Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 73-87

ANNA ZARETTI (*)

Sul moto di un sistema elastico in presenza di un ostacolo deformabile (**)

1 – In questo lavoro ci proponiamo di studiare il problema delle « piccole » vibrazioni trasversali di un sistema dinamico omogeneo mono o bi-dimensionale in presenza di un ostacolo deformabile. L'urto contro l'ostacolo si supporrà di tipo diverso a seconda delle caratteristiche dell'ostacolo stesso.

Come noto le vibrazioni trasversali di un sistema in regime perfettamente elastico, possono essere studiate mediante l'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \alpha \Delta u(x,t) + \gamma \Delta^2 u(x,t) = f(x,t) \qquad (x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T)\,, \tag{1.1}$$

ove $u(x,t)$ indica lo spostamento all'istante t del punto del corpo che, in condizioni di equilibrio, ha coordinata $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n = 1, 2)$, $f(x,t)$ è la forza esterna e con Ω si è indicato l'insieme aperto e limitato di R^n che rappresenta la regione di spazio occupata dal corpo in condizioni di equilibrio (segmento $0<x<1$, oppure insieme aperto del piano (x_1, x_2)). I coefficienti α e γ sono opportune costanti $\geqslant 0$ dipendenti dalle caratteristiche fisiche e geometriche del corpo in esame.

Ricordiamo che, ad esempio, se $n = 1$ la (1.1) traduce le vibrazioni trasversali di una verga (di una corda se $\gamma = 0$); se $n = 2$ si riduce alla classica equazione della piastra vibrante (della membrana se $\gamma = 0$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Ingegneria del Politecnico, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-VII-1979.

Per studiare il problema dell'urto contro un ostacolo deformabile, aggiungeremo a primo membro della (1.1) un termine $\beta(u(x, t), \partial u(x, t)/\partial t)$ (dipendente in generale sia dalla posizione che dalla velocità del sistema elastico considerato) che rappresenta l'azione del vincolo sul sistema stesso. Esso assumerà, come vedremo al n. **6**, forme diverse a seconda della natura dell'ostacolo che si vuole considerare (solido elastico, solido anelastico, fluido, ecc.).

Otteniamo pertanto l'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \alpha \Delta u(x, t) + \gamma \Delta^2 u(x, t) + \beta\Big(u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big) = f(x, t) . \tag{1.2}$$

Osserviamo ora che la (1.2) rappresenta il fenomeno fisico considerato solo purchè $|\partial u(x, t)/\partial t|$ sia « piccolo » rispetto alla velocità della luce ($|\partial u(x, t)/\partial t| \leqslant M$, M conveniente costante positiva). Per tener conto di questo fatto è conveniente, ai fini della trattazione matematica, riformulare il problema considerato sopra, utilizzando un approccio variazionale anzichè quello classico. Ciò consiste in sostanza nel sostituire una disequazione variazionale all'equazione (1.2) in modo da introdurre direttamente nella definizione di soluzione la relazione

$$\Big|\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big| \leqslant M , \tag{1.3}$$

che traduce analiticamente la limitazione di validità della (1.2).

Sostituiremo pertanto alla (1.2) la disequazione

$$\int_{Q_t} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \Delta u + \gamma \Delta^2 u + \beta\Big(u, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) - f\Big) \Big(\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) \, dQ_t \geqslant 0, \quad Q_t = \Omega \times [0, t], \tag{1.4}$$

ove le funzioni $u = u(x, t)$ e $\varphi = \varphi(x, t)$ appartengono ad opportuni convessi che verranno precisati in seguito. Le eventuali soluzioni della (1.4) (definite in modo da precisare) cui si associano appropriate condizioni iniziali ed al contorno, godono della seguente proprietà: le loro restrizioni all'intervallo di tempo $0 \leqslant t < t' \leqslant T$ in cui vale la condizione (1.3) $\forall x \in \Omega$, risultano anche soluzioni della (1.2). Invece per $t \geqslant t'$ non sussiste alcun legame tra le soluzioni della disequazione e quelle eventuali dell'equazione che peraltro non avrebbero alcun significato fisico [1].

---

[1] Si tenga presente che i risultati matematici che si otterranno ai paragrafi seguenti relativamente al problema variazionale qui considerato, valgono comunque grande si scelga la costante M.

In base a queste considerazioni concludiamo che al problema fisico in esame può essere associata anzichè la (1.2) la disequazione (1.4) e, per fissare le idee, supporremo assegnate le condizioni iniziali

$$u(x,0)=u_0(x)\,,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\qquad x\in\Omega\,, \tag{1.5}$$

e condizioni al contorno che possono variare a seconda del tipo di vincolo imposto su $\partial\Omega=\Gamma$.

Pertanto nel paragrafo **2** seguente enunceremo un teorema astratto di esistenza ed unicità per la soluzione di una disequazione che generalizza la (1.4) con le condizioni (1.5). Seguirà nei n. **3, 4, 5** la dimostrazione di tale teorema. Nel n. **6** verrà giustificata la presenza del termine $\beta(u,\partial u/\partial t)$ nella (1.4) e verranno illustrate le differenti forme che può assumere tale termine per tradurre i tipi diversi di urto che vorremo considerare. Si osserverà infine, come, in ogni caso, le funzioni prese in considerazione soddisfino alle ipotesi più generali del teorema astratto enunciato e dimostrato precedentemente.

2 – Sia V uno spazio di Hilbert, V' il suo duale, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualità tra V e V'. Sia inoltre $V\subset L^2(\Omega)$ (Ω aperto limitato di R^n) con immersione compatta e V denso in $L^2(\Omega)$. Indicheremo inoltre con Γ la frontiera di Ω che supporremo sufficientemente regolare.

Sia K l'insieme chiuso convesso di $L^2(\Omega)$ così definito

$$K=\{v/v\in L^2(\Omega),\ |v|\leqslant M \text{ q.o. in } \Omega\}\,.$$

Indichiamo con $A\in\mathscr{L}(V,V')$ un operatore autoaggiunto tale che $\langle Av,v\rangle\geqslant\alpha\|v\|_V^2$ $(\alpha>0)$, $\forall v\in V$.

Sia inoltre $\beta(\xi,\eta)$ una funzione delle variabili reali ξ, η che goda delle seguenti *proprietà*

(a) $\xi\to\beta(\xi,\eta)$ *sia continua insieme alla sua derivata parziale* β_ξ *per* $\xi\in R^1$ *e* $\forall\eta\in R^1$;

(b) $\eta\to\beta(\xi,\eta)$ *sia uniformemente lipschitziana in ogni insieme compatto di* R^2 *e monotona non decrescente.*

(c) $\beta(\xi,0)=0$, $\forall\xi\in R^1$.

Posto

$$u(t)=\{u(x,t),\ x\in\Omega\},\qquad u'(t)=\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ x\in\Omega\},$$

$$f(t)=\{f(x,t),\ x\in\Omega\},\qquad u''(t)=\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ x\in\Omega\},\qquad \varphi(t)=\{\varphi(x,t),\ x\in\Omega\},$$

consideriamo la disequazione

$$(2.1)\qquad \int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \beta(u(t), u'(t)) - f(t), \varphi(t) - u'(t)\rangle \, dt \geq 0$$

$$\forall \varphi(t) \in L^2(0, T; V),\ \varphi(t) \in K \text{ q.o. e } f(t) \in L^2(0, T; V'),$$

cui si associano le condizioni

$$(2.2)\qquad u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1.$$

Si dirà che $u(t)$ *è soluzione in* $[0, T]$ *del problema* (2.1) (2.2) *relativa al convesso* K (²) *se*

$$(2.3)\qquad u(t),\quad u'(t) \in L^\infty(0, T; V),\quad u'(t) \in K \text{ q.o.}\quad u''(t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Dimostreremo il seguente *teorema*

« *Se* $u_0 \in V \cup L^\infty(\Omega)$, $u_1 \in K$, $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $f(t), f'(t) \in L^2(Q)$ *e se* $\beta(\xi, \eta)$ *soddisfa le* (a), (b), (c), *esiste una ed una sola soluzione del problema* (2.1) (2.2) ».

3 – Dimostriamo *il teorema di unicità* mostrando che il problema (2.1) (2.2) ha al più una soluzione nel senso indicato al n. **2**.

Supponiamo pertanto che esistano due soluzioni $u_1(t)$, $u_2(t)$. Si ha

$$(3.1)\qquad \int_0^T \langle u_1''(t) + Au_1(t) + \beta(u_1(t), u_1'(t)) - f(t), \varphi(t) - u_1'(t)\rangle \, dt \geq 0,$$

$$(3.2)\qquad \int_0^T \langle u_2''(t) + Au_2(t) + \beta(u_2(t), u_2'(t)) - f(t), \varphi(t) - u_2'(t)\rangle \, dt \geq 0.$$

Poniamo

$$\varphi(t) = u_2'(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq s, \qquad \varphi(t) = 0 \quad \text{per } s < t \leq T$$

nella (3.1) e

$$\varphi(t) = u_1'(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq s, \qquad \varphi(t) = 0 \quad \text{per } s < t \leq T$$

(²) Si osservi che se $u'(t) \in K$ segue immediatamente che $|u(x, t)| \leq |u_0(x)| + TM \leq \sup_{x \in \Omega} |u_0(x)| + MT = M_1$.

nella (3.2). Posto inoltre $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ si ottiene

$$\int_0^s \langle \omega''(t) + A\omega(t) + \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t)) \, , \, -\omega'(t)\rangle \, dt \geq 0 \, ,$$

da cui

$$(3.3) \quad \|w'(s)\|_{L^2}^2 + \langle Aw(s), w(s)\rangle \leq -2 \int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t)), w'(t)\rangle \, dt \, .$$

Ma si ha

$$\left| \int_0^s \langle \beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t)), w'(t)\rangle \, dt \right|$$
$$\leq \int_0^s \|\beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t))\|_{L^2} \, \|w'(t)\|_{L^2} dt.$$

E, ricordando che $u'(t) \in K$ e la uniforme lipschitzianità della $\eta \to \beta(\xi, \eta)$ in ogni compatto, risulta (tenendo conto della nota (2))

$$(3.4) \qquad \|\beta(u_1(t), u_1'(t)) - \beta(u_2(t), u_2'(t))\|_{L^2} \leq C_1 \|w(t)\|_V + C_2 \|w'(t)\|_{L^2} \, .$$

Dalla (3.3) tenendo conto della (3.4) si ottiene pertanto

$$\|w'(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|w(s)\|_V^2 \leq 2 \int_0^s \{C_3 \|w(t)\|_V^2 + C_4 \|w'(t)\|_{L^2}^2\} \, dt \quad \forall s \in [0, T],$$

da cui $w(t) \equiv 0$.

4 – Dimostriamo dapprima in questo numero *il teorema di esistenza* enunciato al n. **2** nelle ipotesi in cui $\beta(\xi, \eta)$ sia una funzione continua e limitata in R^2 con le due derivate parziali e tale che $\beta_\eta(\xi, \eta) \geq 0$, $\forall (\xi, \eta) \in R^2$.

Si osservi che, per le ipotesi fatte su β, se $g, h \in L^2(\Omega)$ si ha $\beta(g, h) \in L^2(\Omega)$.

Consideriamo la seguente equazione penalizzata associata alla disequazione (2.1)

$$(4.1) \qquad u_\varepsilon''(t) + Au_\varepsilon(t) + \beta(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon'(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon'(t)) = f(t) \, ,$$

ove σ è l'operatore di penalizzazione relativo al convesso K così definito: $\sigma(v) = v - P_k v$, essendo P_k l'operatore di proiezione da $L^2(\Omega)$ su K. Come è noto l'operatore σ risulta monotono ed emicontinuo da $L^2(\Omega)$ in sè.

Sia inoltre

$$u_\varepsilon(0) = u_0 , \qquad u'_\varepsilon(0) = u_1 . \tag{4.2}$$

Indichiamo con $\{g_j\}$ una base dello spazio V e poniamo $u_{n\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn\varepsilon}(t)\, g_j$.

Consideriamo il sistema approssimato dedotto dalla (4.1)

$$\langle u''_{n\varepsilon}(t) + Au_{n\varepsilon}(t) + \beta(u_{n\varepsilon}(t), u'_{n\varepsilon}(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\,\sigma(u'_{n\varepsilon}(t)) - f(t), g_j\rangle = 0 \tag{4.3}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n) ,$$

con le condizioni iniziali

$$u_{n\varepsilon}(0) = u_{0n\varepsilon} , \qquad u'_{n\varepsilon}(0) = u_{1n\varepsilon} \tag{4.4}$$

tali che

$$\lim_{n\to\infty} u_{0n\varepsilon} \underset{V}{=} u_0 , \qquad \lim_{n\to\infty} u_{1n\varepsilon} \underset{V}{=} u_1 , \qquad \lim_{n\to\infty} Au_{0n\varepsilon} \underset{L^2(\Omega)}{=} Au_0 \qquad u_{1n\varepsilon} \in K . \tag{4.5}$$

Dalle (4.3), moltiplicando per $\alpha'_{jn\varepsilon}$ e sommando si ottiene

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u'_{n\varepsilon}(t)\|^2_{L^2} + \langle Au_{n\varepsilon}(t), u_{n\varepsilon}(t)\rangle\right) + \langle\beta(u_{n\varepsilon}(t), u'_{n\varepsilon}(t)),\ \ u'_{n\varepsilon}(t)\rangle$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\,\langle\sigma(u'_{n\varepsilon}(t)), u'_{n\varepsilon}(t)\rangle = \langle f(t),\ \ u'_{n\varepsilon}(t)\rangle , \tag{4.6}$$

da cui, ricordando la monotonia di σ e della funzione $\eta \to \beta(\xi, \eta)$, risulta

$$\|u'_{n\varepsilon}(t)\|^2_{L^2} + \alpha\|u_{n\varepsilon}(t)\|^2_V \leqslant 2 \int_0^t \|f(\eta)\|_{L^2}\|u'_{n\varepsilon}(\eta)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\eta + \|u_1\|^2_V + \|Au_0\|_{L^2}\,\|u_0\|_V . \tag{4.7}$$

Dalla (4.7) si deducono le

$$\begin{aligned} &\|u_{n\varepsilon}(t)\|_V \leqslant \text{cost}; \qquad \|u'_{n\varepsilon}(t)\|_{L^2} \leqslant \text{cost} && (\text{cost indip. da } n,\ \varepsilon,\ \beta),\\ &\int_0^t \langle\sigma(u'_{n\varepsilon}(t)), u'_{n\varepsilon}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\cdot\ \text{cost} && (\text{cost indip. da } n,\ \varepsilon,\ \beta) . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Deriviamo ora la (4.3) rispetto a t, moltiplichiamo per $\alpha''_{jn\varepsilon}(t)$ e sommiamo; otteniamo

$$\langle u''_{n\varepsilon}(t) + Au'_{n\varepsilon}(t) + \beta(u_{n\varepsilon}(t), u'_{n\varepsilon}(t))' + \frac{1}{\varepsilon}\sigma(u'_{n\varepsilon}(t))' - f(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle = 0 . \tag{4.9}$$

Osserviamo ora che $\langle(\sigma(u'_{n\varepsilon}(t))', u''_{n\varepsilon}(t)\rangle = \langle\sigma'(u'_{n\varepsilon}(t))u''_{n\varepsilon}(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle \geqslant 0$, poichè σ è lipschitziano essendo V uno spazio di Hilbert. Inoltre, ricordando le ipotesi fatte sulla funzione β si ha

$$\langle(\beta(u_{n\varepsilon}(t), u'_{n\varepsilon}(t)))', u''_{n\varepsilon}(t)\rangle = \langle\frac{\partial\beta}{\partial u_{n\varepsilon}} u'_{n\varepsilon}(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle + \langle\frac{\partial\beta}{\partial u'_{n\varepsilon}} u''_{n\varepsilon}(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle,$$

ove

$$\langle\frac{\partial\beta}{\partial u'_{n\varepsilon}} u''_{n\varepsilon}(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle \geqslant 0 \tag{4.10}$$

e

$$|\langle\frac{\partial\beta}{\partial u_{n\varepsilon}} u'_{n\varepsilon}(t), u''_{n\varepsilon}(t)\rangle| \leqslant C_{1\beta}\|u'_{n\varepsilon}(t)\|_{L^2}\|u''_{n\varepsilon}(t)\|_{L^2} , \tag{4.11}$$

essendo $C_{1\beta} = \operatorname{Sup}|\partial\beta/\partial\xi|$.

Dalla (4.9) tenendo conto delle (4.10) (4.11) ed integrando tra 0 e t si ottiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\|u''_{n\varepsilon}(t)\|^2_{L^2} + \alpha\|u'_{n\varepsilon}(t)\|^2_V) &\leqslant \|u''_{n\varepsilon}(0)\|^2_{L^2} + \|Au_1\|_{V'}\|u_1\|_V \\ &+ \int_0^t \{\|f'(\eta)\|_{L^2}\|u''_{n\varepsilon}(\eta)\|_{L^2} + C_1 C_{1\beta}(\|u'_{n\varepsilon}(\eta)\|^2_V + \|u''_{n\varepsilon}(\eta)\|^2_{L^2})\}\, d\eta . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Per ottenere una maggiorazione per $\|u''_{n\varepsilon}(0)\|_{L^2}$ poniamo $t = 0$ nella (4.3) ottenendo: $u''_{n\varepsilon}(0) + Au_{n\varepsilon}(0) + \beta(u_{n\varepsilon}(0), u'_{n\varepsilon}(0)) + (1/\varepsilon)\sigma(u'_{n\varepsilon}(0)) = f(0)$; da cui, essendo $u'_{n\varepsilon}(0) \in K$, risulta

$$\begin{aligned} \|u''_{n\varepsilon}(0)\|_{L^2} &\leqslant \|Au_{n\varepsilon}(0)\|_{L^2} + \|\beta(u_{n\varepsilon}(0), u'_{n\varepsilon}(0)\|_{L^2} + \|f(0)\|_{L^2} \\ &\leqslant \|Au_0\|_{L^2} + \|f(0)\|_{L^2} + \|\beta(u_0, u_1)\|_{L^2} + C_{1\beta}\|u_{n\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2} + C_{2\beta}\|u'_{n\varepsilon}(0) - u_1\|_{L^2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

con $C_{2\beta} = \operatorname{Sup}|\partial\beta/\partial\eta|$.

Ponendo la (4.13) nella (4.12) si ottiene che

$$\begin{aligned} \|u'_{n\varepsilon}(t)\|_V &\leqslant C_{1\beta}(K_1 + K_2\|u_{n\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2}) + C_{2\beta}K_2\|u'_{n\varepsilon}(0) - u_1\|_{L^2} , \\ \|u''_{n\varepsilon}(t)\|_{L^2} &\leqslant C_{1\beta}(K_1 + K_2\|u_{n\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2}) + C_{2\beta}K_2\|u'_{n\varepsilon}(0) - u_1\|_{L^2} , \end{aligned} \tag{4.14}$$

ove le costanti K_1 e K_2 sono indipendenti da n, da ε e da β.

Per la prima delle (4.8) e delle (4.14) e poichè l'immersione di V in L^2 è compatta, si può ammettere che sia

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(\Omega)}{=} u_\varepsilon(t) \qquad \text{unif. in } [0, T] .$$

Allo stesso modo dalla seconda delle (4.8) e delle (4.14) segue

$$\lim_{n\to\infty} u'_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(\Omega)}{=} u'_\varepsilon(t) \qquad \text{unif. in } [0, T] ,$$

e quindi, per il teorema di Fischer-Riesz, possiamo ammettere che risulti

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_{n\varepsilon}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} , \\ &\lim_{n\to\infty} u_{n\varepsilon}(x, t) = u_\varepsilon(x, t) , \end{aligned}\right\} \qquad \text{q.o. in } Q = \Omega\times[0, T] , \tag{4.15}$$

Inoltre per le (4.8) (4.14) si ha pure

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\lim_{n\to\infty}} u'_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;V)}{=} u'_\varepsilon(t) , \qquad \overset{*}{\lim_{n\to\infty}} u''_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;\, L^2(\Omega))}{=} u''_\varepsilon(t), \\ &\overset{*}{\lim_{n\to\infty}} A u_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;V')}{=} A u_\varepsilon . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Inoltre dalle (4.15), per le proprietà dell'operatore σ e della funzione β, si può dedurre che

$$\overset{*}{\lim_{n\to\infty}} \sigma\big(u'_{n\varepsilon}(t)\big) \underset{L^2(0,T;\, L^2(\Omega))}{=} \sigma\big(u'_\varepsilon(t)\big) , \tag{4.17}$$

$$\overset{*}{\lim_{n\to\infty}} \beta\big(u_{n\varepsilon}(t), u'_{n\varepsilon}(t)\big) \underset{L^2(0,T;\, L^2(\Omega))}{=} \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big) . \tag{4.18}$$

Segue quindi dalle (4.16) (4.17) (4.18) che si può passare al limite per $n\to\infty$ nella (4.3) dimostrando così che $u_\varepsilon(t)$ soddisfa ($\forall\varepsilon>0$) l'equazione (4.1).

Osserviamo ora che le stime a priori ottenute sono tutte indipendenti da ε

e pertanto si può ammettere che sia

$$\overset{*}{\lim_{\varepsilon\to 0}} u''_\varepsilon(t) \underset{L^2(0,T;\,L^2(\Omega))}{=} u''(t)\,, \qquad \overset{*}{\lim_{\varepsilon\to 0}} u'_\varepsilon(t) \underset{L^2(0,T;V)}{=} u'(t)\,,$$

$$\overset{*}{\lim_{\varepsilon\to 0}} Au_\varepsilon(t) \underset{L^2(0,T;\,V')}{=} Au(t)\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \text{q.o. in } Q\,.$$

$$\overset{*}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big) \underset{L^2(0,T;\,L^2(\Omega))}{=} \beta\big(u(t), u'(t)\big)\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) \qquad \text{q.o. in } Q\,.$$

Si osservi che la funzione limite $u(t)$ soddisfa pertanto alle limitazioni

$$\|u(t)\|_V \leqslant K_3\,, \qquad \|u'(t)\|_V \leqslant K_1 C_{1\beta}\,, \qquad \|u''(t)\|_{L^2} \leqslant K_1 C_{1\beta}\,, \tag{4.19}$$

ove K_1 e K_3 non dipendono da β.

Occorre ora far vedere che $u'(t) \in K$.

Per questo osserviamo che dalla terza delle (4.8) si può dedurre che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \big(\sigma(u'_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big)_{L^2} \mathrm{d}t = 0\,. \tag{4.20}$$

D'altra parte $\Big($poichè $\int_0^T (v - P_k v, P_k v)_{L^2} \mathrm{d}t \geqslant 0\Big)$ è

$$\int_0^T \big(\sigma(v(t)), v(t)\big)\big)_{L^2} \mathrm{d}t = \int_0^T \big(v(t) - P_k v(t), v(t)\big)_{L^2} \mathrm{d}t$$

$$\geqslant \int_0^T \big(v(t) - P_k v(t), v(t) - P_k v(t)\big)_{L^2} \mathrm{d}t = \|v(t) - P_k v(t)\|^2_{L^2(Q)}\,,$$

da cui per la (4.20)

$$\Big\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - P_k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \Big\|_{L^2(Q)} \leqslant \int_0^T \big(\sigma(u'_\varepsilon(t)), u'_\varepsilon(t)\big)_{L^2} \mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

e quindi $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\sigma(\partial u_\varepsilon(t)/\partial t)\|_{L^2(Q)} = 0.$

Da questa uguaglianza per la monotonia e l'emicontinuità di σ (cfr. [**4**]) segue che $\sigma\big(u'(t)\big) \underset{L^2(0,T;\,L^2(\Omega))}{=} 0 \Rightarrow u'(t) \in K.$

Rimane ora da dimostrare che $u(t)$ soddisfa la (2.1). A questo scopo moltiplichiamo la (4.1) per $\varphi(t) - u'_\varepsilon(t)$ $\big(\varphi(t) \in L^2(0, T; V)$, $\varphi(t) \in K$ q.o.$\big)$ e integriamo tra 0 e T. Tenendo conto della monotonia di σ si ha

$$\int_0^T \langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big) - f(t), \varphi(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt \geqslant 0 ,$$

da cui

$$\int_0^T \langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big), \varphi(t)\rangle\, dt - \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\|u'_\varepsilon(T)\|^2_{L^2} - \tfrac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2} + \tfrac{1}{2}\langle Au_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle$$
$$+ \int_0^T \langle \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big), u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt.$$

Ma

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \{\tfrac{1}{2}\|u'_\varepsilon(T)\|^2_{L^2} + \tfrac{1}{2}\langle Au_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)\rangle - \tfrac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2} - \tfrac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle$$
$$+ \int_0^T \langle \beta\big(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)\big), u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt\}$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\|u'(T)\|^2_{L^2} + \tfrac{1}{2}\langle Au(T), u(T)\rangle - \tfrac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2} - \tfrac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle$$
$$+ \int_0^T \langle \beta\big(u(t), u'(t)\big), u'(t)\rangle\, dt .$$

Confrontando le ultime due disuguaglianze si deduce che $u(t)$ soddisfa la (2.1). Poichè $u(t)$ soddisfa anche le condizioni iniziali si può concludere che il problema (2.1) (2.2) ha una soluzione nel caso in cui $\beta(\xi, \eta)$ soddisfi alle ipotesi fatte all'inizio di questo paragrafo.

5 – Dimostriamo ora il *teorema di esistenza* enunciato al n. **2** nelle ipotesi fatte in tale paragrafo sulla funzione β.

A questo scopo si ponga

$$\tilde\beta(\xi, \eta) = \beta(\xi, \eta) \qquad \text{per } |\xi| \leqslant M_1 \text{ (3) e } \forall\eta$$

e si prolunghi $\tilde\beta(\xi, \eta)$ per $|\xi| > M_1$ in modo che $\xi \to \tilde\beta(\xi, \eta)$ risulti continua e limitata in R^2 insieme a $\tilde\beta_\xi$ mentre $\eta \to \tilde\beta(\xi, \eta)$ mantenga le proprietà di $\eta \to \beta(\xi, \eta)$.

(3) Cfr. nota (2).

Poniamo ora

$$\beta_n^*(\xi,\eta)=\begin{cases}\tilde{\beta}(\xi,\eta) & \text{per } -\infty<\xi<+\infty,\ -n<\eta<n\\ \tilde{\beta}(\xi,n) & \text{per } -\infty<\xi<+\infty,\ \eta\geqslant n\\ \tilde{\beta}(\xi,-n) & \text{per } -\infty<\xi<+\infty,\ \eta\leqslant -n\end{cases}$$

e indichiamo con $\beta_n(\xi,\eta)$ le funzioni $\in C^1(R^2)$ ottenute ($\forall n$) dalle $\beta_n^*(\xi,\eta)$, mediante un opportuno operatore di regolarizzazione agente sulla sola variabile η (cfr. [**2**]$_1$).

Si osservi che risulta

$$|\beta_n(\xi,\eta)|\leqslant|\tilde{\beta}(\xi,\eta)|\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n(\xi,\eta)=\tilde{\beta}(\xi,\eta)\,. \tag{5.1}$$

Inoltre le $\beta_n(\xi,\eta)$ hanno $\forall n$ le seguenti proprietà: $\beta_n(\xi,0)=0$, $\forall\xi$; $\xi\to\beta_n(\xi,\eta)$ è continua e limitata in R^2 insieme a $\partial\beta_n/\partial\xi$ (uniformemente rispetto ad n);

$\eta\to\beta_n(\xi,\eta)$ è continua e limitata in R^2 con $\partial\beta_n/\partial\eta$ e risulta non decrescente.

Consideriamo ora il problema

$$\int_0^T\langle u_n''(t)+Au_n(t)+\beta_n(u_n(t),u_n'(t))-f(t),\varphi(t)-u_n'(t)\rangle\,dt\geqslant 0 \tag{5.2}$$
$$\forall\varphi(t)\in L^2(0,T;V),\ \varphi(t)\in K\ \text{q.o.}$$

$$u_n(0)=u_0\,,\qquad u_n'(0)=u_1\,. \tag{5.3}$$

La soluzione del problema (5.2) (5.3) esiste $\forall n$ per quanto dimostrato al n. **3**.

Osserviamo ora che $u_n'(t)\in K$ e che per $u_n(t)$ sono valide le (4.19) ove ora le costanti sono tutte indipendenti da n per l'uniforme limitatezza (rispetto ad n) di $\partial\beta_n/\partial\xi$.

Tenendo conto anche della (5.1) si deducono pertanto le relazioni

$$\begin{aligned}&\|\beta_n(u_0,u_1)\|_{L^2}\leqslant\|\tilde{\beta}(u_0,u_1)\|_{L^2}\,,\\ &\|u_n(t)\|_V\leqslant\text{cost}\,,\qquad \|u_n'(t)\|_V\leqslant\text{cost}\,,\\ &\|u_n''(t)\|_{L^2}\leqslant\text{cost}\,,\qquad \|\beta_n(u_n(t),u_n'(t))\|_{L^2}\leqslant\text{cost}\,,\end{aligned} \tag{5.4}$$

ove tutte le costanti sono indipendenti da n.

Utilizzando le (5.4) si dimostra infine, procedendo in modo analogo a quanto fatto in [**2**]$_1$, che $\{u_n(t)\}$ converge verso la soluzione del problema (2.1) (2.2).

Osservazione 1. Il teorema di esistenza continua a valere se l'ipotesi (b) (n. **2**) sulla funzione $\eta \to \beta(\xi, \eta)$ si riduce alla sola monotonia ([4]). L'uniforme lipschitzianità in ogni insieme compatto di tale funzione è richiesta infatti solo per la dimostrazione dell'unicità.

6 – Vogliamo ora caratterizzare alcuni tipi di urto possibili specificando quale aspetto può assumere corrispondentemente la funzione $\beta(\xi, \eta)$ che compare nella (1.4). Per esemplificare il discorso consideriamo in un primo momento una sferetta materiale di massa unitaria e raggio δ, di ascissa $u(t) = u$, mobile sull'asse u; supponiamo che tale sferetta (proveniente dalla direzione $u < 0$) urti, nel suo moto, contro un ostacolo che si pensa posto in $u = 0$. Per quanto riguarda la natura dell'ostacolo consideriamo in particolare i seguenti tre casi

(i) l'ostacolo è costituito da un solido perfettamente elastico,

(ii) l'ostacolo è costituito da un fluido,

(iii) l'ostacolo è costituito da un mezzo perfettamente anelastico.

Nel caso (i), detta k la costante elastica del materiale costituente l'ostacolo, è naturale porre $\beta(u(t), u'(t)) = \beta(u(t)) = k(u(t) + |u(t)|)/2$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ o, più in generale $\beta(u(t), u'(t)) = \phi(u(t))$, con $\phi(\xi) \in C^1(R)$, $\phi(\xi) = 0$ per $\xi \leqslant 0$, $\phi'(\xi) \geqslant 0$. Relativamente al caso (ii) risulta ovviamente $\beta(u(t), u'(t)) = 0$, se $u(t) \leqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, mentre, supponendo che la resistenza del fluido sia di tipo viscoso, si porrà $\beta(u(t), u'(t)) = k_1 u'(t)$ se $u(t) \geqslant 2\delta$, $0 \leqslant t \leqslant T$, oppure, se la resistenza si suppone di tipo idraulico $\beta(u(t), u'(t)) = k_1 u'(t) + k_2 u'(t)|u'(t)|$ $u(t) \geqslant 2\delta$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (k_1 e k_2 sono opportune costanti dipendenti dalle caratteristiche del fluido).

Se poi $0 < u < 2\delta$, la resistenza offerta dal fluido dipenderà invece, oltre che dalla velocità della sferetta, anche dal rapporto tra la superficie « bagnata » e la sua superficie totale. In tale intervallo, pertanto, la funzione $\beta(u(t), u'(t))$ potrà essere definita interpolando opportunamente tra il valore 0 e il valore $\beta(2\delta, u'(t))$. Tale interpolazione verrà eseguita in modo che la $\xi \to \beta(\xi, \eta)$ risulti continua insieme dalla sua derivata β_ξ.

Per il caso (iii) sarà ancora naturalmente $\beta(u(t), u'(t)) = 0$ quando $u(t) \leqslant 0$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$ ed inoltre, per un'ovvia caratteristica dell'urto anelastico, sarà $\beta(u(t), u'(t)) = 0$ anche quando $u(t) > 0$ ma $u'(t) < 0$. Sarà invece, analoga-

---

([4]) Cfr. [**6**].

mente al caso (ii): $\beta(u(t), u'(t)) = \psi(u'(t))$ se $u(t) \geqslant 2\delta$, e $u'(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ essendo $\psi(\eta)$ una funzione monotona crescente con $\psi(0) = 0$ e uniformemente lipschitziana in ogni intervallo limitato.

Infine se $0 < u(t) < 2\delta$ si ripetono le considerazioni fatte nel caso (ii) limitatamente a tale intervallo.

Se ora si considerano le vibrazioni trasversali di altri sistemi (corda, verga, membrana, piastra), inizialmente disposti nel semipiano $u \leqslant 0$, in presenza di un ostacolo rappresentato dal piano $u = 0$, sembra naturale, studiando il corrispondente problema di urto come descritto al n. **1**, tradurre la reazione dell'ostacolo con le stesse leggi qui illustrate per il punto materiale (casi (i), (ii), (iii)).

È infine banale constatare che le leggi scelte nei tre casi sopra descritti per la funzione $\beta(u(t), u'(t))$, fanno sì che essa soddisfi in ogni caso alle ipotesi richieste per la validità del teorema di esistenza e unicità enunciato al n. **2**.

A questo proposito si osserva che il teorema ora menzionato è valido in particolare scegliendo ad esempio $V = H_0^1(\Omega)$ e $A = -\Delta$. Con tali scelte e se $n = 2$ le (2.1) (2.2) traducono un problema di urto, contro un ostacolo del tipo considerato sopra, di una membrana fissata al bordo (di una corda fissata agli estremi se $n = 1$), sottoposta all'azione di una forza esterna, quando si faccia l'ipotesi che la velocità della membrana (della corda) non superi ad esempio la velocità della luce.

Se poi $V = H_0^2(\Omega)$ ed $A = \Delta^2$ e se $n = 1$ le (2.1) (2.2) traducono il medesimo problema per una verga incastrata agli estremi (per una piastra incastrata al bordo se $n = 2$).

Osservazione 1. Supponiamo che t_1 e t_2 siano due istanti di tempo tali che $u(x, t_1) \leqslant 0$, $u(x, t_2) \leqslant 0$ e $|\partial u(x, t)/\partial t| < M$ per $x \in \Omega$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T$. Supponiamo inoltre di trovarci nel caso di urto contro un ostacolo elastico (caso (i) di questo §) con $\beta(u, u') = \phi(u) \in C^1$ con $\phi(u) = 0$ se $u \leqslant 0$ e $\phi'(u) \geqslant 0$.

Sussiste allora, come si deduce immediatamente dalla (2.1), la classica « relazione dell'energia »

$$\|u'(t_2)\|_{L^2}^2 + \langle Au(t_2), u(t_2)\rangle = \|u'(t_1)\|_{L^2}^2 + \langle Au(t_1), u(t_1)\rangle + \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), u'(t)\rangle \, dt .$$

Osserviamo che negli altri casi di urto questa relazione non può ovviamente sussistere essendovi, durante l'urto, dissipazione di energia.

Osservazione 2. Lo studio eseguito nei paragrafi precedenti è stato suggerito dal problema (che interessa in particolare la scienza delle costruzioni) di un cavo che, durante il suo moto, urta contro un ostacolo fisso (terreno, superficie liquida, ecc.).

Parecchi autori si sono recentemente occupati del problema del moto di un sistema in presenza di ostacoli (cfr. ad esempio Amerio-Prouse [**2**]$_2$, Amerio [**1**], Citrini [**3**], Schatzman [**7**], Reder [**5**]), tuttavia in questi lavori l'ostacolo viene sempre supposto indeformabile (ad eccezione di un caso di ostacolo puntiforme considerato in [**5**]) e, data la complessità del problema, vengono ottenuti risultati in casi molto particolari.

Il fatto di considerare l'ostacolo deformabile permette di superare alcune difficoltà in quanto, in tal caso, la reazione del vincolo non è una distribuzione come nel caso di un vincolo indeformabile, ma è una funzione della deformazione e della velocità di deformazione. Si riescono così ad ottenere, come si è visto, teoremi di esistenza e unicità della soluzione sotto ipotesi abbastanza generali. E' allora naturale pensare di ottenere la soluzione del problema dell' urto contro un ostacolo indeformabile come limite di soluzioni corrispondenti a urto contro ostacoli « sempre meno deformabili »; questo problema sarà affrontato in un prossimo lavoro.

Bibliografia

[**1**] L. Amerio: [•]$_1$ *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante,* Pubbl. IAC **109** (1976); [•]$_2$ *Continuous solutions of the problem of a string vibrating againts an obstacle* (in corso di stampa su Rend. Mat. Univ. Padova).

[**2**] L. Amerio and G. Prouse: [•]$_1$ *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **44** (1968), 491-496; [•]$_2$ *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle,* Rend. Mat. (6) **8** (1975), 563-585.

[**3**] C. Citrini, *Sull'urto parzialmente elastico od anelastico di una corda vibrante contro un ostacolo,* Atti Acc. Naz. Lincei (8) **59** (1975), n. 5, 368-376 e n. 6' 667-676.

[**4**] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires,* Dunod et Gauthier-Villars, Paris 1969.

[**5**] C. Reder, *Etude qualitative d'un problème hyperbolique avec contrainte unilatérale,* Thèse de doctorat, Bordeaux 1979.

[**6**] F. Rolandi and A. Zaretti, *Su una disequazione di evoluzione con termine dissipativo discontinuo,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 177-187.

[**7**] M. Schatzman, *Problème unilateraux d'évolution du 2-ème ordre en temps,* Thèse de doctorat, Paris 1979.

Sommario

Si studiano le vibrazioni trasversali di un sistema dinamico mono o bi-dimensionale in presenza di un ostacolo deformabile. Si associa al problema una disequazione variazionale e si dimostrano esistenza ed unicità per la soluzione corrispondente ad un consueto problema di Cauchy-Dirichlet.

* * *