Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 469-484

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su alcune varianti e generalizzazioni di una formula di balistica terminale di Resal (**)

1 - Premessa

1.1 – In due recenti Note, [**10**]$_{2,3}$, ho avuto occasione di citare le seguenti formule per la resistenza w alla penetrazione di un proiettile in un mezzo solido

$$w = c_0 S \qquad \text{(Eulero, 1753)}, \tag{1.1}$$

$$w = S(c_0 + c_2 v^2) \qquad \text{(Poncelet, 1839)}, \tag{1.2}$$

$$w = S(c_1 v + c_2 v^2) \qquad \text{(Resal, 1895)}, \tag{1.3}$$

$$w = S(1 + k v_0)(c_0 + c_2 v^2) \qquad \text{(Levi-Civita, 1906)}, \tag{1.4}$$

dove S è l'area della massima sezione trasversale del proiettile, c_0, c_1, c_2, k sono costanti positive, v è il modulo della velocità del proiettile nel mezzo e v_0 è il modulo della velocità di impatto. E precisamente, in [**10**]$_2$ ho considerato alcune generalizzazioni della (1.4) e le relative formule di *penetrazione totale*, quando si tenga conto, oltre che del coefficiente k di Levi-Civita (*coefficiente di deformazione impulsiva*) anche di un secondo coefficiente $\lambda > 0$ (*coefficiente di deformazione progressiva*), mentre in [**10**]$_3$ ho considerato le formule dei *tempi di penetrazione* relative alla (1.2) e alla (1.4), sia per il tempo generico t (cui corrisponde la velocità v [1] e la penetrazione x), sia per il *tempo di penetrazione totale* T (cui corrisponde $v = 0$ e $x = X$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 6-XI-1979.
(1) Diremo, d'ora in poi, *velocità* anziché *modulo della velocità*.

Mediante la (1.4) (ottenuta considerando, entro certi limiti, il proiettile come un solido elastico) il Levi-Civita [**4**]$_1$ trovava per la penetrazione totale X la seguente espressione

$$X = h\,\frac{\log(1+\beta v_0^2)}{1+kv_0} \tag{1.5}$$

(dove h, k, β sono costanti positive dipendenti dal proiettile e dal mezzo) che si riduceva, per $k = 0$, alla classica formula di Poncelet

$$X = h\log(1+\beta v_0^2) \tag{1.6}$$

$\bigl(h = 1/(2c_2S), \beta = c_2/c_0\bigr)$, e dava spiegazione di un apparente paradosso (²), originato dall'illecito uso della (1.6) per elevati valori di v_0.

Il Levi-Civita si limitava poi ad osservare (³) che l'uso, anziché della (1.2), della più recente formula (1.3) di Resal, di cui citava il lavoro [**8**], non avrebbe apportato « alcuna modificazione *qualitativa* » al risultato da lui trovato in [**4**]$_1$, ossia al fatto che la X data dalla (1.5) è dotata di massimo in corrispondenza ad una certa velocità critica v_0^* (*velocità di massima penetrazione totale*), mentre la X classica non presenta massimo (poiché tende a $+\infty$ per $v_0 \to +\infty$), ciò che dava spiegazione dell'apparente paradosso cui si è accennato.

1.2 – In [**10**]$_{2,3}$ non mi sono pertanto occupato (salvo la sola citazione in [**10**]$_2$) della formula di resistenza (1.3) di Resal. Successivamente, tenuto anche conto di un « secondo paradosso » provocato dalla formula (1.2) (⁴) e di un confronto fra le formule di resistenza (1.2) e (1.3) (basato sull'osservazione che la (1.3) al valore $v = 0$ fa corrispondere il valore $w = 0$, mentre la (1.2) a $v = 0$ fa corrispondere il valore $w = c_0S > 0$), sono stato indotto a calcolare le formule per i tempi, t e T, dedotte dalla legge di resistenza (1.3) di Resal: mi sono così accorto di un « terzo paradosso », e precisamente che *alla penetrazione totale X di Resal* (⁵) *viene a corrispondere un tempo di penetrazione totale $T = +\infty$.*

Ciò mi ha portato ad un esame approfondito del lavoro [**8**] di Resal (⁶) e ad alcune osservazioni critiche di carattere qualitativo che saranno qui espo-

(²) Cfr. [**4**]$_2$, p. 505.

(³) Cfr. [**4**]$_2$, p. 507, annotazione (³).

(⁴) Ossia che per $v_0 \to +\infty$ risulta $T \to \pi h\sqrt{\beta}$ (cfr. [**10**]$_3$, n. **2**), mentre dovrebbe ovviamente risultare $T \to +\infty$, in accordo col fatto che è pure $X \to +\infty$.

(⁵) Data dalla formula (2.2) della presente Nota.

(⁶) Alcune imprecisioni contenute nella indicazione bibliografica su Resal, da me riportate in [**10**]$_2$, provengono da errori di citazione riportati in [**4**]$_2$ (t. CXXX, anziché t. CXX) e in [**2**]$_3$, p. 457 (Résal, anziché Resal).

ste, insieme alla indicazione di alcune varianti e generalizzazioni della formula di resistenza di Resal e, conseguentemente, delle corrispondenti formule di penetrazione e dei tempi di penetrazione; in particolare verrà considerata la generalizzazione, analoga a quella data da Levi-Civita per la formula di Poncelet, di una variante della formula di penetrazione totale di Resal, e verrà infine accennato ad alcune ulteriori generalizzazioni di tale formula, analoghe a quelle già trattate in [**10**]$_2$, mediante l'introduzione, con varie leggi, di un coefficiente λ di deformazione progressiva.

2 - La formula di Resal e il « paradosso del tempo infinito »

2.1 – Dalla lettura della breve Nota [**8**] si constata intanto che Resal non accenna alle formule dei tempi (7), ma si occupa solo della formula di resistenza (1.3) e delle relative formule di penetrazione, ossia delle formule che danno x e X.

Lo spunto allo studio della penetrazione di un proiettile in un mezzo semifluido o solido è fornito a Resal dalla seguente osservazione, con la quale inizia la Nota [**8**].

« Il parait que Euler est le premier qui s'est occupé de cette question, il admettait que la résistance à la pénétration était indépendante de la vitesse du projectile. Vers 1830 (8) Poncelet proposa d'ajouter à la constante d'Euler un terme proportionnel au carré de la vitesse. Malgré cette innovation, on voit que le projectile éprouverait une résistance quand même il ne pénétrerait pas dans le milieu, ce qui est inadmissible. Je me propose, dans cette Note, de donner une nouvelle expression de la résistance dont il s'agit, à l'abri de la critique précédente (...) ».

Resal considera dapprima il caso di un prisma animato di moto parallelo al proprio asse, e, « en suivant la marche indiquée par Newton » con la sola variante di sostituire al peso specifico Δ del mezzo il prodotto di Δ per un coefficiente ε, $0<\varepsilon<1$, « que l'expérience peut seule faire connaître », perviene alla formula (1.3). Ottiene così per la penetrazione x l'espressione

$$x = m \log \frac{1+nv_0}{1+nv} \quad (9) , \tag{2.1}$$

(7) Come, del resto, non accennava a tali formule (che sono di assai facile calcolo e che non presentavano interesse per il problema che gli era stato allora posto) il Levi-Civita, sia in [**4**]$_1$ che nella successiva monografia [**5**]. Si veda, sulle formule dei tempi di Poncelet-Levi-Civita, [**10**]$_3$, n. **3**.

(8) La data, 1839, relativa alla (1.2), qui riportata, è riferita all'anno in cui Poncelet pubblicò il suo libro [**7**], in cui tale formula è contenuta (si veda anche [**2**]$_3$, p. 562).

(9) Cfr. [**8**], pp. 398-399, in cui i coefficienti c_1, c_2, m, n sono espressi mediante vari parametri dipendenti dal sistema proiettile-mezzo.

($m = 1/(c_2 S)$, $n = c_2/c_1$), da cui, per $v = 0$, deduce per la penetrazione totale X l'espressione

$$X = m \log (1 + n v_0) \,. \tag{2.2}$$

Resal afferma quindi: « J' admettrai que cette formule s'applique au projectiles oblongs et sphériques en attribuant à ε des valeurs convenables » (10). Indica poi il modo per dedurre il coefficiente n, a partire da due valori X, X' dedotti sperimentalmente in corrispondenza alle rispettive velocità di impatto v_0 e v_0'.

Confronta, successivamente, i risultati trovati con quelli forniti dall'esperienza. A questo proposito vengono spontanee le seguenti osservazioni:

(I) i risultati sperimentali citati da Resal risalgono a circa sessanta anni prima (e precisamente alle spesso citate, in trattati e monografie, « esperienze di Metz » eseguite negli anni 1834-1835), ossia all'incirca negli anni in cui Poncelet dava la sua formula di penetrazione (1.6); (II) i valori ottenuti dalla formula (2.2) di Resal risultano in buon accordo coi risultati citati; tale accordo appare, anche, come conseguenza del valore *sperimentale* ottenuto per il coefficiente n, per il quale Resal adotta un valore costante, pur osservando che teoricamente n dovrebbe risultare proporzionale al calibro del proiettile, anomalia su cui dichiara però di non insistere; (III) le velocità iniziali dei proiettili (delle armi da fuoco) erano già, nel 1895, all'incirca raddoppiate, in media, rispetto a quelle di sessanta anni prima (essenzialmente a causa della sostituzione della « polvere nera » con la « polvere senza fumo » [Vieille, 1884]): ciò rendeva ormai poco attendibile (almeno per le alte velocità e per certi mezzi) la formula di penetrazione di Poncelet e, ovviamente, anche quella di Resal, che è sostanzialmente dello stesso tipo (inoltre, per entrambe le formule si ha $X \to +\infty$ per $v_0 \to +\infty$, risultato che pochi anni dopo sarà riconosciuto essere in contrasto con la presenza, rilevata sperimentalmente, del valore massimo per la penetrazione totale (11), raggiunto in corrispondenza,

---

(10) Si tenga presente che sia m che n dipendono da ε: cfr. [**8**], p. 399.

(11) Ciò fu messo in risalto, nel 1900, da una tabella di penetrazione, in vari mezzi, ed a varie distanze (ossia a varie velocità di impatto), del proiettile del fucile francese Lebel, che, nel 1886, aveva per primo impiegato la polvere senza fumo. Tale tabella, riportata dal Cranz, nel 1903, in un articolo sull'Enciclopedia matematica tedesca (cfr. [**2**]$_2$, p. 238), fu considerata « assai istruttiva » dal Levi-Civita, che la citò nella sua Nota sulla generalizzazione della formula (1.6) di Poncelet (cfr. [**4**]$_2$, p. 505). La stessa tabella sarà poi riportata, nel 1913, in un articolo di Cranz e Vallier sull'Enciclopedia matematica franco-tedesca (cfr. [**3**], p. 78), dove viene preliminarmente osservato che: « L. Euler, J. V. Poncelet et plus récentement H. Resal ont donné à ce sujet

come si è già osservato, di una certa velocità critica dipendente dal proiettile e dal mezzo).

Resal così conclude la sua Nota: « En résumé, il résulte de ce qui précède qu'on peut en toute sûreté employer la formule (5) ([12]), qui d'ailleurs est plus simple que celle qu'on déduit de l'hypothèse de Poncelet ».

È ovvio che per i mezzi di calcolo di allora la (5) rappresentava una, sia pur lieve, semplificazione rispetto alla (1.6) di Poncelet (la quale, d'altronde, nella pratica di calcolo, veniva pure usata coi logaritmi decimali). Il confronto fra la (2.2) di Resal e la (1.6) mostra, anzi, che le due formule sono assai simili: infatti, tenendo presente che $h = 1/(2c_0 S)$, $\beta = c_2/c_0$, mentre $m = 1/(c_2 S)$, $n = c_2/c_1$ (pur con valori diversi nelle (1.2)-(1.3) fra c_0 e c_1 e fra i due coefficienti indicati, in entrambe le formule, con c_2), scritta la (1.6) nella forma

$$(1.6)' \qquad X = 2h \log \sqrt{1 + \beta v_0^2}\,,$$

si ha che per « grandi valori » di v_0 (per i quali cioè 1 sia trascurabile rispetto a βv_0^2 e a nv_0) le due formule (2.2) e (1.6)' assumono la stessa espressione approssimata

$$(2.3) \qquad X = a \log (bv_0)$$

(con $a = 2h$, $b = \sqrt{\beta}$ per la (1.6)'; $a = m$,$b = n$ per la (2.2)).

Osserviamo che la formula (2.2) di Resal è stata pressoché ignorata nei trattati e nelle monografie di Balistica esterna comparsi successivamente: ad esempio, in [**3**] (1913) si trova, alla p. 78 già citata, solo quanto è qui riportato nella annotazione ([11]); in [**2**]$_3$ (1925) viene ricordata, a p. 457, la sola formula di resistenza (1.3), ma non la (2.2), mentre vengono risportate (pp. 457-459) le varie formule di Poncelet (resistenza, penetrazione, tempi) e una tabella per i coefficienti c_0 e c_2 della (1.2); in [**6**] (1963) vengono ricordate le (1.2) e (1.6)

[pénétration du projectile dans un milieu résistant] des développements mathématiques qui cependant ne s'accordent pas toujours avec les résultats de l'expérience, du moins dans les nouvelles armes à feu »; non viene però ivi fatto cenno alla nuova formula (1.5) del Levi-Civita, data ormai vari anni prima. Lo stesso Cranz accenna poi, nel 1925, alla sola formula di resistenza (1.4) del Levi-Civita (cfr. [**2**]$_3$, p. 458) e riporta, insieme alla citata tabella del 1900, una più recente tabella. La formula di penetrazione (1.5) si troverà poi citata in [**1**], p. 332.

([12]) Si tratta della formula

$$(5) \qquad X = A \log \text{vulg}\,(1 + nv_0) \qquad (A = 2.30258m)\,,$$

ossia della (2.2) in cui, per comodità nei calcoli, il logaritmo naturale è stato trasformato in logaritmo decimale.

ma non la (1.3) e la (2.2). Ciò è tuttavia motivato anche dal fatto che la formula di penetrazione di Poncelet, che alla fine dell' '800 era ormai usata da circa sessanta anni (e che continuerà ad essere usata anche in seguito nonostante la nuova formula di Levi-Civita, assai più agile, coi suoi tre coefficienti β, h, k, ed adatta a più elevate velocità), presentava il « vantaggio » rispetto a quella di Resal (a parte il « paradosso del tempo infinito »), di essere ormai dotata di numerose tabelle (calcolate e perfezionate in un lungo arco di tempo) che davano, per svariati casi proiettile-mezzo, i relativi valori di β e di h.

2.2 – Vediamo di chiarire, analiticamente, in che cosa consista il « paradosso di Resal del tempo infinito ». Le formule per i tempi di penetrazione si ottengono dall'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -w\,, \tag{2.4}$$

che, integrata da $t = 0$ (cui corrisponde $v = v_0$) ad un generico t e assumendo per w l'espressione (1.3), scritta, per semplicità, nella forma $w = c_1 Sv(1 + nv)$, dà (essendo $1/(c_1 S) = mn$)

$$t = mn \int_v^{v_0} \frac{1}{u(1+nu)}\,du\,, \tag{2.5}$$

ossia

$$t = mn \log \frac{v_0(1+nv)}{v(1+nv_0)}\,. \tag{2.5$'$}$$

La (2.5)$'$ per $v = 0$ dovrebbe dare $t = T$ (e, ovviamente, dovrebbe risultare per T un valore finito): essa dà però $t \to +\infty$ per $v \to 0$.

Questo risultato paradossale è dovuto al fatto che, posto $v = 0$ nell'integrale che figura nella (2.5), ossia considerato l'integrale

$$\int_0^{v_0} \frac{1}{u(1+nu)}\,du\,, \tag{2.6}$$

tale integrale diverge a $+\infty$, *per il fatto che la funzione integranda, positiva nell'intervallo* $(0, v_0]$, *è un infinito del primo ordine per* $u \to 0^+$.

Basterebbe modificare l'integrale (2.6) nel seguente

$$\int_0^{v_0} \frac{1}{u^\alpha + nu^2} du \qquad (0 < \alpha < 1) \ (^{13}) , \tag{2.7}$$

o nell'altro (che verrà nel seguito considerato in un caso particolare notevole)

$$\int_0^{v_0} \frac{1}{u^\alpha(1 + nu)} du \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2.8}$$

(ottenuto sostituendo nel precedente l'esponente 2 con l'esponente $1 + \alpha < 2$), per ottenere per T un valore finito: infatti *le funzioni integrande in* (2.7)-(2.8) *tendono all'infinito di ordine* $\alpha < 1$ *per* $u \to 0^+$, *e pertanto gli integrali* (2.7)-(2.8) *risultano convergenti.* Osserviamo che nel caso (non restrittivo per il calcolo numerico) in cui α sia un numero razionale gli integrali (2.7)-(2.8) sono, ovviamente, riconducibili ad integrali di funzioni razionali.

3 - Formule di Resal modificate

3.1 – Come abbiamo osservato, lo spunto per la formula di resistenza (1.3) era stato fornito a Resal proprio dall'osservazione che la (1.2) dava un valore positivo, $c_0 S$, per la resistenza anche per $v = 0$; la (1.2) proveniva d'altronde dalla (1.1) di Eulero con l'aggiunta del termine quadratico $c_2 v^2$, che risaliva a Newton e che per le piccole velocità di allora appariva pienamente giustificato. Resal stesso si rifaceva direttamente a Newton e si limitava ad introdurre un coefficiente ε $(0 < \varepsilon < 1)$ da determinarsi, caso per caso, sperimentalmente: tale coefficiente «non intaccava» però gli esponenti di v, anzi, nella (1.3), interveniva nel solo coeffciente c_2 (14).

Ad evitare il paradosso $T = + \infty$ basta assumere per w l'espressione

$$w = S(c_1 v^\alpha + c_2 v^2) \qquad (0 < \alpha < 1) , \tag{1.3$'$}$$

che dà per il tempo t un integrale del tipo (2.7), oppure l'espressione

$$w = S v^\alpha (c_1 + c_2 v) \qquad (0 < \alpha < 1) , \tag{1.3$''$}$$

che dà per t un integrale del tipo (2.8).

---

(13) Ricordiamo che nel caso della (1.2) di Poncelet l'integrazione dell'equazione (2.4) conduce all'integrale che si ottiene da (2.7) per $\alpha = 0$, il cui valore risulta $(1/\sqrt{n}) \operatorname{arctg} \sqrt{n v_0} < + \infty$.

(14) Cfr. [**8**], p. 398.

Chiameremo le $(1.3)'$-$(1.3)''$ *formule di Resal-modificate.* Tali formule saranno qui considerate, in particolare, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$, ossia nelle forme

$$(1.3)_1 \qquad w_1 = S(c_1\sqrt{v} + c_2v^2)\,,$$

$$(1.3)_2 \qquad w_2 = S\sqrt{v}\,(c_1 + c_2v)\,.$$

Da queste ultime si ricavano rispettivamente, risolvendo l'equazione differenziale

$$(3.1) \qquad v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\,w\,,$$

per la penetrazione x le espressioni x_1, x_2 seguenti

$$(2.1)_1 \qquad x_1 = \frac{2}{3}\,m\log\frac{1+nv_0^{3/2}}{1+nv^{3/2}}\,,$$

$$(2.1)_2 \qquad x_2 = \frac{2m}{\sqrt{n}}\,(\sqrt{nv_0} - \sqrt{nv} - \operatorname{arctg}\sqrt{nv_0} + \operatorname{arctg}\sqrt{nv})\,,$$

da cui si ottengono, per $v = 0$, i valori X_1, X_2 per la penetrazione totale

$$(2.2)_1 \qquad X_1 = \frac{2}{3}m\log(1 + nv_0^{3/2})\,,$$

$$(2.2)_2 \qquad X_2 = \frac{2m}{\sqrt{n}}\,(\sqrt{nv_0} - \operatorname{arctg}\sqrt{nv_0})\,.$$

Osserviamo che, mentre la $(2.2)_1$ è, qualitativamente, dello stesso tipo delle formule (1.6) di Poncelet e (2.2) di Resal, alle quali sostanzialmente si riduce nel caso in cui 1 sia trascurabile rispetto a nv_0 (salvo un diverso significato per n; le tre formule assumono allora l'espressione approssimata (2.3), con $b = n^{2/3}$ per l'espressione approssimata della $(2.2)_1$), la $(2.2)_2$ è invece di tipo qualitativamente diverso, nel senso che il logaritmo è sostituito dalla differenza fra una potenza e un arcotangente.

Dall'equazione (2.4) si ricavano poi, in corrispondenza delle $(1.3)_1$ e $(1.3)_2$, le rispettive formule per i tempi; si ottiene

$$(3.2)_1 \qquad t_1 = \frac{2}{3}\, m n^{2/3} \{\log \frac{(1+n^{1/3}\sqrt{v_0})\sqrt{1-n^{1/3}\sqrt{v}+n^{2/3}v}}{(1+n^{1/3}\sqrt{v})\sqrt{1-n^{1/3}\sqrt{v_0}+n^{2/3}v_0}} + \sqrt{3}\,(\operatorname{arctg}\frac{2n^{1/3}\sqrt{v_0}-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2n^{1/3}\sqrt{v}-1}{\sqrt{3}})\}\,,$$

$$(3.2)_2 \qquad t_2 = 2m\sqrt{n}\,(\operatorname{arctg}\sqrt{nv_0} - \operatorname{arctg}\sqrt{nv})\,,$$

da cui, per $v = 0$, si ha rispettivamente

$$(3.3)_1 \qquad T_1 = \frac{2}{3}\, m n^{2/3} \{\log \frac{1+n^{1/3}\sqrt{v_0}}{\sqrt{1-n^{1/3}\sqrt{v_0}+n^{2/3}v_0}} + \sqrt{3}\,(\operatorname{arctg}\frac{2n^{1/3}\sqrt{v_0}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6})\}\,,$$

$$(3.3)_2 \qquad T_2 = 2m\sqrt{n}\,\operatorname{arctg}\sqrt{nv_0}\,.$$

Scomparso, per queste formule dei tempi, il « paradosso del tempo infinito », resta però un paradosso analogo a quello presentato dalla formula di Poncelet per il tempo totale T, la cui espressione è data da [15]

$$(3.4) \qquad T = 2h\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}(\sqrt{\beta}\,v_0)\,,$$

che per $v_0 \to +\infty$ tende al valore (finito) $\pi h\sqrt{\beta}$, mentre la (1.6) di Poncelet dà $X \to +\infty$: infatti, per $v_0 \to +\infty$, dalle $(3.3)_1$ e $(3.3)_2$ si ha, rispettivamente,

$$(3.5) \qquad T_1 \to \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}\, m n^{2/3}\,, \qquad T_2 \to \pi m\sqrt{n}\,,$$

mentre è anche qui $X_1 \to +\infty$, $X_2 \to +\infty$.

Ciò mostra, come nel caso della formula di Poncelet, i ristretti limiti, per la velocità di impatto v_0, entro i quali si possono ritenere sufficientemente valide le formule di Resal-modificate. Vedremo che queste contraddizioni scompariranno estendendo a tali formule la generalizzazione analoga a quella data da Levi-Civita alla formula di Poncelet.

---

(15) Cfr. **[10]**$_3$, n. **2**.

3.2 – Un confronto dei due tipi di formule di Resal-modificate (con $\alpha = 1/2$) mostra che, mentre la $(2.2)_1$ è, come si è già osservato, dello stesso tipo delle (1.6) e (2.2), la formula $(3.3)_1$ dà per il tempo T_1 di penetrazione totale un'espressione assai più complessa e qualitativamente diversa da quella analoga di Poncelet (3.4) (e ciò è dovuto al fatto che l'espressione di w_1 conduce, nell'integrazione che porta a t_1, sia a logaritmi che ad arcotangenti). Invece la $(2.2)_2$, pur essendo qualitativamente diversa dalle (1.6) e (2.2), offre, rispetto alla precedente, il vantaggio che la corrispondente formula $(3.3)_2$ dà per il tempo T_2 un'espressione assai semplice e analoga alla (3.4) (salvo l'esponente 1/2 anziché 1 per v_0).

Dal confronto fatto appare quindi che si hanno, complessivamente, risultati più semplici dalla formula di Resal-modificata $(1.3)_2$ rispetto a quelli che si hanno dalla $(1.3)_1$. La preferenza della $(1.3)_2$ rispetto alla $(1.3)_1$ potrebbe apparire motivata anche alla luce di un metodo, in Balistica esterna, sviluppato verso la fine dell' '800 ([16]) ed usato poi anche nei decenni successivi. Tale metodo era legato alle ben note difficoltà di tipo analitico (oltre che sperimentale) relative allo studio della «funzione resistente», $F(v)$, al moto di un grave nell'atmosfera: il notevole aumento delle velocità iniziali disponibili aveva indotto a suddividere i valori della velocità in sette intervalli, i cui estremi erano dati (in m/s) da

$$(3.6) \qquad 0\,, \quad 240\,, \quad 295\,, \quad 375\,, \quad 419\,, \quad 550\,, \quad 800\,, \quad 1000\,,$$

ed in cui veniva assunta la legge di resistenza monomia $F(v) = a_n v^n$, dando all'esponente n rispettivamente i sette valori 2, 3, 5, 3, 2, 1.70, 1.55 ([17]). Tenendo presente che la $(1.3)_1$ ha un termine quadratico, mentre la $(1.3)_2$ ha un termine di esponente 3/2, mi pare possa essere presa in considerazione (pur trattandosi qui di resistenza al moto opposta da mezzi solidi o semi-fluidi!) la *possibilità* (è questa una proposta da estendere ai cultori di Balistica applicata) che si possano ottenere, assumendo la legge di resistenza $(1.3)_2$ di Resal-modificata ([18]), risultati conformi alle circostanze di fatto (ossia atti a rappre-

---

([16]) Cfr. [**2**]$_1$; [**3**], p. 103.

([17]) Ricordiamo che questo «metodo dei sette intervalli» fu perfezionato da M. Picone (1917-1918), che lo usò in un suo primo metodo numerico «per archi successivi»; un secondo ed assai più raffinato (sia dal punto di vista dell'Analisi funzionale che dell'Analisi numerica) metodo di Picone per archi successivi fu poi dato (1932) perfezionando il classico metodo di Cauchy-Lipschitz per i sistemi normali di equazioni differenziali (cfr. [**10**]$_1$, pp. 360-370, 376-383).

([18]) In particolare per velocità che, anche attualmente, sono spesso comprese negli ultimi due dei sette intervalli citati, con netta prevalenza per l'ultimo intervallo (800-1000 m/s).

sentare, con sufficiente approssimazione, la legge reale della resistenza del mezzo).

Estenderemo alla $(1.3)_2$ e alle relative formule di penetrazione la generalizzazione del Levi-Civita ed alcune successive generalizzazioni, del tipo di quelle già date in $[\mathbf{10}]_2$.

4 - Generalizzazione, per effetto Levi-Civita, delle formule di Resal-modificate. Un teorema di confronto

4.1 – A chiarimento di quanto è stato accennato al n. **1.1**, annotazione (3), ricordiamo brevemente che, nel caso si adottasse per w l'espressione di Resal–Levi-Civita

$$w = S(1 + kv_0)(c_1 v + c_2 v^2)\,, \tag{4.1}$$

ottenuta dalla (1.3) quando si tenga anche conto dell'effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva (messo in risalto dal coefficiente k) che il proiettile subisce nell'urto col mezzo, ossia quando si sostituisca all'area S della sezione maestra del proiettile prima dell'urto quella, S', modificata dall'urto e data dalla formula (19)

$$S' = S(1 + kv_0)\,, \tag{4.2}$$

si otterrebbe per la penetrazione totale X, integrando la (3.1) fra $x = 0$, cui corrisponde, a causa dell'urto proiettile-mezzo, la velocità $v_1 = cv_0$ (dove c, $0 < c < 1$, è il *coefficiente di restituzione*, che dipende dalla natura dei due corpi che si urtano ma non da v_0 (20)), e $x = X$, cui corrisponde $v = 0$, l'espressione

$$X = m\,\frac{\log(1 + cnv_0)}{1 + kv_0}\,. \tag{4.3}$$

La (4.3) è qualitativamente dello stesso tipo della (1.5) (21): di essa pertanto il Levi-Civita non si occupava in $[\mathbf{4}]_1$, limitandosi alla sola annotazione (3), già

(19) Cfr. $[\mathbf{4}]_2$, p. 507, [**5**], p. 53.

(20) Cfr. $[\mathbf{4}]_2$, p. 506, [**5**], p. 53.

(21) Nella quale ricordiamo che il coefficiente β non ha lo stesso significato che ha nella (1.6): nella (1.5) al β della (1.6) andrebbe sostituito βc^2 (si veda anche la successiva annotazione (25)).

qui ricordata. Osserviamo che se poi, usando la (4.1), si ricavasse il tempo di penetrazione t, si troverebbe, con semplici calcoli, integrando la (2.4),

$$t = \frac{mn}{1 + kv_0} \log \frac{cv_0(1 + nv)}{v(1 + cnv_0)} , \tag{4.4}$$

valore che tende, come quello dato dalla (2.5)′, a $+\infty$ per $v \to 0$, ossia si avrebbe anche qui il « paradosso del tempo infinito ».

4.2 – Ad evitare ciò basta considerare per w le seguenti espressioni (di Resal-modificate e generalizzate con la (4.2) di Levi-Civita)

$$w = S(1 + kv_0)(c_1 v^\alpha + c_2 v^2) \qquad (0 < \alpha < 1) , \tag{4.5$'$}$$

$$w = S(1 + kv_0) v^\alpha (c_1 + c_2 v) \qquad (0 < \alpha < 1) . \tag{4.5$''$}$$

Esse conducono, nel calcolo del tempo T, ad integrali del tipo (2.7)-(2.8) (in cui v_0 va sostituito con cv_0). Consideriamo, in particolare, le (4.5)′-(4.5)″ nel caso $\alpha = 1/2$, ossia

$$w_1 = S(1 + kv_0)(c_1 \sqrt{v} + c_2 v^2) , \tag{4.5$_1$}$$

$$w_2 = S(1 + kv_0)\sqrt{v}\,(c_1 + c_2 v) , \tag{4.5$_2$}$$

che conducono, per $x_1, x_2, X_1, X_2, t_1, t_2, T_1, T_2$, ad espressioni che si ottengono da quelle riportate al n. **3.1** sostituendo v_0 con cv_0 e dividendo per $1 + kv_0$.

Ci limitiamo qui a considerare solo le espressioni di X_2 e T_2, ossia

$$X_2 = \frac{2m}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{cnv_0} - \operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}}{1 + kv_0} , \tag{4.6}$$

$$T_2 = 2m\sqrt{n}\, \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}}{1 + kv_0} . \tag{4.7}$$

Osserviamo intanto che il contrasto che sussisteva, per $v_0 \to +\infty$, fra la $(2.2)_2$ e la $(3.3)_2$ $(X_2 \to +\infty,\ T_2 \to \pi m\sqrt{n})$ più non sussiste fra la (4.6) e la (4.7), poiché entrambe le formule danno valori che tendono a zero per $v_0 \to +\infty$.

È poi facile constatare ([22]) che le funzioni $X_2 = X_2(v_0)$ e $T_2 = T_2(v_0)$

([22]) In analogia a quanto si trova in $[\mathbf{4}]_1$ per X dato dalla (1.5), e in $[\mathbf{10}]_3$ per il corrispondente tempo T.

date dalle (4.6)-(4.7) presentano il massimo valore, X^*, $\overline{T}_2$, in corrispondenza, rispettivamente, a certi valori critici, $v_0^*, \overline{v}_0$, per la velocità di impatto v_0, e che tali valori sono, rispettivamente, l'unica radice positiva delle equazioni

$$cn\sqrt{cnv_0}\,(1+kv_0)-2k(1+cnv_0)\left(\sqrt{cnv_0}-\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}\right)=0\,, \tag{4.8}$$

$$cn(1+kv_0)-2k\sqrt{cnv_0}\,(1+cnv_0)\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}=0\,. \tag{4.9}$$

Anche qui, come nel caso analogo Poncelet–Levi-Civita ([23]), vale il seguente

Teorema di confronto. *Nell'ipotesi della legge di resistenza* $(4.5)_2$ *(di Resal-modificata, e generalizzata per effetto Levi-Civita), fra la velocità* $\overline{v}_0$ *di massimo tempo di penetrazione totale e la velocità* v_0^* *di massima penetrazione totale vale la relazione*

$$\overline{v}_0<v_0^*\,. \tag{4.10}$$

La dimostrazione è assai semplice ed analoga a quella già data in $[\mathbf{10}]_3$. Infatti le (4.8) e (4.9) possono essere scritte nelle forme

$$\frac{\sqrt{cnv_0}-\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}}{\sqrt{cnv_0}}=\frac{cn(1+kv_0)}{2k(1+cnv_0)}\,, \tag{4.8$'$}$$

$$\sqrt{cnv_0}\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}=\frac{cn(1+kv_0)}{2k(1+cnv_0)}\,, \tag{4.9$'$}$$

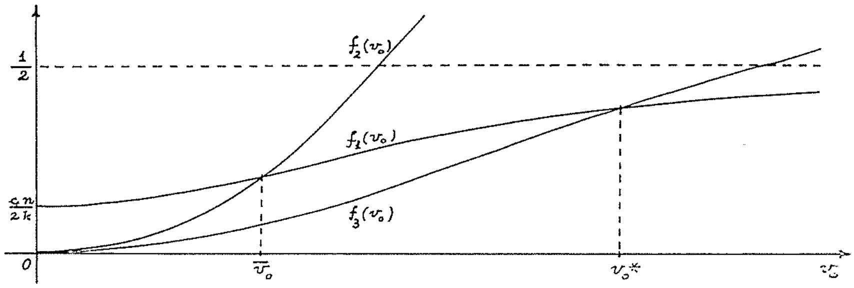
che hanno i secondi membri uguali. Indicati rispettivamente con $f_1(v_0)$ e $f_2(v_0)$ i primi membri di (4.8)′ e (4.9)′ e con $f_3(v_0)$ i secondi membri, per le due funzioni (crescenti) $f_1(v_0)$, $f_2(v_0)$ risulta $\forall\, v_0>0$,

$$f_2(v_0)>f_1(v_0)\,; \tag{4.11}$$

è poi $f_2(0)=0$, $f_2(v_0)\to+\infty$ per $v_0\to+\infty$, $f_1(v_0)\to0$ per $v_0\to0$, $f_1(v_0)\to1$ per $v_0\to+\infty$. Non può quindi essere $\overline{v}_0=v_0^*$, poiché ciò implicherebbe l'uguaglianza dei secondi membri delle (4.8)′-(4.9)′, in contrasto con la (4.11). Tenendo poi conto dell'andamento della funzione $f_3(v_0)$ (*) (decrescente per $k<cn$, crescente per $k>cn$, $f_3(v_0)\to1/2$ per $v_0\to+\infty$: $f_3(v_0)=1/2$ per $k=cn$), il cui diagramma, al crescere di v_0, interseca (v. figura, dove è $k>cn$) per

---

([23]) Di cui mi sono già occupato in $[\mathbf{10}]_3$, n. **3**.
Nella figura va scambiato f_1 con f_3.



$v_0 = \bar{v}_0$ quello di $f_2(v_0)$ e, successivamente, per $v_0 = v_0^*$ quello di $f_1(v_0)$, si prova l'asserto. Anche qui (come in [**10**]$_3$, n. **3**) si può osservare che, per fissati valori di c, k, n, (il valore di m non interviene in queste considerazioni), i due valori $\bar{v}_0$ e v_0^* possono anche risultare notevolmente diversi.

5 - Ulteriori generalizzazioni. Osservazioni

5.1 – In analogia al procedimento seguito in [**10**]$_2$, considerata l'ulteriore generalizzazione della formula (4.1) di Resal–Levi-Civita, ottenuta mediante l'introduzione della cosiddetta *funzione* $\sigma(x)$ *di deformazione progressiva* ([24])

$$w = S(1 + kv_0)(c_1 v + c_2 v^2)\,\sigma(x)\,, \tag{5.1}$$

ci limitiamo a ricordare che è possibile ottenere, nei vari casi già ivi considerati per $\sigma(x)$, in particolare nei cinque casi seguenti

$$\sigma_1(x) = 1 + \lambda x \qquad \text{(caso lineare)}\,, \tag{5.2}$$

$$\sigma_2(x) = \exp \lambda x \qquad \text{(caso esponenziale)}\,, \tag{5.3}$$

$$\sigma_3(x) = 1 + \log(1 + \lambda x) \qquad \text{(caso logaritmico)}\,, \tag{5.4}$$

$$\sigma_4(x) = 1 + \lambda x^2 \qquad \text{(caso quadratico, con } \sigma_1'(0) = 0\text{)}, \tag{5.5}$$

$$\sigma_5(x) = \cosh\left(\sqrt{2\lambda}\,x\right) \qquad \text{(caso del coseno iperbolico)} \tag{5.6}$$

(dove λ è il *coefficiente di deformazione progressiva* del proiettile nel mezzo), le corrispondenti espressioni per la penetrazione totale X_i $(i = 1, 2, ..., 5)$: tali espressioni risulterebbero dello stesso tipo delle X_i trovate in [**10**]$_2$, nelle quali al posto della X (di Poncelet–Levi-Civita) data dalla (1.5) andrebbe sostituita la X (di Resal–Levi-Civita) data dalla (4.3). I risultati qualitativi ivi trovati continuerebbero ovviamente a sussistere.

([24]) Cfr. [**10**]$_2$, p. 464.

Considereremo qui invece, per le sole formule di penetrazione, i casi analoghi provenienti dalle ulteriori generalizzazioni della $(4.5)_2$, ossia dalle formule

$$w_i = S(1 + kv_0)\sqrt{v}\,(c_1 + c_2 v)\sigma_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)\,. \tag{5.7$_i$}$$

Le formule di penetrazione totale (che, per semplicità di notazioni, indicheremo ancora con X_i) alle quali accenneremo risulteranno pertanto generalizzazioni della (4.6), che, scrivendo X al posto di X_2 (ad evitare equivoci con altre espressioni successivamente indicate con X_2), diventa

$$X = \frac{2m}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{cnv_0} - \operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0}}{1 + kv_0}\,. \tag{4.6$'$}$$

5.2 – Nei cinque casi elencati per la funzione $\sigma(x)$, ossia nei cinque casi $(5.7)_i$ per la resistenza w, si ottengono dall'equazione differenziale (3.1), con la solita condizione iniziale $x(0) = X_i$, le seguenti formule, che mostrano il legame fra la X data dalla (4.6)$'$ e le X_i e che sono le stesse già date in $[\mathbf{10}]_2$ (in cui le w_i erano invece ottenute moltiplicando per $\sigma_i(x)$ l'espressione (1.4) di w, ed in cui la X era data dalla (1.5)).

$$X_1 = \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{1 + 2\lambda X} - 1\right), \tag{5.8}$$

$$X_2 = \frac{1}{\lambda}\log(1 + \lambda X)\,, \tag{5.9}$$

$$X = \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda X_3)\log(1 + \lambda X_3)\,, \tag{5.10}$$

$$X_4 = \left(\sqrt{\frac{4 + 9\lambda X^2}{4\lambda^3}} + \frac{3X}{2\lambda}\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{4 + 9\lambda X^2}{4\lambda^3}} - \frac{3X}{2\lambda}\right)^{1/3}, \tag{5.11}$$

$$X_5 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\log\left(\sqrt{2\lambda}\,X + \sqrt{1 + 2\lambda X^2}\right). \tag{5.12}$$

Per questi cinque casi, e per i casi più generali ai quali si è accennato in $[\mathbf{10}]_2$ (pp. 465-466), ossia con $\sigma(x)$ espressa dalla serie di potenze

$$\sigma(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \left(a_n = a_n(\lambda)\right), \tag{5.13}$$

valgono i risultati e le osservazioni ivi riportate; in particolare, la velocità critica v_0^* di massima penetrazione totale risulta ancora data dalla formula (4.8), ossia è la stessa che dà la massima penetrazione totale per la (4.6): essa dipende pertanto dal coefficiente k di deformazione impulsiva ma non dal coefficiente λ di deformazione progressiva. Inoltre, come le formule di penetrazione ottenute in [**10**]$_2$ si riducono, al tendere a zero dei due coefficienti k e λ, alla formula di Poncelet (1.6), così le formule qui ottenute si riducono ([25]) alla formula di Resal-modificata $(2.2)_2$.

Bibliografia

[**1**] G. BRUNO, *Balistica esterna*, vol. I (*Balistica razionale*), Roggero e Tortia, Torino 1934.

[**2**] C. CRANZ: [•]$_1$ *Compendium der theoretischen äusseren Ballistik*, Teubner, Leipzig 1896; [•]$_2$ *Ballistik*, Enc. der Math. Wiss., Bd. IV, **3**, Helf 2 (1903), 185-279; [•]$_3$ *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I, Julius Springer, Berlin 1925.

[**3**] C. CRANZ et E. VALLIER, *Balistique extérieure*, Enc. des Sc. Math., t. IV, **6**, fasc. 1 (1913), 1-105.

[**4**] T. LEVI-CIVITA: [•]$_1$ *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Atti Cl. Sci. Mat. Natur. **65**, parte II (1906), 1149-1158; (lo stesso lavoro si trova in [•]$_2$ *Opere matematiche*, vol. II (1901-1907), Zanichelli, Bologna 1956; 505-513).

[**5**] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna 1935.

[**6**] H. MOLITZ und R. STROBEL, *Äussere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[**7**] J. V. PONCELET, *Introduction à la Mécanique industrielle*, Bruxelles 1839.

[**8**] H. RESAL, *Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, C. R. Acad. Sci. Paris **120** (1895), 397-401.

[**9**] F. SIACCI, *Balistica*, 2ª ediz., Casanova, Torino 1888.

[**10**] L. TANZI CATTABIANCHI: [•]$_1$ *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 357-389; [•]$_2$ *Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 459-474; [•]$_3$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei tempi: un teorema di confronto*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 855-860.

Summary

From a formula of terminal ballistics due to Resal an «infinite time paradox» is derived, and in order to avoid it, a number of possible amendments to that formula are indicated.

Some generalizations of the amended formula are also suggested, along the same lines as generalizations previously given by this A. to similar formulas of Poncelet and Levi-Civita.

([25]) Assumendo, formalmente, in esse $c = 1$. Ricordiamo che per ottenere le formule di Poncelet e di Resal l'integrazione veniva effettuata fra i valori v_0 e v anziché, come fa il Levi-Civita, fra $v_1 = cv_0$ e v; i vari coefficienti venivano poi valutati sperimentalmente, e in tal modo si teneva anche (automaticamente) conto del coefficiente di restituzione c. Il Levi-Civita, del resto, si riferiva a ciò in [**4**]$_1$ assumendo per la costante β — da lui scritta, al posto di βc^2, nella (1.5) — i valori tabulati dal Siacci in [**9**].

* * *