Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 105-116

CARLO MARCHINI (*)

Modelli di Kripke e modelli algebrici per $\mathscr{S}_{\pi i}$ (**)

1 - Preliminari algebrici

Sia $\tau_1 = \langle 0, 2 \rangle$ un tipo di algebre e sia $\boldsymbol{B} = (B, 1, \rightarrow)$ una algebra di tale tipo con elemento privilegiato, 1, e una operazione binaria $\rightarrow$. Per le definizioni di algebre implicative, di implicazione positiva (chiamate anche algebre di Hilbert in [**1**]) e filtri (implicativi) si veda [**6**].

Definizione 1. Sia H un filtro di $\boldsymbol{B}$. Si considerino le seguenti condizioni: siano b, c, d, b' e c' elementi di B,

(1) se $b \in H$ allora $(c \rightarrow b) \in H$;

(2) se $(b \rightarrow c) \in H$ e $(c \rightarrow d) \in H$ allora $(b \rightarrow d) \in H$;

(3) se $(b \leftrightarrow b') \subseteq H$ (1) e $(c \leftrightarrow c') \subseteq H$ allora $((b \rightarrow c) \rightarrow (b' \rightarrow c')) \in H$;

(4) $(b \rightarrow b) \in H$;

(5) $(b \rightarrow (c \rightarrow b)) \in H$;

(6) $((b \rightarrow (c \rightarrow d)) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d))) \in H$.

Se H soddisfa le condizioni (1), (2), (3) e (4) sarà detto *normale* (2). Se H soddisfa le condizioni (5) e (6) sarà detto *forte* (3).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.).—Ricevuto: 12-VII-1979.

(1) Con la notazione $(b \leftrightarrow b')$ si indicherà l'insieme $\{(b \rightarrow b'), (b' \rightarrow b)\}$.

(2) Le suddette condizioni vengono prese in esame in [**4**]. Con la terminologia di tale lavoro $(\boldsymbol{B}, H)$ è una matrice quasi-implicativa se H è un filtro normale.

(3) Tali condizioni vengono prese in esame in [**1**].

Notazione. Sia H un filtro di $\boldsymbol{B}$ e siano b, $c \in B$. Si porrà $b \leqslant_H c$ se $(b \to c) \in H$ e $b \equiv_H c$ se $(b \leftrightarrow c) \subseteq H$.

Proposizione 1. (a) Ogni filtro forte è normale.

(b) Se H è un filtro normale allora $\leqslant_H$ è una relazione di quasi ordine su $\boldsymbol{B}$ tale che $1 \leqslant_H b$ se e solo se $b \in H$.

(c) Se H è un filtro normale allora $\equiv_H$ è una congruenza su $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{B}/\equiv_H$ è un'algebra implicativa.

(d) Se H è un filtro forte allora $\boldsymbol{B}/\equiv_H$ è un'algebra di implicazione positiva.

(e) Se Θ è una congruenza su $\boldsymbol{B}$ tale che $\boldsymbol{B}/\Theta$ sia un'algebra implicativa (di implicazione positiva), allora $H = \{b \in B : b\Theta 1\}$ è un filtro normale (forte) di $\boldsymbol{B}$ e $\Theta = \equiv_H$.

Dimostrazione. (a) Per la dimostrazione che un filtro forte soddisfa le condizioni (1), (2) e (4) si veda [**5**]. La dimostrazione che ogni filtro forte soddisfa la condizione (3) si ottiene in modo analogo alla dimostrazione di II.2.3 di [**6**].

(b) Le condizioni (2) e (4) permettono di affermare che se H è un filtro normale $\leqslant_H$ è un quasi ordine su B. La seconda parte viene dalla condizione (1) e dal fatto che H è un filtro.

(c) Ovviamente da (b) si ha che $\equiv_H$ è una relazione di equivalenza su B. Ma la condizione (3) permette di concludere la tesi.

(d) Per (a) e (c), se H è un filtro forte, la relazione $\equiv_H$ è una relazione di congruenza su $\boldsymbol{B}$. Il resto è ovvio (cfr. [**1**] teorema 1, pag. 5).

(e) Detto $h: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/\Theta$ l'omomorfismo canonico, si ha $b \in H$ se e solo se $h(b) = 1$ e da ciò, essendo l'algebra quoziente un'algebra implicativa, si ha l'equivalenza delle affermazioni $h(b) = h(c)$, $b \equiv_H c$, $(b \leftrightarrow c) \subseteq H$ e $b\Theta c$. È ora facile provare che $1 \in H$ e se $(b \to c) \in H$ e $b \in H$, allora $1 = h(b \to c) = h(b) \to h(c) = 1 \to h(c)$ e quindi $h(c) = 1$, cioè H è un filtro. La verifica che H soddisfa pure le condizioni (1), (2) e (4) è immediata. Dal fatto che $(b \leftrightarrow b') \subseteq H$ e $(c \leftrightarrow c') \subseteq H$ si ha $h(b) = h(b')$ e $h(c) = h(c')$. Da queste eguaglianze si deduce poi che H soddisfa pure la condizione (3). Se l'algebra quoziente è un'algebra di implicazione positiva la conclusione richiesta segue immediatamente.

Notazione. Se $f: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ è un omomorfismo tra algebre di tipo τ_1, si porrà $\ker(f) = \{b \in B : f(b) = 1\}$.

Corollario 2. *Se* $f: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ *e* $\boldsymbol{B}'$ *è un'algebra di implicazione positiva,* $\ker(f)$ *è un filtro forte di* $\boldsymbol{B}$.

Dimostrazione. Discende dalla Proposizione 1(e) e dal fatto che la classe delle algebre di implicazione positiva è una varietà equazionale (cfr. [**1**]).

Proposizione 3. Sia H un filtro forte di $\boldsymbol{B}$, allora si ha:

(a) Se K è un filtro di $\boldsymbol{B}$ e $H \subseteq K$ allora K è un filtro forte di $\boldsymbol{B}$.

(b) Per ogni $b \in B$, $\langle H, b\rangle = \{x \in B: (b \to x) \in H\}$ è il filtro forte generato da H e da b.

Dimostrazione. (a) Ovvia per la definizione di filtro forte.

(b) Si ha ovviamente che $b \in \langle H, b\rangle$, essendo, per la Proposizione 1(a) $(b \to b) \in H$. Sfruttando il fatto che H è un filtro ed è forte si conclude che $\langle H, b\rangle$ è un filtro. Poichè $H \subseteq \langle H, b\rangle$, per (a) $\langle H, b\rangle$ è un filtro forte. Se poi K è un filtro contenente H e b, ogni volta che $(b \to x) \in H$ si ha $x \in K$ e dunque $\langle H, b\rangle \subseteq K$.

Osservazione 1. Se $\boldsymbol{B}$ è un'algebra di implicazione positiva ogni filtro è forte, essendo forte il filtro minimo $\{1\}$.

Definizione 2. Un'algebra sarà detta coerente se ha un filtro forte proprio.

Osservazione 2. Se $\boldsymbol{B}$ è una algebra di tipo τ_1 assolutamente libera allora è coerente. Infatti detto A un insieme di generatori di $\boldsymbol{B}$, esiste $\boldsymbol{B}'$ algebra di implicazione positiva, libera su A (cfr. [**1**]). Poichè $\boldsymbol{B}'$ è ottenuta quozientando $\boldsymbol{B}$ rispetto ad una congruenza, per la Proposizione 1(e) esiste un filtro forte di $\boldsymbol{B}$, proprio.

2 - Modelli

Sia $\boldsymbol{P} = (P, \leqslant)$ un insieme quasi ordinato.

Definizione 3. Siano A un insieme, $\boldsymbol{B}$ un'algebra di tipo τ_1.

(a) Una coppia ordinata $(A, \models)$ sarà detta una *prestruttura in* $\boldsymbol{P}$, A sarà detto il *sostegno* della prestruttura e $\models$ sarà detto *operatore di conseguenza* (brevemente o.c.) della prestruttura se $A \neq \emptyset$ e $\models \subseteq P \times A$.

(b) Una coppia ordinata $(\boldsymbol{B}, \models)$ sarà detta una *struttura in* $\boldsymbol{P}$ se $(B, \models)$ è una prestruttura in $\boldsymbol{P}$ ed inoltre, per ogni $p \in P$, per ogni $b,\ c \in B$

(I) $p \models 1$, (II) sono equivalenti

(1) $$p \models (b \to c)$$

(2) $$(\forall q \in P)(q \leqslant p \text{ et } q \models b \Rightarrow q \models c)\,.$$

(c) Una prestruttura in $\boldsymbol{P}$, $(A, \models)$, sarà detta un *premodello in* $\boldsymbol{P}$ se per ogni $p,\ q \in P$ e per ogni $x \in$

(3) $$p \models x \text{ et } q \leqslant p \Rightarrow q \models x\,.$$

(d) Una struttura in $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}, \models)$ sarà detta un *modello in* $\boldsymbol{P}$ se $(B, \models)$ è un premodello in $\boldsymbol{P}$.

(e) Una (pre)struttura sarà detta *propria* se l'o.c. non è la corrispondenza totale.

Osservazione 3. Sia $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ una struttura in $\boldsymbol{P}$, allora vale la (3) per ogni elemento x di B della forma $(b \to c)$, con $b, c \in B$.

Notazione. Se $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ è una struttura in $\boldsymbol{P}$, si scriverà $M \models b$, o più semplicemente, $\models b$ se per ogni $p \in P$, $p \models b$.

Definizione 4. (a) Siano $(A, \models)$ e $(A', \models')$ due prestrutture in $\boldsymbol{P}$. Si dirà che $f\colon A \to A'$ è un *morfismo di prestrutture* (in $\boldsymbol{P}$), in simboli $f\colon (A, \models) \to (A', \models')$ se per ogni $p \in P$ e per ogni $a \in A$, $p \models a$ se e solo se $p \models' f(a)$.

(b) Siano $(\boldsymbol{B}, \models)$ e $(\boldsymbol{B}', \models')$ due strutture in $\boldsymbol{P}$. Un omomorfismo $f\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ si dirà un *morfismo di strutture* (in $\boldsymbol{P}$), in simboli, $f\colon (\boldsymbol{B}, \models) \to (\boldsymbol{B}', \models')$ se $f\colon (B, \models) \to (B', \models')$.

(c) Sia $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ una struttura in $\boldsymbol{P}$, l'insieme $N(M) = \{b \in B\colon M \models b\}$ sarà detto il *nucleo* della struttura M.

Teorema 4. *Sia $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ una struttura in $\boldsymbol{P}$, allora $N(M)$ è un filtro normale di $\boldsymbol{B}$. Se M è un modello in $\boldsymbol{P}$ allora $N(M)$ è un filtro forte.*

Dimostrazione. È immediata dalle Definizioni 1 e 3.

Osservazione 4. Se $(\boldsymbol{B}, \models)$ è un modello in $\boldsymbol{P}$, proprio, allora $\boldsymbol{B}$ è un'algebra coerente.

Teorema 5. *Siano* $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ *una struttura (modello) in* $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{B}'$ *un'algebra implicativa (di implicazione positiva) e* $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ *un omomorfismo suriettivo. Allora sono equivalenti*

(i) *esiste una unica struttura (modello) in* $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}', \models')$ *tale che*

$$h\colon (\boldsymbol{B}, \models) \to (\boldsymbol{B}', \models');$$

(ii) $\ker(h)$ *è un filtro normale (forte) e* $\ker(h) \subseteq N(M)$.

Dimostrazione. Si supponga la (i). Con semplici calcoli, in virtù delle Definizioni 3 e 4 si ottiene $\ker(h) \subseteq N(M)$. Facilmente si verifica che $\ker(h)$ è un filtro normale (forte), utilizzando la Proposizione 1(e) ed il Corollario 2.

Si supponga ora (ii). Per soddisfare la (i) lo o.c. $\models'$ deve essere definito ponendo, per ogni $p \in P$ e per ogni $b \in B$, $p \models' h(b)$ se e solo se $p \models b$. Tale definizione dipende solo dall'elemento $h(b)$ e non già da b. Facilmente si controlla che $(\boldsymbol{B}', \models')$ è la struttura (modello) in $\boldsymbol{P}$ con le proprietà richieste.

Corollario 6. *Una struttura in* $\boldsymbol{P}$, $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ *è un modello se e solo se* $N(M)$ *è un filtro forte.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4 è sufficiente provare che se $N(M)$ è un filtro forte, allora M è modello in $\boldsymbol{P}$. Per semplicità si indichi con N il nucleo $N(M)$. Per la Proposizione 1(d) $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}/\equiv_N$ è un'algebra di implicazione positiva; inoltre se $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ è l'omomorfismo canonico, $\ker(h) = N$. Per il Teorema 5 è possibile definire una struttura in $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}', \models')$ tale che $h\colon (\boldsymbol{B}, \models) \to (\boldsymbol{B}', \models')$. In ogni algebra di implicazione positiva si ha $x = (1 \to x)$ (cfr. [**1**]), allora per ogni $p \in P$ e per ogni $b \in B$, essendo $h(b) = (1 \to h(b)) = h(1 \to b)$, sono equivalenti $p \models b$, $p \models' h(b)$, $p \models' h(1 \to b)$, $p \models (1 \to b)$.

Se $p \models b$ e $q \in P$ con $q \leqslant p$, per la (I) si ha $q \models b$. Perciò M è un modello in $\boldsymbol{P}$.

3 - Modelli di Kripke

Sia $(A, \models)$ una prestruttura (premodello) in $\boldsymbol{P}$ e sia $\boldsymbol{B}(A) = (B(A), 1, \to)$ l'algebra assolutamente libera su A di tipo τ_1. Indicata con $i\colon A \to B(A)$ la immersione dei generatori, si può formulare il seguente

Teorema 7. *Se* $(A, \models)$ *è una prestruttura (premodello) in* $\boldsymbol{P}$, *è possibile definire un unico o.c.* $\models^i \subseteq P \times B(A)$ *tale che*

(i) $(\boldsymbol{B}(A), \models^i)$ *sia una struttura (modello) in* $\boldsymbol{P}$;

(ii) $i\colon (A, \models) \to (B(A), \models^i)$;

(iii) *per ogni struttura* $(\boldsymbol{B}', \models')$ *e per ogni* $f\colon (A, \models) \to (B', \models')$, *se* $h\colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}'$ *è l'unico omomorfismo tale che* $f = h \circ i$, *allora*

$$h\colon (\boldsymbol{B}(A), \models^l) \to (\boldsymbol{B}', \models').$$

Dimostrazione. Detti, come in [**2**], «parole» gli elementi di $B(A)$ e lunghezza di una parola il numero dei segni $\to$ presenti in essa, la definizione dell'o.c. $\models^l \subseteq P \times B(A)$ viene data per induzione sulla lunghezza delle parole: per ogni $p \in P$

(a) $p \models^l 1$;

(b) $p \models^l i(a)$ se e solo se $p \models a$ $(a \in A)$;

(c) $p \models^l (w' \to w'')$ se e solo se

$$(\forall q \in P)(q \leqslant p \text{ et } q \models^l w' \Rightarrow q \models^l w'')\big(w', w'' \in B(A)\big)\,.$$

Con questa definizione è immediato provare che $(\boldsymbol{B}(A), \models^l)$ è una struttura in $\boldsymbol{P}$ e che $i\colon (A, \models) \to (B(A), \models^l)$. L'unicità è poi ovvia. Se inoltre $(A, \models)$ è un premodello in $\boldsymbol{P}$, per la (3) e dalla Osservazione 3 si ha che $(B(A), \models^l)$ è un modello in $\boldsymbol{P}$.

Per dimostrare (iii) si deve provare che, per ogni $p \in P$ e per ogni $w \in B(A)$ $p \models^l w$ se e solo se $p \models' h(w)$ e questa si ottiene ancora per induzione sulla lunghezza di w.

Definizione 5. (a) Data $(A, \models)$ prestruttura in $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}(A), \models^l)$ definita da (a), (b) e (c) si dirà la struttura (in $\boldsymbol{P}$) *libera* generata da $(A, \models)$.

(b) Si dirà *modello di Kripke* (in breve K-modello) in $\boldsymbol{P}$, ogni struttura libera che sia un modello.

Ogni struttura avente come sostegno un'algebra assolutamente libera di tipo τ_1 è una struttura libera, come si può desumere dalla seguente

Osservazione 5. Se $(\boldsymbol{B}(A), \models)$ è una struttura in $\boldsymbol{P}$, allora la «restrizione» di $\models$ ad A, indicata ancora con $\models$ è tale che $(A, \models)$ è una prestruttura in $\boldsymbol{P}$ e $i\colon (A, \models) \to (B(A), \models)$. Si ha inoltre che la struttura libera generata da $(A, \models)$ coincide con $(\boldsymbol{B}(A), \models)$.

Quanto sopra osservato si può generalizzare come segue

Corollario 8. *Sia* $(\boldsymbol{B}', \models')$ *una struttura* (*modello*) *in* $\boldsymbol{P}$.

(a) *Se* $f\colon A \to B'$ *allora esiste una unica prestruttura* (*premodello*) *in* $\boldsymbol{P}$, $(A, \models)$, *tale che* $f\colon (A, \models) \to (B', \models')$.

(b) *Se* $f: \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}'$ *allora esiste una unica struttura* (*modello*) *in* $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}(A), \models)$ *tale che* $f: (\boldsymbol{B}(A), \models) \to (\boldsymbol{B}', \models')$.

Dimostrazione. (a) Basta porre $\models = (\mathrm{id}_P \times f)^{-1}[\models']$.

(b) Poichè $f \circ i: A \to B'$, applicando (a) e il Teorema 7 si ottiene quanto richiesto.

Se w_1 e w_2 sono due elementi di $B(A)$, si può associare ad essi una applicazione $\sigma: B(A) \to B(A)$, la sostituzione di w_1 con w_2 in ogni parola contenente w_1 come sottoparola. Con tali notazioni si ha

Proposizione 9. Sia $M = (\boldsymbol{B}(A), \models)$ un K-modello in $\boldsymbol{P}$ e siano w_1 e w_2 tali che $(w_1 \leftrightarrow w_2) \subseteq N(M)$. Allora per ogni $p \in P$ e per ogni $w \in B(A)$, $p \models w$ se e solo se $p \models \sigma(w)$.

Dimostrazione. Sia $a_0 \notin A$ e sia $A' = A \cup \{a_0\}$. Siano $f_1, f_2: A' \to B(A)$ definiti da $f_j(a) = i(a)$, per ogni $a \in A$ e per $j = 1, 2$; $f_j(a_0) = w_j$, per $j = 1, 2$. Per il Corollario 8 esistono due premodelli in $\boldsymbol{P}$, $(A', \models_j)$ $(j = 1, 2)$, tali che f_j siano morfismi di premodelli. Ma per le definizioni e per le ipotesi poste si conclude facilmente che $p \models_1 x$ se e solo se $p \models_2 x$, per ogni $p \in P$ e per ogni $x \in A'$. Dunque $\models_1 = \models_2$. Se ora $(\boldsymbol{B}(A'), \models^l)$ è il modello in $\boldsymbol{P}$ libero, generato da $(A', \models_1)$ esistono due morfismi di strutture h_1, h_2: $(\boldsymbol{B}(A'), \models^l) \to (\boldsymbol{B}(A), \models)$, tali che $f_j = h_j \circ i$.

Ovviamente si ha che per ogni $w \in B(A)$, esiste una unica parola $w' \in B(A')$ tale che $w = h_1(w')$ e $\sigma(w) = h_2(w')$. Sono allora equivalenti $p \models w$, $p \models^l w'$, $p \models \sigma(w)$, per ogni $p \in P$ e per ogni $w \in B(A)$. Da ciò l'asserto.

Osservazione 6. Sia $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ un modello (proprio) in $\boldsymbol{P}$ e sia per ogni $p \in P$, $H_p = \{b \in B: p \models b\}$. Allora H_p è un filtro contenente $N(M)$. Infatti utilizzando la (I) si ha che $1 \in H_p$. Dalla (II) e dal fatto che $\leqslant$ è riflessiva si conclude che H_p è un filtro. Per il Teorema 4 e la Proposizione 3(a) si può affermare che H_p è un filtro forte. Inoltre se M è un modello proprio, allora per qualche $p \in P$ si ha che H_p è un filtro proprio.

È possibile ora invertire il risultato della Osservazione 4 mediante il seguente

Teorema 10. *Se* $\boldsymbol{B}$ *è un'algebra coerente, detto* P *l'insieme dei filtri forti propri di* $\boldsymbol{B}$ *e posto* $\boldsymbol{P} = (P, \supseteq)$, *si può definire un unico* o.c. $\models$ *tale che* $(\boldsymbol{B}, \models)$ *sia un modello proprio in* $\boldsymbol{P}$ *e per ogni* $p \in P$, $H_p = p$.

Dimostrazione. Dalla definizione data $\boldsymbol{P}$ è un insieme (quasi) ordinato. Posto

$$(4) \qquad p \models b \quad \text{se e solo se } b \in p\,,$$

la (I) è soddisfatta in virtù della definizione di filtro. Ricordando poi che l'ordine su $\boldsymbol{P}$ è $\supseteq$, si ha immediatamente la (3) ed il fatto che la (1) implichi la (2). Viceversa si supponga che non valga la (1), cioè $(b \to c) \notin p$. Si consideri $p' = \langle p, b\rangle$; per la Proposizione 3(b) e per definizione, si ha $c \notin p'$. Dunque $p' \in P$. Poichè $b \in p'$ si è così provata la negazione di (2). L'unicità è ovvia in virtù del fatto che $H_p = p$ equivale alla (4). Infine, poichè $\boldsymbol{B}$ è coerente $(\boldsymbol{B}, \models)$ è un modello in $\boldsymbol{P}$ proprio.

Il modello così costruito è «canonico» nel senso di [7].

Corollario 11. *Sia $\boldsymbol{B}$ una algebra coerente e H un filtro forte proprio di $\boldsymbol{B}$, allora esistono un insieme quasi ordinato $\boldsymbol{P}$ ed un* o.c. $\models$ *tali che $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ sia un modello proprio in $\boldsymbol{P}$ e $H = N(M)$.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}/\equiv_H$ e sia $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ l'omomorfismo canonico. Per la Proposizione 1(d) $\boldsymbol{B}'$ è un'algebra di implicazione positiva ed è ooerente, visto che H è proprio. Per il Teorema 10 esistono un insieme quasi ordinato $\boldsymbol{P}$ ed un o.c. $\models'$ tali che $(\boldsymbol{B}', \models')$ sia un modello proprio in $\boldsymbol{P}$. Posto cra $\models\, = (\mathrm{id}_P \times h)^{-1}[\models'] \subseteq P \times B$ si ha che $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ è un modello in $\boldsymbol{P}$ e $H = N(M)$. Perciò M è proprio.

Con le notazioni introdotte in [**6**], sia $\mathscr{L}$ un linguaggio formalizzato di ordine zero individuato da un insieme non vuoto A (non necessariamente infinito) e da un unico connettivo binario $\to$. Ogni algebra di tipo τ_1 è un'algebra associata al linguaggio $\mathscr{L}$. L'algebra delle formule di $\mathscr{L}$, $\boldsymbol{F}$, è l'algebra assolutamente libera su A, di tipo $\tau_2 = \langle 2\rangle$; perciò la immersione $i\colon A \to B(A)$ si estende alla immersione $j\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}(A)$, omomorfismo tra algebre di tipo τ_2. È ovvio constatare che $\boldsymbol{B}(A)$ può essere considerata come l'algebra libera di tipo τ_2 generata da $A \cup \{1\}$.

Nel seguito si useranno le definizioni di $\mathscr{S}_{\pi\iota}$, di valutazione di $\mathscr{L}$ in un'algebra $\boldsymbol{B}$ e di modello di una teoria $\mathscr{S}(\Gamma)$, con $\Gamma \subseteq F$, come date in [**6**].

Definizione 6. Sia $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ un modello in $\boldsymbol{P}$ e sia $h\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}$ un morfismo di tipo τ_2.

(a) Si dirà che la coppia ordinata (M, h) *è un modello in* $\boldsymbol{P}$ *per* $\alpha \in F$, o che α *è vera in* (M, h), in simboli, $(M, h) \models \alpha$, se $M \models h(\alpha)$.

(b) Se $\Gamma \subseteq F$ si porrà $(M, h) \models \Gamma$, se per ogni $\alpha \in \Gamma$, $(M, h) \models \alpha$.

(c) Sia $v\colon A \to B'$ una valutazione di $\mathscr{L}$ in $\boldsymbol{B}'$, algebra di implicazione positiva, si dirà che (M, h) e v sono *associati* se per ogni $\alpha \in F$ si ha

$$\alpha_{B'}(v) = 1 \quad \text{se e solo se } (M, h) \models \alpha\,. \tag{5}$$

Notazione. Sia $v\colon A \to B$ e sia $\boldsymbol{B}$ algebra di tipo τ_1; con $v_1\colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}$ e $v_2\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}$ si indicheranno gli omomorfismi di tipo τ_1 e τ_2, rispettivamente, che estendono v.

Proposizione 12. (a) Siano $M = (\boldsymbol{B}, \models)$ un modello in $\boldsymbol{P}$, $h\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}$ un omomorfismo di tipo τ_2. Esiste un K-modello in $\boldsymbol{P}$, $(\boldsymbol{B}(A), \models')$ tale che, per ogni $p \in P$, $\alpha \in F$, $p \models h(\alpha)$ se e solo se $p \models' j(\alpha)$.

(b) Una formula $\alpha \in F$ è vera in ogni (M, h), con M modello in $\boldsymbol{P}$ se e solo se è vera in ogni (M, j) con M K-modello in $\boldsymbol{P}$ con sostegno $\boldsymbol{B}(A)$.

Dimostrazione. (a) Detto $h' = (h_{\restriction A})_1\colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}$, si ha $h = h' \circ j$. Per il Corollario 8(b) esiste un unico modello $(\boldsymbol{B}(A), \models')$ tale che $h'\colon (\boldsymbol{B}(A), \models') \to (\boldsymbol{B}, \models)$. Ma allora sono equivalenti $p \models h'(j(\alpha))$ e $p \models' j(\alpha)$.

(b) Una implicazione è ovvia, l'altra discende da (a).

4 - K-modelli e modelli algebrici

In questo paragrafo si vuole fornire un confronto tra le nozioni di K-modello e di modello (algebrico) nel senso di [**6**].

Teorema 13. *Sia* $\boldsymbol{B}$ *una algebra di implicazione positiva coerente. Esiste un insieme quasi ordinato* $\boldsymbol{P}$ *tale che per ogni valutazione* v *di* $\mathscr{L}$ *in* $\boldsymbol{B}$ *esiste un* K*-modello in* $\boldsymbol{P}$, $M = (\boldsymbol{B}(A), \models)$ *tale che* (M, j) *e* v *sono associati* [4].

Dimostrazione. La dimostrazione non è dissimile da quella data in [**3**] a pag. 25. Si ottiene considerando come $\boldsymbol{P}$ l'insieme di tutti i filtri propri di $\boldsymbol{B}$ ed applicando il Teorema 10 ed il Corollario 8(b).

---

(4) Per brevità si sottointenderà spesso l'omomorfismo $j\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}(A)$.

Osservazione 7. Per le condizioni poste nel Teorema 13 si ha che il modello M è proprio se e solo se la valutazione v è non costante di valore 1.

Lemma 14. *Sia v una valutazione di $\mathscr{L}$ in $\boldsymbol{B}$, con $\boldsymbol{B}$ algebra di implicazione positiva e sia M un K-modello in $\boldsymbol{P}$ tale che M e v siano associati. Si ha allora*

(a) *per ogni formula α tale che $v_2(\alpha) = 1$ esiste un omomorfismo di tipo τ_2, $h_\alpha \colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{F}$ tale che $v_2 \circ h_\alpha = v_1$ e $h_\alpha \circ j = \mathrm{id}_F$;*

(b) *per ogni $w \in B(A)$ si ha $v_1(w) = 1$ se e solo se $M \models w$.*

Dimostrazione. (a) Si è già osservato che $\boldsymbol{B}(A)$ può essere considerata l'algebra di tipo τ_2 libera su $A \cup \{1\}$; sia allora σ l'endomorfismo di tipo τ_2 che manda 1 in $j(\alpha)$. Ad ogni $w \in B(A)$ si può far corrispondere una unica formula $h_\alpha(w)$ tale che $j(h_\alpha(w)) = \sigma(w)$. Ovviamente $h_\alpha \colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{F}$. È poi facile constatare che le restrizioni di $v_2 \circ h_\alpha$ e v_1 a $A \cup \{1\}$ coincidono. Perciò $v_2 \circ h_\alpha = v_1$. In modo analogo si prova $h_\alpha \circ j = \mathrm{id}_F$.

(b) Sia $\alpha \in F$ tale che $1 = v_2(\alpha) = \alpha_{\boldsymbol{B}}(v)$. Per il Teorema 13 si ha $M \models j(\alpha)$. È allora $(1 \leftrightarrow j(\alpha)) \subseteq N(M)$ e per la Proposizione 9, per ogni $w \in B(A)$ si ha $M \models w$ se e solo se $M \models j(h_\alpha(w))$. Ma è pure $v_1(w) = 1$ se e solo se $v_2(h_\alpha(w)) = 1$. Dal Teorema 13 si conclude allora che $v_2(h_\alpha(w)) = 1$ equivale a $M \models j(h_\alpha(w))$ e con ciò risulta provata la tesi.

Osservazione 8. Siano v una valutazione di $\mathscr{L}$ in $\boldsymbol{B}$, algebra di implicazione positiva e sia M un K-modello in $\boldsymbol{P}$ tale che M e v siano associati. Con tali posizioni la (5) può essere espressa dalla seguente eguaglianza

$$(5') \qquad \ker(v_1) \cap j[F] = N(M) \cap j[F] \,.$$

La asserzione del Lemma 14(b) equivale allora ad affermare che dalla (5') si deduce $\ker(v_1) = N(M)$. Più in generale si può provare

Proposizione 15. Se H e K sono filtri forti propri di $\boldsymbol{B}(A)$ tali che $K \cap j[F] = H \cap j[F]$ allora $K = H$.

Dimostrazione. Per il Corollario 11 esistono un insieme quasi ordinato $\boldsymbol{P}$ ed un o.c. $\models \subseteq P \times B(A)$ tale che $M = (\boldsymbol{B}(A), \models)$ è un modello in $\boldsymbol{P}$ e $H = N(M)$. Siano ora $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}(A)/\equiv_K$ e $k \colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}'$ l'omomorfismo canonico. Per la Proposizione 1(d) $\boldsymbol{B}'$ è un'algebra di implicazione positiva ed è coerente. Se si pone $v = k \circ i$, dalla ipotesi che K e H ristretti a $j[F]$ coincidano, si ha che M e v sono associati. Inoltre $v_1 = k$, sicchè $\ker(v_1) = \ker(k) = K$. Per il Lemma 14(b) e per la Osservazione precedente si ha $K = H$.

Si vuole ora associare ad ogni K-modello in $\boldsymbol{P}$ una valutazione. A tale scopo si potrebbe ripetere la costruzione data in [**3**] a pag. 24. Qui si fornisce una versione alternativa che potrebbe rivestire qualche interesse.

Teorema 16. *Sia* $M = (\boldsymbol{B}(A), \models)$ *un* K*-modello in* $\boldsymbol{P}$. *Detta* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(A)/\equiv_N$, *dove* $N = N(M)$ *e* $h\colon \boldsymbol{B}(A) \to \boldsymbol{B}$ *è l'omomorfismo canonico, si ha che* $\boldsymbol{B}$ *è un'algebra di implicazione positiva e* $v_0 = h \circ i$ *è una valutazione di* $\mathscr{L}$ *in* $\boldsymbol{B}$ *tale che* M *e* v_0 *sono associati.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4 $N(M)$ è un filtro forte e perciò, per la Proposizione 1(d) $\boldsymbol{B}$ è un'algebra di implicazione positiva. Essendo, per ogni $\alpha \in F$, $\alpha_{\boldsymbol{B}}(v_0) = h(j(\alpha))$, segue immediatamente l'asserto.

Osservazione 9. Se il K-modello M è proprio, allora l'algebra $\boldsymbol{B}$ costruita nel Teorema precedente è coerente.

Siano $\boldsymbol{B}$ e v_0 costruiti come detto nel Teorema 16 e sia v una valutazione di $\mathscr{L}$ in $\boldsymbol{B}'$, con $\boldsymbol{B}'$ algebra di implicazione positiva. Si ha il seguente

Teorema 17. *Se* M *e* v *sono associati allora esiste un unico omomorfismo iniettivo* $f\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ *tale che per ogni formula* $\alpha \in F$, $\alpha_{\boldsymbol{B}'}(v) = f(\alpha_{\boldsymbol{B}}(v_0))$.

Dimostrazione. Con le notazioni precedentemente introdotte si ha che $\alpha_{\boldsymbol{B}}(v_0) = h \circ j(\alpha)$ e $\alpha_{\boldsymbol{B}'}(v) = v_1 \circ j(\alpha)$. Ma se M e v sono associati, per il Lemma 14(b) si ha $\ker(v_1) = N(M)$. Pertanto le congruenze indotte dagli omomorfismi v_1 e h coincidono, per la Proposizione 1. Esiste allora un unico omomorfismo iniettivo $f\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ tale che $v_1 = f \circ h$ e quindi si ottiene la tesi.

Conseguenza importante dei teoremi precedenti è il teorema di completezza in forma forte (per quello in forma debole si veda [**7**]).

Corollario 18. *Per ogni* $\boldsymbol{L}_{\pi i}$*-teoria* $\mathscr{S}(\Gamma)$ *e per ogni* $\alpha \in F$ *si ha che* α *è un teorema di* $\mathscr{S}(\Gamma)$ *se e solo se per ogni* $\boldsymbol{P}$ *e per ogni* K*-modello in* $\boldsymbol{P}$, M, *tale che* $M \models \Gamma$, $M \models \alpha$.

Bibliografia.

[**1**] A. Diego, *Les Algèbres de Hilbert*, Gauthier-Villars, Paris 1966.

[**2**] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[3] M. C. FITTING, *Intuitionistic logic model theory and forcing*, North Holland, Amsterdam 1969.

[4] M. MADUCH, *On three-valued implicative systems*, Studia Logica **37** (1978), 351-385.

[5] T. OGASAWARA, *Relation between intuitionistic logic and lattice*, J. Sci. Hirosima Univ. Sez. A **9** (1939), 157-164.

[6] H. RASIOWA, *An algebraic approach to non-classical logics*, North Holland, Amsterdam 1974.

[7] K. SEGERBERG, *Propositional logics related to Heyting's and Johansson's*, Theoria **34** (1968), 26-61.

Summary

Kripke models and algebraic models (in the sense of [**6**]*) are compared in order to get an alternative proof of the strong completeness theorem for* $\mathcal{S}_{\pi_1}$.

* * *