2, Y_1)$	$E(y_1, Y_2)$	$E(y_2, Y_2)$
2^{-2}	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$
2^{-3}	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
2^{-4}	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$

Osserviamo inoltre che nei due casi qui considerati le formule a un passo cui si perviene sono A -stabili, come si può verificare con facili conti.

Notiamo da ultimo che con il metodo qui proposto si possono determinare anche formule fortemente stabili.

Una formula che si dimostra essere fortemente stabile è quella cui si perviene quando si sceglie come polinomio P_1 quello esatto per $n = 2$, individuato dalla conoscenza della funzione e della sua derivata prima nell'estremo sinistro e della sola funzione nell'estremo destro; come polinomio P_2 quello esatto per $n = 2$, individuato dalla sola funzione nell'estremo sinistro e della funzione e della sua derivata prima e seconda nell'estremo destro; infine utilizzando la formula di quadratura sopra menzionata.

A titolo di esempio riportiamo l'errore ottenuto utilizzando tale formula per la seguente equazione di tipo stiff

$$y' = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 95 \\ -1 & 47 \end{bmatrix}, \quad y_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x \in [0, 10].$$

Partendo con passo $h = 0.001$ si ottiene un errore

$$E(y_1, Y) = E(y_2, Y) = 1.3 \cdot 10^{-6}.$$

Bibliografia

- [1] G. D. ANDRIA, G. D. BYRNE and D. R. HILL, *Integration formulas and schemes based on g-splines*, Math. Comput. **27** (1973), 831-838.
- [2] G. D. BYRNE and D. N. H. CHI, *Linear multistep formulas based on g-splines*, SIAM J. Numer. Anal., **9** (1972), 316-324.
- [3] G. HALL and J. M. WATT, *Modern numerical methods for ordinary differential equations*, Clarendon Press, Oxford 1976.
- [4] J. P. HENNART, *One-step piecewise polynomial multiple collocation methods for initial value problems*, Math. Comput. **31** (1977), 24-36.
- [5] P. HENRICI, *Discrete variable methods ordinary differential equations*, Wiley, New York 1962.
- [6] A. SARD, *Linear approximation*, Mathematical surveys n. 9, Providence R.I. American Mathematical Society 1963.

A b s t r a c t

In this paper we present a one step integration formula for initial value problems. By this formula, which makes use of Sard's polynomials, we can obtain a smooth approximation on the whole interval. Some numerical examples are presented.

* * *