Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 1-8

MARIO GIONFRIDDO (*)

Ipergrafi i cui attachment-hypergraphs hanno p-sezioni complete (**)

1 - Sia $\boldsymbol{H}=(X, \mathscr{E})$ un *ipergrafo* qualsiasi, f una biiezione di $\mathscr{E}$ in $N_m=\{1, 2, \dots, m\}$, E_i il simplesso di $\boldsymbol{H}$ tale che $f(E_i)=i$. Si dirà *IM-grafo* (*intersection multigraph*) di $\boldsymbol{H}$ il multigrafo $\boldsymbol{H}_{IM}=(\mathscr{E}, S)$ tale che per ogni vertice x di $\boldsymbol{H}$, $x \in E_i \cap E_j$ $(i \neq j)$, esista in esso uno spigolo di estremi E_i, E_j [**8**]. Se $\boldsymbol{H}$ è uniforme, $\boldsymbol{H}_{IM}$ è isomorfo al multigrafo $I^*(\boldsymbol{H})$, *commutato stretto* di $\boldsymbol{H}$ definito da F. Speranza in [**10**]$_2$. Se $i>1$, si dirà *i-attachment-hypergraph* di $\boldsymbol{H}$ l'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[i]}=(X_i, \mathscr{E}_i)$ tale che $X_i=\{x \in X: x \in E_i \cap E_j,\ j<i\}$, $\mathscr{E}_i=\{F: F=E_i \cap E_j,\ j<i\}$; per $i=1$, $\boldsymbol{H}_{[1]}$ sarà l'ipergrafo $(E_1, \{E_1\})$ [**3**] [**4**]$_2$. Se $0 \leqslant p \leqslant r(X)-1$ ove $r(X)$ è il rango di $\boldsymbol{H}$, per *grafo p-sezione* [risp. *grafo p-sezione II*] di $\boldsymbol{H}$ s'intenderà l'ipergrafo $\boldsymbol{H}^{/p}$ [risp. $\boldsymbol{H}^{//p}$] avente per simplessi i sottoinsiemi F di X, $|F|=p+1$, contenuti in *almeno* un [risp. in *ciascun*] $E \in \mathscr{E}$ e per vertici gli estremi di tali simplessi F [**10**]$_{1,2,3}$. Si dirà *k-ciclo* di $\boldsymbol{H}$ una coppia $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ nella quale $\boldsymbol{A}=(F_1, \dots, F_r)$, $\boldsymbol{B}=(E_1, \dots, E_r)$, $r>1$, sono due r-ple tali che

(i) $\forall i \in N_r \quad E_i \in \mathscr{E},\ F_i \subset E_i \cap E_{i-1}$ (1), $|F_i|=k+1<|E_i|$;

(ii) $\forall i, j \in N_r \quad i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j,\ F_i \neq F_j$ [**4**]$_2$.

Un k-ciclo si dirà *significativo* se $r>2$ [**4**]$_2$ [**5**] [**8**]. Un multigrafo G privo di cicli significativi si dirà *multiforest*. Una multiforest connessa si dirà *multitree*. Per *maximal spanning multiforest* (multitree) di un multigrafo G s'intenderà una multiforest (multitree) parziale di G avente il massimo numero possibile

---

(*) Indirizzo: Corso delle Province 50, 95127 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 3-IV-1978.

(1) Se $i=1$, s'intende $i-1=r$.

di spigoli [**8**]. Un ipergrafo $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$, uniforme di rango v, di ordine u, si dirà *completo* (o *v-completo*), e s'indicherà con K_u^v, se $\mathscr{E} = \boldsymbol{P}_v(X)$ (²); se $v = 2$, K_u^2 s'indicherà con K_u (grafo completo con u vertici).

In questo lavoro introdurremo il concetto di ***K**-hypertree* o ***K**-HT*. Alla classe di tali ipergrafi appartengono i *k-trees* $[\mathbf{1}]_{1,2}$ gli *(m; n)-trees* [**3**], gli *ipergrafi privi di cicli significativi* [**5**] [**8**]. Dopo aver dato alcune caratterizzazioni e dimostrato alcune proprietà dei ***K**-HT*, si estendono ad essi alcuni risultati stabiliti da M. Lewin [**8**] e da M. Las Vergnas [**7**] per gli ipergrafi privi di cicli significativi.

2 – Sia $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo semplice, connesso, privo di simplessi di cardinalità uno (³). Si dirà che $\boldsymbol{H}$ è un *hypertree* se esiste una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_m$ tale che per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m$ l'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[i]}$ risulta connesso. Si dirà che un hypertree $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/p}$*-hypertree* o un $\boldsymbol{K}^{/p}$*-HT* [risp. un $\boldsymbol{K}^{//p}$*-hypertree* o un $\boldsymbol{K}^{//p}$*-HT*], per $p \geqslant 0$, se per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m$ esiste il grafo p-sezione di $\boldsymbol{H}_{[i]}$ [risp. il grafo p-sezione II] ed è isomorfo a $K_{|X_i|}^{p+1}$ (⁴). Se $p = 0$ e $m > 1$, per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m - \{1\}$ deve, inoltre, esistere un indice $j < i$ tale che $X_i = E_i \cap E_j$.

Nel seguito si porrà, relativamente ad un ipergrafo $\boldsymbol{H}$,

$$w(\boldsymbol{H}) = \min\{r(X_i) - 1 : i \in \boldsymbol{N}_m\}\,,$$

ove $r(X_i)$ è il rango di $\boldsymbol{H}_{[i]}$. Se non vi sarà luogo a confusione, $w(\boldsymbol{H})$ s'indicherà più semplicemente con w. Salvo avviso contrario, inoltre, considereremo sempre ipergrafi semplici, connessi, privi di simplessi di cardinalità uno (³).

Teorema 2.1. *Se $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ è un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT, allora $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT. Non sussiste il viceversa.*

Dim. Si osservi che se $\boldsymbol{M}$ è un qualsiasi ipergrafo il cui rango è maggiore di p ed E è un simplesso di $\boldsymbol{M}^{//p}$, di molteplicità s, allora E è anche simplesso di $\boldsymbol{M}^{/p}$ (ma di molteplicità uno) $[\mathbf{10}]_2$. Ne segue che, se per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m$ l'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$ è isomorfo a $K_{|X_i|}^{p+1}$, anche $\boldsymbol{H}_{[i]}^{/p}$ è isomorfo a $K_{|X_i|}^{p+1}$; da cui la prima parte della tesi. Per provare che non sussiste il viceversa, si consideri l'ipergrafo $\boldsymbol{B} = (Z, \mathscr{B})$ tale che $Z = \{z_1, \ldots, z_6\}$, $\mathscr{B} = \big\{\{z_i, \ldots, z_{i+3}\} : i = 1, 2, 3\big\}$.

(²) $\boldsymbol{P}_v(X) = \{F : F \subseteq X,\ |F| = v\}$.

(³) Tali condizioni non ledono la generalità.

(⁴) Si può dare una definizione equivalente considerando $\boldsymbol{K}$ come un insieme di ipergrafi K_u^v ed affermando che $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/p}$*-HT* [$\boldsymbol{K}^{//p}$*-HT*] se esiste una biiezione di $\mathscr{E}$ in $\boldsymbol{N}_m$ tale che per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m$ $\boldsymbol{H}_{[i]}^{/p}$ [$\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$] esiste ed è isomorfo ad un elemento di $\boldsymbol{K}$ [**3**], $[\mathbf{4}]_2$.

Se f è la biiezione di $\mathscr{B}$ in N_3 tale che $f(\{z_i, \ldots, z_{i+3}\}) = i$, $i = 1, 2, 3$, si può constatare che H è un $K^{/1}$-HT, ma non un $K^{//1}$-HT (5).

3 – In questo numero daremo alcune caratterizzazioni dei $K^{/p}$-HT e dei $K^{//p}$-HT.

Teorema 3.1. *Sia $H = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo* (semplice, connesso, privo di simplessi di cardinalità uno (3)) *con $m = |\mathscr{E}| > 1$. Siano, inoltre, f una biiezione di $\mathscr{E}$ in N_m, p un intero tale che $0 \leqslant p \leqslant w$. Dimostriamo che le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(A) *H è un $K^{/p}$-HT.*

(B) *Per ogni $i \in N_m - \{1\}$ esiste un $j < i$ tale che $X_i = E_i \cap E_j$.*

(C) *L'ipergrafo $\langle X - \hat{E}_m \rangle$ (6) è un $K^{/p}$-HT ed esiste un $j < m$ tale che $X_m = E_m \cap E_j$.*

Dim. (A) $\Rightarrow$ (B). Sia $i \in N_m - \{1\}$. Per ogni $j < i$ tale che $E_j \cap E_i \neq \emptyset$, si ha immediatamente $E_j \cap E_i \subseteq X_i$. Si osservi che è $X_i \neq \emptyset$, poichè H è connesso. Proviamo che esiste almeno un $j < i$ tale che $X_i \subseteq E_i \cap E_j$. Se $p = 0$, la tesi è immediata. Sia $p > 0$. Siano, inoltre, $i1, i2, \ldots, in$ gli indici minori di i tali che $i1 < i2 < \ldots < in$, $E_i \cap E_{iu} \neq \emptyset$, $\forall u \in N_n$.

Poniamo $F_{iu} = E_i \cap E_{iu}$. Se $n = 1, 2$ la tesi è di facile verifica. Sia $n > 2$. Fissato $i2$, dimostriamo che si ha $F_{i1} \subseteq F_{i2}$ oppure $F_{i2} \subseteq F_{i1}$. Siano, infatti, $x_1 \in F_{i1} - F_{i2}$, $x_2 \in F_{i2} - F_{i1}$. Necessariamente, per la completezza di $H^{/p}_{[i]}$, deve esistere un indice $u \in N_n - \{1, 2\}$ tale che $x_1, x_2 \in F_{iu}$. Se $v = \min \{u\colon x_1, x_2 \in F_{iu}\}$, si può constatare che in $H^{/p}_{[v]}$ i vertici x_1, x_2 non sono adiacenti, dunque $H^{/p}_{[v]}$ non può essere isomorfo a $K^{p+1}_{|X_v|}$. In generale, fissato im, $m > 1$, se $k \in N_{m-1}$ è tale che $\bigcup_{u=1}^{m-1} F_{iu} \subseteq F_{ik}$, si ha $F_{im} \subseteq F_{ik}$ oppure $F_{ik} \subseteq F_{im}$. Infatti, in modo analogo a come fatto in precedenza, se $x_m \in F_{im} - F_{ik}$, $x_k \in F_{ik} - F_{im}$, esiste necessariamente un indice $u \in N_n - N_m$ tale che $x_k, x_m \in F_{iu}$. Se $v = \min \{u\colon x_k, x_m \in F_{iu}\}$, si può constatare che l'ipergrafo $H^{/p}_{[v]}$ non può essere isomorfo a $K^{p+1}_{|X_v|}$, poichè in esso i vertici x_k, x_m non sono adiacenti. In conclu-

(5) Infatti in $H^{//1}_{[3]}$ esistono due spigoli in parallelo.

(6) $\hat{E}_m = \{x \in E_m\colon g(x) = 1\}$; $\langle X - \hat{E}_m \rangle$ è l'ipergrafo $\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i, \mathscr{E} - \{E_m\}\right)$: ossia l'ipergrafo ottenuto da H con la soppressione di tutti i vertici di E_m aventi grado uno.

sione esiste un indice $k \in \boldsymbol{N}_n$ tale che $F_{iu} \subseteq F_{ik}$ per ogni $u \in \boldsymbol{N}_n$. Da cui $X_i = \bigcup_{u=1}^{h} F_{iu} \subseteq F_{ik} = E_i \cap E_{ik}$ e la tesi risulta così provata.

(B) $\Rightarrow$ (C). Per ogni $i \in \boldsymbol{N}_{m-1} - \{1\}$, X_i è un simplesso di $\boldsymbol{H}_{[i]}$. Ogni $(p+1)$-pla di vertici di X_i è, dunque, un simplesso di $\boldsymbol{H}_{[i]}^{/p}$. Se $p = 0$, inoltre, si ha $X_i = E_j \cap E_i$. Ne segue che $\langle X - \hat{E}_m \rangle$ è un $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT. Dalla (B), infine, per $i = m$ si ha la seconda parte della tesi.

(C) $\Rightarrow$ (A). Ogni $(p+1)$-pla di vertici di X_m è un simplesso di $\boldsymbol{H}_{[m]}^{/p}$. Se $p = 0$, $X_m = E_j \cap E_m$. L'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[m]}^{/p}$ è, dunque, isomorfo a $K_{|X_m|}^{p+1}$. Da cui la tesi.

Teorema 3.2. *Nelle medesime ipotesi del* Teor. 3.1, *sono equivalenti le seguenti proposizioni.*

(A)′ *$\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT.*

(B)′ *Per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m - \{1\}$ e per ogni $j < i$, se $|E_i \cap E_j| \geqslant p + 1$ allora $X_i = E_i \cap E_j$.*

(C)′ *L'ipergrafo $\langle X - \hat{E}_m \rangle$ è un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT e per ogni $j < m$ tale che $|E_j \cap E_m| \geqslant p + 1$ si ha $X_m = E_m \cap E_j$.*

Dim. (A)′ $\Rightarrow$ (B)′. Dai Teoremi 2.1, 3.1, si ha che (A)′ $\Rightarrow$ (A) $\Rightarrow$ (B). Dunque, per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m - \{1\}$, esiste almeno un $j < i$ tale che $X_i = E_i \cap E_j$. Dimostriamo che per ogni $u \in \boldsymbol{N}_{i-1}$, $u \neq j$, tale che $|E_i \cap E_u| \geqslant p + 1$, si ha $X_i = E_i \cap E_u$. Sia $E_i \cap E_u \subset X_i$. Ogni sottoinsieme di $E_i \cap E_u$ è sottoinsieme di $E_i \cap E_j$. Ne segue che se $F \subseteq E_i \cap E_u$, $|F| = p + 1$, allora F è un simplesso di $\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$ di molteplicità $S \geqslant 2$, e quindi l'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$ non può essere isomorfo a $K_{|X_i|}^{p+1}$. Si ha, dunque, $X_i = E_i \cap E_u$; da cui la (B)′.

(B)′ $\Rightarrow$ (C)′. Sia $i \in \boldsymbol{N}_{m-1} - \{1\}$. Poichè $0 \leqslant p \leqslant w$, esiste almeno un $j < i$ tale che $|E_i \cap E_j| \geqslant p + 1$. Dalle ipotesi segue che X_i è l'unico simplesso di $\boldsymbol{H}_{[i]}$ avente cardinalità maggiore o uguale a $p + 1$. L'insieme dei simplessi di $\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$ è, dunque, $\boldsymbol{P}_{p+1}(X_i)$ e quindi $\boldsymbol{H}_{[i]}^{//p}$ risulta isomorfo a $K_{|X_i|}^{p+1}$. Dalla (B)′, per $i = m$, si ha la seconda parte della tesi.

(C)′ $\Rightarrow$ (A)′. Per ogni $j < m$, se $|E_m \cap E_j| \geqslant p + 1$, allora $X_m = E_m \cap E_j$. Ne segue che X_m è l'unico simplesso di $\boldsymbol{H}_{[m]}$ avente cardinalità maggiore o uguale a $p + 1$, e quindi l'insieme dei simplessi di $\boldsymbol{H}_{[m]}^{//p}$ è costituito da $\boldsymbol{P}_{p+1}(X_m)$. L'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[m]}^{//p}$ risulta così isomorfo a $K_{|X_m|}^{p+1}$. Da cui la tesi.

Dalla (C) del Teor. 3.1 e dalla (C)' del Teor. 3.2 si deducono due definizioni per induzione (su m) dei $\boldsymbol{K}^{/p}$ e $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT.

(I) Un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ con un solo simplesso è un $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT. Un ipergrafo $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT, con $m > 1$ simplessi, si ottiene da un ipergrafo $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT con $m-1$ simplessi aggiungendo un simplesso E_m in modo che, se X è l'insieme dei vertici di tale ipergrafo, esista un $j < m$ tale che $E_m \cap X \subseteq E_j$.

(II) Un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ con un solo simplesso è un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT. Un ipergrafo $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT, con $m > 1$ simplessi, si ottiene da un ipergrafo $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT con $m-1$ simplessi aggiungendo un simplesso E_m in modo che, detto X l'insieme dei vertici di tale ipergrafo, per ogni $j < m$ se $|E_m \cap E_j| \geqslant p+1$ allora $E_m \cap X \subseteq E_j$, ed inoltre si abbia $r(X_m) \geqslant p+1$.

I seguenti teoremi sono conseguenze delle precedenti caratterizzazioni.

Teorema 3.3. *Se $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT, allora $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/q}$-HT, per ogni q,* $0 \leqslant q \leqslant w$.

Dim. Se $m = 1$, $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/q}$-HT, qualunque sia q, $0 \leqslant q \leqslant w$. Se $m > 1$ la dimostrazione segue direttamente dalla (B) del Teor. 3.1, ove si consideri che tale proposizione è indipendente da p $(0 \leqslant p \leqslant w)$.

Teorema 3.4. *Se $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT, allora $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//q}$-HT, per ogni q,* $p \leqslant q \leqslant w$. *Un $\boldsymbol{K}^{//q}$-HT non è necessariamente un $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT.*

Dim. Se $m = 1$, $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//q}$-HT, qualunque sia q, $0 \leqslant q \leqslant w$. Sia $m > 1$. La prima parte della tesi segue direttamente dalla (B') del Teor. 3.2, ove si osservi che se essa è verificata per un certo p, allora essa è anche verificata per ogni $q \geqslant p$ (s'intende $q \leqslant w$). Per provare la seconda parte, consideriamo gli ipergrafi $\boldsymbol{B} = (Y, \mathscr{B})$, $\boldsymbol{D} = (Y, \mathscr{D})$, tali che $Y = \{y_1, \ldots, y_6\}$, $\mathscr{B} = \{\{y_i, \ldots, y_{i+3}\}: i = 1, 2, 3\}$, $\mathscr{D} = \{\{y_2, y_3, y_4, y_6\}, \{y_i, \ldots, y_{i+3}\}, i = 1, 2\}$. Se f è la biiezione di $\mathscr{B}$ in $\boldsymbol{N}_3$ tale che $f(\{y_i, \ldots, y_{i+3}\}) = i$, $i = 1, 2, 3$, si può constatare che $\boldsymbol{B}$ è un $\boldsymbol{K}^{//2}$-HT, ma non un $\boldsymbol{K}^{//1}$-HT (7). Se, invece, f è la biiezione di $\mathscr{D}$ in $\boldsymbol{N}_3$ tale che $f(\{y_i, \ldots, y_{i+3}\}) = i$, $i = 1, 2$, $f(\{y_2, y_3, y_4, y_6\}) = 3$, si può provare che $\boldsymbol{D}$ è un $\boldsymbol{K}^{//j}$-HT, per ogni $j = 0, 1, 2$, e che $w = 2$. Da cui la tesi.

Teorema 3.5. *Un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ con $m > 1$ simplessi è un $\boldsymbol{K}^{//q}$-HT, qualunque sia q, $0 \leqslant q \leqslant w$, se e solo se per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m - \{1\}$ e per ogni $j < i$ tale che $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ si abbia $X_i = E_i \cap E_j$.*

---

(7) Infatti in $\boldsymbol{H}^{//1}_{[3]}$ esistono spigoli in parallelo.

Dim. Se $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//q}$-HT, per ogni $q = 0, 1, \ldots, w$, $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//0}$-HT e la tesi segue dalla (B)′ del Teor. 3.2. Viceversa, se per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m - \{1\}$ e per ogni $j < i$ tale che $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, si ha $X_i = E_i \cap E_j$, per la (B)′ del Teor. 3.2 $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//0}$-HT. La tesi segue allora dal Teor. 3.4.

Dalla (B) del Teor. 3.1 segue che i $\boldsymbol{K}^{/p}$-HT non dipendono dal parametro p. Tali ipergrafi si potranno, dunque, dire più semplicemente $\boldsymbol{K}^{/}$-HT o anche, osservando che i $\boldsymbol{K}^{//p}$-HT sono $\boldsymbol{K}^{/}$-HT, $\boldsymbol{K}$-HT.

4 – Per $\boldsymbol{K}$-*hyperforest* o $\boldsymbol{K}$-HF s'intenderà un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ con $d \geqslant 1$ componenti connesse Y_i, ognuna delle quali genera un ipergrafo $\langle Y_i \rangle = (Y_i, \mathscr{F}_i)$ che sia $\boldsymbol{K}$-HT. *Se* $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ *è un ipergrafo privo di cicli significativi* (nel seguito ipergrafo p.c.s.) *con* $d \geqslant 1$ *componenti connesse*, $k = \max\{|E_i \cap E_j| : E_i, E_j \in \mathscr{E}, i \neq j\}$, $T = (\mathscr{E}, L)$ *una maximal spanning multiforest di* $\boldsymbol{H}_{\mathrm{IM}}$ (IM-Grafo di $\boldsymbol{H}$), *sussistono le seguenti relazioni*

$$\text{(L)} \qquad |X| + |L| = \sum_{E \in \mathscr{E}} |E|,$$

$$\text{(LV)} \qquad \sum_{E \in \mathscr{E}} (|E| - k) \leqslant |X| - kd,$$

dovute rispettivamente a M. Lewin [**8**] ed a M. Las Vergnas [**7**]. La (LV) generalizza un risultato di L. Lovàsz [**9**].

Dimostreremo che un ipergrafo p.c.s. è un $\boldsymbol{K}$-HT e che per i $\boldsymbol{K}$-HT sussistono la (L) e la (LV).

Teorema 4.1. *Se* $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ *è un ipergrafo p.c.s.*, $\boldsymbol{H}$ *è un* $\boldsymbol{K}$-HF.

Dim. Sia $\langle Y_i \rangle = (Y_i, \mathscr{F}_i)$ l'ipergrafo generato dalla componente i-ma di $\boldsymbol{H}$. Se $m_i = |\mathscr{F}_i| = 1$, $\langle Y_i \rangle$ è un $\boldsymbol{K}$-HT. Sia $m_i > 1$. Indichiamo con E_1 un qualsiasi simplesso di $\langle Y_i \rangle$, con E_2 [risp. con E_j, $j > 2$] un simplesso di $\langle Y_i \rangle$ tale che $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ [risp. $(E_1 \cup \ldots \cup E_{j-1}) \cap E_j \neq \emptyset$]. Proviamo che $\langle Y_i \rangle$ è un $\boldsymbol{K}$-HT, verificando che per esso sussiste la (B) del Teor. 3.1. Sia $u \in \boldsymbol{N}_{m_i} - \{1\}$. Se $|X_u| = 1$, la (B) è senz'altro verificata. Sia $|X_u| > 1$. Se la (B) non fosse vera, necessariamente dovrebbero esistere $x, y \in X_u$, $v, t < u$, tali che $x \in E_v - E_t$, $y \in E_t - E_v$. Per la connessione dell'ipergrafo $\left(\bigcup_{i=1}^{u-1} E_i, \{E_1, \ldots, E_{u-1}\}\right)$ esisterebbe allora in $\boldsymbol{H}$ un ciclo significativo comprendente E_u, E_v, E_t. Contro le ipotesi.

Teorema 4.2. *Sia* $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ *un* $\boldsymbol{K}$-HF *con* $d \geqslant 1$ *componenti connesse,*

$T = (\mathscr{E}, L)$ *una maximal spanning multiforest di* $\boldsymbol{H}_{\mathrm{IM}}$. *Si ha*

$$\text{(L)} \qquad |X| + |L| = \sum_{E\in\mathscr{E}} |E| .$$

Dim. Se la (L) sussiste per ogni componente connessa di $\boldsymbol{H}$, allora essa sussiste per tutto $\boldsymbol{H}$. Possiamo così supporre che $\boldsymbol{H}$ sia connesso. Se $m = |\mathscr{E}| = 1$, la (L) è senz'altro vera (si ha $|L| = 0$). Supponiamo che essa sia vera per ogni $\boldsymbol{K}$-HT con m simplessi, dimostriamo che essa è vera anche per $\boldsymbol{K}$-HT con $m+1$ simplessi. Se $\boldsymbol{H}' = (X', \mathscr{E}')$ è un $\boldsymbol{K}$-HT con $m+1$ simplessi, esso si può ottenere da un $\boldsymbol{K}$-HT $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ con m simplessi aggiungendo un simplesso E_{m+1} tale che $E_{m+1} \cap X \subseteq E_j$, per almeno un $j < m+1$. Esiste, dunque, un $j < m+1$ tale che $X_{m+1} = E_{m+1} \cap E_j$. Se $h = |E_{m+1} \cap E_j|$, un maximal spanning multitree di $\boldsymbol{H}'_{\mathrm{IM}}$, $T' = (\mathscr{E}', L')$, si può ottenere da un maximal spanning multitree di $\boldsymbol{H}_{\mathrm{IM}}$, $T = (\mathscr{E}, L)$, aggiungendo il vertice E_{m+1} ed h spigoli di estremi E_{m+1}, E_j. Si ha

$$|X'| + |L'| = |X| + |E_{m+1}| - h + |L| + |h| = |E_{m+1}| + \sum_{E\in\mathscr{E}} |E| = \sum_{E\in\mathscr{E}'} |E| ,$$

da cui la tesi.

Teorema 4.3. *Se* $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ *è un* $\boldsymbol{K}$-HF *con* $d \geqslant 1$ *componenti connesse,* $k = \max\{|E_i \cap E_j| : E_i, E_j \in \mathscr{E},\ i \neq j\}$, *si ha*

$$\text{(LV)} \qquad \sum_{E\in\mathscr{E}} (|E| - k) \leqslant |X| - kd .$$

Dim. Sia m_i il numero di simplessi contenuti nella componente i-ma di $\boldsymbol{H}$. Se $T = (\mathscr{E}, L)$ è una maximal spanning multiforest di $\boldsymbol{H}_{\mathrm{IM}}$, le componenti connesse di T hanno ordine $m_1, \ldots, m_d$. Si ha

$$|L| \leqslant \sum_{i=1}^{d} (m_i - 1)\cdot k = (m - d)\cdot k ,$$

da cui, per il Teor. 4.2

$$\sum_{E\in\mathscr{E}} |E| - |X| = |L| \leqslant (m - d)\cdot k , \qquad \sum_{E\in\mathscr{E}} |E| - mk \leqslant |X| - dk ,$$

$$\sum_{E\in\mathscr{E}} (|E| - k) \leqslant |X| - dk .$$

Bibliografia

[1] L. W. Beineke and R. E. Pippert: [•]$_1$ *Characterizations of 2-dimensional trees*, in « The many facets of graph theory » (G. Chartrand, S. F. Kapoor, eds.), Lectures Notes in mathematics **110**, Springer Verlag, Berlin 1969, 263-270; [•]$_2$ *The number of labeled k-dimensional trees*, J. Combinatorial Theory **6** (1969), 200-205.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] A. K. Dewdney, *Higher-dimensional tree structure*, J. Combinatorial Theory **17** (1974), 160-169.

[4] M. Gionfriddo: [•]$_1$ *Ipergrafi uniformi ϱ-planari ed ipergrafi di tipo UC_p*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 99-107; [•]$_2$ *Ipergrafi privi di r-cicli significativi e* ***K****-iperalberi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 259-268.

[5] P. Hansen et M. Las Vergnas, *Une proprieté des hypergraphes sans cycles de longueur supérieure a deux*, Proc. Coll. Bruxelles sur la Théorie des graphes (1973), 315-317.

[6] F. Harary and E. M. Palmer, *On acyclic simplical complexes*, Matematika **15** (1968), 115-122.

[7] M. Las Vergnas, *Problèmes de couplages et problèmes hamiltoniens en théorie des graphes*, Thèse, Paris 1972.

[8] M. Lewin, *On hypergraphs without significant cycles*, J. Combinatorial Theory **20** (1976), 80-83.

[9] L. Lovàsz, *Graphs and set systems*, in « Beitrage zur Graphentheorie » (H. Sachs, H. S. Voss, H. Walther eds.) Teubner, Leipzig 1968.

[10] F. Speranza: [•]$_1$ *Omomorfismi tra grafi e grafi moltiplicativi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **71** (1966), 291-294; [•]$_2$ *Su alcuni singrammi che si possono associare ad un dato singramma pluridimensionale*, Studia Ghisleriana, Pavia (1967); [•]$_3$ *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes*, Colloquium Mathematicum (2) **27** (1973), 269-274.

Sommario

Si studia una particolare classe di ipergrafi. Gli elementi di tale classe, detti **K***-hypertrees, sono ipergrafi i cui « attachment-hypergraphs » hanno p-sezione completa. Tra questi vengono studiati i* K^{II_p}*-hypertrees: ossia quelli i cui attachment-hypergraphs hanno p-sezione II completa. Si danno alcune caratterizzazioni di tali ipergrafi e si estendono ad essi alcuni risultati di M. Lewin* [8] *e di M. Las Vergnas* [7]*, noti per gli ipergrafi privi di cicli significativi.*

* * *