Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 443-457

UGO BRUZZO e ENRICO PAGANI (*)

Metodi variazionali e definizione dell'energia nella teoria linearizzata della Relatività generale (**)

1 - Introduzione

Nella formulazione hamiltoniana delle equazioni gravitazionali Einsteiniane [2], l'invarianza della teoria per trasformazioni arbitrarie di coordinate dà luogo a una super-hamiltoniana identicamente nulla, e quindi non interpretabile come energia del campo. Ciò è connesso con la non canonicità della teoria. Un formalismo canonico è stato proposto da Arnowitt, Deser e Misner; esso può essere ottenuto impiegando una generalizzazione del metodo di Palatini. Ciò è brevemente delineato in **2**.

È possibile procedere in maniera analoga nel caso della teoria linearizzata. Viene quindi formulata una versione «linearizzata» del metodo di Palatini generalizzato (**4**), che conduce a un formalismo hamiltoniano per la relatività generale nel caso di campo debole. L'hamiltoniana totale consta di due parti, una delle quali si annulla identicamente in virtù delle equazioni di campo, esprimendo dei vincoli sulle variabili dinamiche, mentre la seconda è suscettibile di interpretazione energetica. Questi due aspetti vengono discussi in **4**, **5**; in quest'ultimo viene inoltre calcolata l'energia del campo prodotto da una distribuzione statica sferosimmetrica di materia, e viene discussa l'analogia con l'energia del campo elettrostatico.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 25-VI-1979.

2 - Metodi variazionali in relatività generale

È noto come la formulazione ADM [**2**] della dinamica della relatività generale possa essere ricondotta ad una particolare applicazione di una generalizzazione del metodo di Palatini [**3**], [**8**]$_3$, [**11**], [**12**]. Al fine di esporre tale generalizzazione introduciamo alcune definizioni e preliminari matematici.

Sia V_4 una varietà differenziabile riemanniana di tipo iperbolico normale, dotata di forma fondamentale ([1])

$$\Phi = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j ,$$

e sia $\{\tilde{\partial}_i, \omega^j\}$ una base, non necessariamente olonoma, dell'algebra tensoriale sulla varietà. Detta Ξ la totalità delle connessioni affini ∇ definite sulla varietà, ogni elemento di Ξ è individuato da 64 simboli di connessione; ad esso sono inoltre associati due campi tensoriali T e R, detti rispettivamente *tensore di torsione* e *tensore di curvatura* di ∇ [**7**] ([2]). Nel caso in cui ∇ sia la connessione riemanniana $\hat{\nabla}$ associata a Φ, il corrispondente tensore R è detto *tensore di Riemann* determinato da Φ, ed è in tal caso indicato con $\hat{R}$. Per ogni $\nabla \in \Xi$, l'equazione

$$N(X, Y) = \nabla_X Y - \hat{\nabla}_X Y \qquad \forall X, Y \in D^1$$

definisce un tensore $N \in D^1_2$, la cui conoscenza, unitamente a quella della metrica, equivale alla conoscenza della connessione ∇ (si noti che N ha 64 componenti indipendenti). Se ∇ è una connessione metrica, le componenti di N sono date da [**8**]$_1$

$$N^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2}(T^i{}_{jk} + T_k{}^i{}_j - T_{jk}{}^i) . \tag{2.1}$$

Il tensore N associato ad una connessione metrica ha quindi solo 24 componenti indipendenti, o, in altre parole, una connessione metrica ha solo i 24 gradi di libertà « torsionali ». Nel caso in cui la connessione non sia metrica, i rimanenti 40 gradi di libertà possono essere rappresentati dal tensore $Q \in D^1_2$, definito in componenti da

$$Q^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2} g^{ip}(\nabla_j g_{pk} + \nabla_k g_{pj} - \nabla_p g_{jk}) .$$

([1]) Gli indici latini corrono da 0 a 3, i greci da 1 a 3; la segnatura della metrica è $(-+++)$; $g \overset{\text{def}}{=} \det(g_{ij})$.

([2]) Il tensore di torsione e il tensore di curvatura contratto sono dati in componenti da

$$T^i{}_{jk} = \Gamma_{jk}{}^i - \Gamma_{kj}{}^i - \langle [\partial_j, \partial_k], \omega^i \rangle ,$$

$$R_{jk} = R^q{}_{jkq} = \partial_k \Gamma_{qj}{}^q - \partial_q \Gamma_{kj}{}^q + \Gamma_{qj}{}^i \Gamma_{ki}{}^q - \Gamma_{kj}{}^i \Gamma_{qi}{}^q - \langle [\partial_k, \partial_m], \omega^p \rangle \Gamma_{pj}{}^m .$$

Si può facilmente vedere che Q è nullo se e solo se ∇ è metrica, e che la conoscenza di Q e T equivale alla conoscenza di ∇ tramite la relazione

$$N^i{}_{jk} = Q^i{}_{jk} + \tfrac{1}{2}(T^i{}_{jk} + T_k{}^i{}_j - T_{jk}{}^i)\,,$$

che generalizza la (2.1).

Possiamo infine enunciare il seguente teorema [**8**]$_3$.

Teorema 1. *Sia $\Xi' \subset \Xi$ una sottoclasse di connessioni affini su V_4 caratterizzate da m vincoli ($m \leqslant 24$) esprimibili come restrizioni algebriche sulle componenti del tensore di torsione. Dato il funzionale della metrica Φ e della connessione $\nabla \in \Xi'$, $I = I(\nabla, \Phi)$, definito dalle equazioni*

$$I = \int_\Omega \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x\,,$$

$$\mathscr{L} = (-g)^{\frac{1}{2}} g^{jk}(R_{jk} + T^p{}_{pr}T_{jk}{}^r + \tfrac{1}{2}T^p{}_{rj}T^r{}_{pk} + \tfrac{1}{4}T_r{}^p{}_jT^r{}_{pk} - \nabla_j T^p{}_{pk} + \nabla_p T_j{}^p{}_k)\,,$$

la condizione $\delta I = 0$ equivale a

$$\hat{R}_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}g^{hk}\hat{R}_{hk} = 0\,, \qquad \nabla \in \Xi', \qquad \nabla\Phi = 0\,.$$

Il principio variazionale offre quindi contemporaneamente le equazioni di Einstein e la determinazione dell'insieme delle connessioni *metriche* soddisfacenti i prefissati vincoli sulla torsione. In particolare, se tutte le componenti del tensore di torsione sono fissate a priori, il principio offre l'unica connessione metrica avente tale tensore di torsione. Se quest'ultimo è nullo, ovvero se i 24 vincoli sono $T^i{}_{jk} = 0$, viene fissata la connessione riemanniana, per cui in tal caso il metodo esposto si riduce al classico metodo di Palatini.

Conformemente allo spirito del metodo ADM, introduciamo in V_4 una famiglia Σ a un parametro di ipersuperfici tridimensionali. Una connessione affine ∇ è detta *adattata* a Σ se è metrica e se per ogni superficie $\sigma \in \Sigma$, $\forall X \in D^1(V_4)$, $\forall Y \in D^1(\sigma)$, posto $Z = \nabla_X Y$, allora $Z \in D^1(\sigma)$. Di conseguenza, se ∇ è adattata a Σ, la restrizione di ∇ su $D^1(\sigma)$, detta $\tilde{\nabla}$, definisce su σ un'analisi tensoriale *spaziale*.

Il formalismo risulta semplificato dall'introduzione di una particolare scelta di basi dell'algebra tensoriale. È noto [4] che data in V_4 una congruenza Γ di curve differenziabili di tipo tempo, caratterizzata quindi da un campo vettoriale tangente $\tilde{\partial}_0$ soddisfacente la condizione $(\tilde{\partial}_0, \tilde{\partial}_0) = -1$, e posto (³)

(³) g indica l'applicazione da D^1 in D_1 associata a Φ e definita da

$$g(X^i\partial_i) = g_{ij}X^i\omega^j \qquad \forall X \in D^1.$$

$\omega^0 = -g(\tilde{\partial}_0)$, la coppia $\tilde{\partial}_0$, ω^0 può essere completata ad una base $\{\tilde{\partial}_i, \omega^j\}$ di $D(V_4)$, soddisfacente le condizioni $\langle \partial_i, \omega^j \rangle = \delta_i^j$, $\omega^\alpha = df^\alpha$, dove le funzioni f^α sono tre soluzioni indipendenti dell'eq. $\tilde{\partial}_0(f) = 0$ [**8**]$_1$, [**13**]. Tale base è detta *naturale*, ed è fissata, una volta data la congruenza Γ e la metrica, a meno della scelta delle tre funzioni f^α. In basi naturali le componenti di Φ sono (4)

$$\Phi = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha \otimes \omega^\beta - \omega^0 \otimes \omega^0 \overset{\text{def}}{=} \tilde{\Phi} - \omega^0 \otimes \omega^0 .$$

Nel caso in cui l'ente geometrico su cui si fonda la teoria è, come nel caso del metodo ADM, una famiglia di superfici, a questa si può associare formalmente, mediante la metrica incognita, una congruenza normale Γ, e costruire una base naturale associata. Tale procedura permette una semplice caratterizzazione della classe delle connessioni adattate a Σ e in particolare della connessione standard [**8**]$_1$. In particolare, nel caso in cui si voglia caratterizzare variazionalmente tale tipo di connessione, si ottiene una forma particolarmente semplice delle equazioni di vincolo sul tensore di torsione [**3**], [**11**], vale a dire

(2.2a) $$\tilde{T}^0{}_{\beta\lambda} = 0 ,$$

(2.2b) $$\tilde{T}^0{}_{0\alpha} = -\tilde{Q}^0{}_{0\alpha} - \widetilde{\left\{{}_0{}^0{}_\alpha\right\}} \qquad \text{(12 vincoli)} ,$$

(2.2c) $$\tilde{T}_{(\beta}{}^0{}_{\alpha)} = -\tilde{Q}^0{}_{\alpha\beta} - \widetilde{\left\{{}_\alpha{}^0{}_\beta\right\}} .$$

Affinchè il problema variazionale individui un'unica connessione adattata, è necessario imporre 12 ulteriori condizioni sulla torsione. La scelta più semplice è quella che conduce alla connessione standard ∇^* [**8**]$_{1,2}$

(2.3a) $$\tilde{T}^\alpha{}_{\beta\lambda} = 0 ,$$ (2.3b) $$\tilde{T}_{[\alpha}{}^0{}_{\beta]} = 0 .$$

A questo punto il problema variazionale è completamente definito e la sua risoluzione fornisce i seguenti risultati

(1) la metricità della connessione, che, unitamente ai 24 vincoli su T, equivale alla determinazione della connessione standard,

(2) le equazioni di Einstein nel vuoto.

(4) Il segno $\sim$ indica che le componenti sono espresse su una base naturale.

Inserendo una parte dei risultati ottenuti nel funzionale I si ottiene la seguente lagrangiana

$$\mathscr{L} = (-g)^{\frac{1}{2}}\{R^* - \tfrac{1}{4}(\tilde{K}^{\lambda}{}_{\lambda})^2 + \tfrac{1}{4}\tilde{K}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\tilde{K}_{\alpha\beta}\tilde{K}^{\alpha\beta} - \tilde{K}^{\lambda}{}_{\lambda}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_0\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}\}\,,$$

dove il tensore $\tilde{K}_{\alpha\beta}$ risulta definito dalle equazioni $\tilde{K}_{\alpha\beta} = \tilde{\partial}_0\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$, e si identifica quindi con il tensore di Born associato alla congruenza Γ [**8**]$_1$.

La lagrangiana può essere scritta in coordinate $\{x^i\}$ adattate alla famiglia Σ di superfici [**4**]$_1$.

$$\mathscr{L} = \pi^{\alpha\beta}\partial_0\gamma_{\alpha\beta} - N\mathscr{H}_0 - N^{\alpha}\mathscr{H}_{\alpha}\,, \qquad \pi^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}(K^{\alpha\beta} - K^{\lambda}{}_{\lambda}\gamma^{\alpha\beta})\,,$$

$$\mathscr{H}_0 = \gamma^{\frac{1}{2}}\{R^* - \gamma^{-1}(\tfrac{1}{2}(\pi^{\lambda}{}_{\lambda})^2 - \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta})\}\,, \qquad \mathscr{H}_{\alpha} = -2\hat{\nabla}_{\mu}\pi^{\mu}{}_{\alpha}\,,$$

avendo indicato con γ il determinante della metrica spaziale.

Il legame tra base natura e base adattata è definito, a meno di rotazioni « spaziali », dalla relazione $\tilde{\partial}_0 = (1/N)(\partial/\partial x_0 - N^{\alpha}(\partial/\partial x^{\alpha}))$, [**3**], [**9**], [**11**]. La lagrangiana ottenuta coincide con la lagrangiana ADM [**2**]. Quest'ultima è stata ottenuta da Arnowitt, Deser e Misner mediante la tridimensionalizzazione della lagrangiana di Palatini in termini di quantità aventi significato tensoriale rispetto a una famiglia di superfici assegnate in V_4. In particolare la lagrangiana ADM è espressa in termini della connessione riemanniana definita sulle superfici. Poichè la risoluzione spaziale della connessione standard coincide con la connessione riemanniana sulle superfici, non è sorprendente che la lagrangiana ottenuta dal principio variazionale che fissa la connessione standard coincida con la lagrangiana ADM.

3 - Teoria linearizzata

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni preliminari per lo sviluppo di un formalismo variazionale per la relatività generale nel caso di debole campo gravitazionale.

Sia V_4 la varietà spazio-temporale, supposta inizialmente dotata di metrica lorentziana; vi si introduca una famiglia Σ di piani paralleli spaziali. Dato su V_4 un sistema di riferimento pseudo-cartesiano [**10**] la forma fondamentale si esprime

$$\Phi_0 = \eta_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

dove $\eta_{\alpha\beta} = 1$, $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0\alpha} = 0$, mentre il requisito di spazialità di Σ si traduce nella condizione che la famiglia di piani sia descritta da una 1-forma ω^0

di componenti γ_i tale che

$$\eta^{ij}\gamma_i\gamma_j = -1 \,.$$

In particolare è conveniente adottare un sistema di coordinate $B = \{x^i\}$ pseudo-cartesiano adattato a Σ [**4**]$_1$.

Nello spirito della teoria gravitazionale linearizzata introduciamo una debole perturbazione alla metrica spazio-temporale. In B la nuova forma fondamentale si può scrivere

$$\Phi = (\eta_{ij} + h_{ij})\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \tag{3.1}$$

con $|h_{ij}| \ll 1$. Anche in questo contesto ha senso introdurre una base naturale. Φ associa a Σ un campo vettoriale normale $\tilde{\partial}_0$ mediante la relazione $\tilde{\partial}_0 = -\, g^{-1}(\omega^0)$ e la coppia $\tilde{\partial}_0$, ω^0 può essere canonicamente completata ad una base naturale **2**. Contrariamente a quanto si verificherebbe in assenza di perturbazione, $\tilde{\partial}_0$ non è parallelo al campo $\partial/\partial x^0$. Conveniamo di scrivere formalmente $\tilde{\partial}_0$ sulla base associata a B (base adattata) secondo la relazione

$$\tilde{\partial}_0 = \frac{1}{N}\, \frac{\partial}{\partial x^0} - N^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \,. \tag{3.2}$$

È noto che, data la metrica di V_4 (varietà ambiente), risulta determinata la metrica su ogni sottovarietà immersa [**6**]. Viceversa, data la metrica sulla sottovarietà, la definizione del campo vettoriale normale fissa la 4-geometria sui punti di V_4 appartenenti alla sottovarietà. Ovviamente nel caso in cui si consideri una famiglia di superfici, viene fissata la metrica in tutto V_4. Ciò lega le funzioni N, N^β dell'eq. (3.2) alle componenti della forma fondamentale di V_4. Supposti infatti noti i prodotti scalari $(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta) \overset{\text{def}}{=} \gamma_{\alpha\beta}$, e tenendo conto della condizione $(\tilde{\partial}_0, \partial/\partial x^\alpha) = 0$ si trovano le seguenti espressioni per le componenti g_{ij} di Φ su B

$$g_{00} = N^\beta N^\alpha \gamma_{\alpha\beta} - N^2, \qquad g_{0\beta} = N^\alpha \gamma_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} N_\beta \,, \qquad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \,.$$

Confrontando con l'eq. (3.1) si ottiene la relazione fra le funzioni N, N^β e la perturbazione h_{ij}

$$N_\beta = h_{0\beta} + O(h^2) \,, \tag{3.3}$$

$$N = 1 - \tfrac{1}{2} h_{00} + O(h^2) \,, \tag{3.4}$$

dove $O(h^2)$ indica termini di ordine superiore al primo nella perturbazione alla metrica pseudoeuclidea.

4 - Metodi variazionali in teoria linearizzata

Le equazioni di Einstein linearizzate possono essere dedotte dal principio variazionale associato alla lagrangiana

$$\mathscr{L} = (\eta^{ij} - h^{ij} + \tfrac{1}{2}h^p{}_p\eta^{ij})(\partial_j \Gamma_{ki}{}^k - \partial_k \Gamma_{ji}{}^k) + \eta^{ij}(\Gamma_{pi}{}^k\Gamma_{jk}{}^p - \Gamma_{ji}{}^k\Gamma_{pk}{}^p)\,, \tag{4.1}$$

dove i simboli $\Gamma_{jk}{}^i$ sono considerati dipendenti dalla metrica secondo la relazione

$$\Gamma_{jk}{}^i = \tfrac{1}{2}\eta^{ip}(\partial_k h_{pj} + \partial_j h_{kp} - \partial_p h_{jk})\,. \tag{4.2}$$

Alternativamente è possibile [**1**] trattare i $\Gamma_{jk}{}^i$ come variabili indipendenti rispetto alla metrica, soggetti però al vincolo di torsione nulla $\Gamma_{jk}{}^i = \Gamma_{kj}{}^i$; in tal caso il principio variazionale offre, variando indipendentemente rispetto alle componenti del tensore metrico e rispetto ai simboli $\Gamma_{jk}{}^i$, la definizione di questi ultimi secondo l'eq. (4.2), e le equazioni

$$R^1_{ij} - \tfrac{1}{2}\eta_{ij}\eta^{hk}R^1_{hk} = 0\,, \tag{4.3}$$

dove $R^1_{ij} = \partial_j \Gamma_{ki}{}^k - \partial_k \Gamma_{ji}{}^k$. L'insieme delle eq. (4.2,3) è equivalente alle equazioni di Einstein linearizzate. Ciò costituisce la versione linearizzata del metodo di Palatini.

In analogia a quanto descritto in **2**, sviluppiamo ora un metodo variazionale che costituisce una generalizzazione del metodo di Palatini «linearizzato».

Teorema 2. *Sia $\Xi' \subset \Xi$ una sottoclasse di connessioni affini su V_4 caratterizzata da m vincoli ($m \leqslant 24$) esprimibili come restrizioni algebriche sulle componenti del tensore di torsione. Dato il funzionale della metrica Φ e della connessione $\nabla \in \Xi'$, $I = I(\nabla, \Phi)$, definito dalle equazioni*

$$I = \int_\Omega \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x\,, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = (h^{ij} - \tfrac{1}{2}\eta^{ij}h^p{}_p)R^1_{ij} + \eta^{ij}R_{ij} + T^p{}_{pq}T^k{}_k{}^q + \tfrac{1}{2}T^p{}_{qk}T^q{}_p{}^k + \tfrac{1}{4}T^q{}_p{}^kT_q{}^p{}_k \\ + (2 + h^p{}_p)\partial_k T^{qk}{}_q + h^{jk}(\partial_j T^p{}_{pk} - \partial_p T_j{}^p{}_k) + \eta^{jk}\Gamma_{jk}{}^qT^p{}_{pq} \\ + \Gamma_{pk}{}^pT^{qk}{}_q - \Gamma_{pk}{}^qT_q{}^{pk} - \Gamma_{pk}{}^qT^{kp}{}_q\,,\end{aligned}$$

la condizione $\delta I = 0$ equivale a

$$\hat{R}^1_{ij} - \tfrac{1}{2}\eta_{ij}\eta^{pk}\hat{R}^1_{pk} = 0\,, \qquad \nabla \in \Xi'\,, \tag{4.5}$$

$$\partial_k h_{ij} - \Gamma_{ki}{}^p g_{pj} - \Gamma_{kj}{}^p g_{ip} = 0\,. \tag{4.6}$$

$\tilde{R}^1_{ij}$ è la parte lineare del tensore di Riemann contratto, per cui le eq. (4.5) sono le equazioni di Einstein linearizzate, mentre le 40 eq. (4.6) esprimono al primo ordine la metricità della connessione. Una traccia di dimostrazione del teorema è delineata in Appendice.

Poichè, come abbiamo visto in **2**, l'applicazione del metodo di Palatini generalizzato alla determinazione della connessione standard associata a una congruenza normale conduce al metodo ADM, allo scopo di ottenere l'analogo in un contesto linearizzato, e quindi giungere a un formalismo canonico per la teoria linearizzata, applichiamo il Teorema 2 (metodo di Palatini generalizzato «linearizzato») alla determinazione variazionale della connessione standard. Dobbiamo quindi imporre gli opportuni vincoli a priori sul tensore di torsione, che coincidono con le eq. (2.2,3). Per convenienza, vengono lasciate libere le quantità $\tilde{T}_{(\alpha}{}^0{}_{\beta)}$ e $\tilde{T}^0{}_{\beta 0}$. Imponendo i vincoli nella lagrangiana (4.4), essa si riduce a

$$(4.7)\qquad \mathscr{L} = (\tilde{h}^{ij} - \tfrac{1}{2}\tilde{h}^p{}_p\eta^{ij})\tilde{R}^1_{ij} + \eta^{ij}\tilde{R}^2_{ij} + \tilde{T}_\alpha{}^0{}_\beta\tilde{T}^{\alpha 0\beta} - (\tilde{T}^{\beta 0}{}_\beta)^2 - \tilde{\partial}_0\tilde{T}^\beta{}_{0\beta}$$

$$+\tilde{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\mu\tilde{T}^{0\beta}{}_0 + \tilde{\theta}^\beta{}_\beta(\tilde{\partial}_\mu\tilde{T}^{0\mu}{}_0 - \tilde{\partial}_0\tilde{T}^\beta{}_{0\beta}) - \tilde{\theta}^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha\tilde{T}^0{}_{\beta 0} + \tilde{\theta}^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_0\tilde{T}_{\alpha 0\beta} + 2\tilde{\partial}_\beta\tilde{T}^{0\beta}{}_0 - \delta^{\alpha\beta}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\mu\tilde{T}^0{}_{\mu 0}.$$

Si è tenuto conto del fatto che in base naturale $\tilde{g}^{0\beta} = 0$, $\tilde{g}^{00} = -1$, e si è posto $\tilde{\theta}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}$ (si noti che $\tilde{h}_{0i} = 0$). A questo punto le equazioni del moto si scrivono

$$(4.8)_a\qquad \tilde{T}_\alpha{}^0{}_\beta = -\tfrac{1}{2}\tilde{K}_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\tilde{\partial}_0\tilde{\theta}_{\alpha\beta}\,, \qquad (4.8)_b\qquad \tilde{T}^0{}_{\beta 0} = \langle[\tilde{\partial}_0, \tilde{\partial}_\beta], \omega^0\rangle\,,$$

$$(4.8)_c\qquad \tilde{\Gamma}_{ij}{}^0 = 0\,, \qquad (4.8)_d\qquad \tilde{\Gamma}_{j0}{}^i = 0\,,$$

$$(4.8)_e\qquad \tilde{\Gamma}_{\beta\mu}{}^\alpha = \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\nu}(\tilde{\partial}_\beta\tilde{\theta}_{\mu\nu} + \tilde{\partial}_\mu\tilde{\theta}_{\nu\beta} - \tilde{\partial}_\nu\tilde{\theta}_{\beta\mu})\,.$$

Le eq. (4.8) sono 64 condizioni che fissano completamente la connessione. Inserendo tali equazioni nella lagrangiana (4.7) ed eliminando un termine che, a meno di $O(h^3)$, costituisce una divergenza spaziale, si ottiene

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2}(\delta^{\alpha\beta}\tilde{K}^\mu{}_\mu - \tilde{K}^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_0\tilde{\theta}_{\alpha\beta} + R^{*1} + R^{*2} - \tilde{\theta}^{\alpha\beta}\tilde{R}^{*1}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha)^2 + \tfrac{1}{4}\tilde{K}_{\alpha\beta}\tilde{K}^{\alpha\beta},$$

dove le tracce sono ottenute per contrazione con la delta di Kronecker e $\tilde{R}^{*1}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{R}^{*2}_{\alpha\beta}$ sono rispettivamente la parte lineare e quadratica nei coefficienti di Christoffel spaziali del tensore di curvatura associato alla connessione standard (le componenti $\tilde{R}^*_{00}$ e $\tilde{R}^*_{0\beta}$ sono nulle [**8**]$_2$).

La scrittura di $\mathscr{L}$ in base naturale, per definizione stessa di quest'ultima, occulta quattro gradi di libertà metrici. Per ovviare a questo inconveniente esprimiamo $\mathscr{L}$ su una base olonoma, indipendente quindi dalla metrica; in particolare, scegliamo una base associata ad un sistema di coordinate B del tipo menzionato in **3**. Detta $\{\partial_i, dx^j\}$ tale base, e tenuto conto del fatto che sia i vettori $\tilde{\partial}_\alpha$ sia i ∂_α sono tangenti alle superfici della famiglia Σ, la relazione fra le due basi è data dalle equazioni

$$\tilde{\partial}_0 = \frac{1}{N}\partial_0 - N^\alpha \partial_\alpha\,, \qquad \tilde{\partial}_\alpha = S^\beta{}_\alpha \partial_\beta\,,$$

dove, come abbiamo visto in **3**, le funzioni N, N^α sono legate alla metrica di V_4, mentre $S^\beta{}_\alpha$ è una matrice 3×3 [3], [**11**].

Eseguendo il passaggio di base si ottiene, a meno dell'eliminazione di termini di ordine $O(h^3)$ e di divergenze spaziali, la seguente lagrangiana

$$\mathscr{L}_{\text{geom}} = \tfrac{1}{2}(\delta^{\alpha\beta}K^\mu{}_\mu - K^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_0\theta_{\alpha\beta} + NR^{*1} - N^\beta(\partial_\alpha K^\alpha{}_\beta - \partial_\beta K^\alpha{}_\alpha) + \tfrac{1}{2}\theta^\beta_\beta R^{*1}$$
$$+ R^{*2} - \theta^{\alpha\beta}R^{*1}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}(K^\beta{}_\beta)^2 + \tfrac{1}{4}K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta},$$

dove, conformemente a quanto già detto,

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} R^{*1} &= \delta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta \left\{{\mu \atop \alpha\ \mu}\right\} - \partial_\mu\left\{{\mu \atop \alpha\ \beta}\right\}\right),\\ R^{*2} &= \delta^{\alpha\beta}\left(\left\{{\mu \atop \alpha\ \varrho}\right\}\left\{{\varrho \atop \beta\ \mu}\right\} - \left\{{\mu \atop \alpha\ \beta}\right\}\left\{{\varrho \atop \mu\ \varrho}\right\}\right). \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero per $K_{\alpha\beta}$ ne danno la definizione in base adattata ([5])

$$(4.10)\qquad K_{\alpha\beta} = \partial_0\theta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha N_\beta - \partial_\beta N_\alpha \equiv -2\left\{{0 \atop \alpha\ \beta}\right\},$$

mentre le equazioni per la metrica spaziale forniscono, unitamente alle eq. (4.10), le equazioni di Einstein linearizzate e relativizzate alla famiglia di superfici. Introducendo i momenti cinetici $\pi^{\alpha\beta}$

$$\pi^{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathscr{L}_{\text{geom}}}{\partial\tilde{\partial}_0\theta_{\alpha\beta}} = \tfrac{1}{2}(\delta^{\alpha\beta}K^\mu{}_\mu - K^{\alpha\beta})\,,$$

([5]) Questa equazione mostra che $K_{\alpha\beta}$ coincide con la seconda forma fondamentale definita sulle superfici [**6**].

e le abbreviazioni

$$\mathscr{H}_0 = -R^{*1}, \qquad \mathscr{H}_\beta = -2\hat{\nabla}_\mu \pi^\mu{}_\beta\,,$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{geom}} = -\tfrac{1}{2}\theta^\beta{}_\beta R^{*1} + \theta^{\alpha\beta} R^{*1}_{\alpha\beta} - R^{*2} + \tfrac{1}{2}(\pi^\beta{}_\beta)^2 - \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta},$$

la lagrangiana si può scrivere

$$\mathscr{L}_{\mathrm{geom}} = \pi^{\alpha\beta}\partial_0\theta_{\alpha\beta} - N\mathscr{H}_0 - N^\beta\mathscr{H}_\beta - \mathscr{H}_{\mathrm{geom}}\,.$$

In quest'ultima relazione, poichè, a meno di divergenze e di termini di ordine $O(h^3)$, vale la relazione

$$\theta^{\alpha\beta} R^{*1}_{\alpha\beta} = R^{*1} + 2R^{*2},$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{geom}}$ si può pensare come

$$\mathscr{H}_{\mathrm{geom}} = R^{*1}(1 - \tfrac{1}{2}\theta^\beta{}_\beta) + R^{*2} + \tfrac{1}{2}(\pi^\beta{}_\beta)^2 - \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}.$$

Le variabili N, N^β che compaiono come moltiplicatori di Lagrange, non svolgono ruolo dinamico [**2**]. Ne risulta che vengono identicamente soddisfatti i vincoli $\mathscr{H}_0 = 0$, $\mathscr{H}_\beta = 0$ che coincidono con le eq. $G^1_{0i} \equiv R^1_{0i} - \frac{1}{2}\eta_{0i}R^1 = 0$. Inserendo questi vincoli nella $\mathscr{L}_{\mathrm{geom}}$, si ottiene

$$\mathscr{L}_{\mathrm{geom}} = \pi^{\alpha\beta}\partial_0\theta_{\alpha\beta} - \mathscr{H}_{\mathrm{geom}}\,, \qquad \mathscr{H}_{\mathrm{geom}} = R^{*2} + \tfrac{1}{2}(\pi^\beta{}_\beta)^2 - \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta},$$

e i $\pi^{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\beta}$ sono soggetti ai vincoli $\mathscr{H}_0 = 0$, $\mathscr{H}_\beta = 0$. L'hamiltoniana $\mathscr{H}_{\mathrm{geom}}$ non è identicamente nulla e quindi la teoria, contrariamente a quanto avveniva nel caso generale, offre un'hamiltoniana significativa. Ciò era prevedibile, in quanto la teoria è invariante rispetto a un gauge molto più ridotto. Nel caso della teoria generale, la scelta delle superfici era completamente arbitraria, e ciò corrispondeva alla possibilità di effettuare trasformazioni di coordinate del tutto generali. Nel caso linearizzato, la presenza del background piatto e l'approccio perturbativo vincolano la scelta a una famiglia di piani paralleli, in quanto solo in questo caso ha senso parlare di piccole deviazioni della metrica spaziale dall'euclideità. Il gauge a disposizione è quindi quello delle trasformazioni di Lorentz.

5 - Energia del campo gravitazionale

L'hamiltoniana $\mathscr{H}_{\mathrm{geom}}$, non nulla, può essere interpretata come densità di energia del campo gravitazionale. Più precisamente si introduce la densità

$$u_g = -\frac{c^4}{16\pi k}\mathscr{H}_{\text{geom}},$$

definita tramite la costante gravitazionale k, che costituisce il legame tra quantità geometriche ($\mathscr{H}_{\text{geom}}$) e quantità fisiche ($u_g$). Per verificare la validità di tale ipotesi, calcoliamo l'energia del campo gravitazionale integrando u_g su tutto lo spazio in un caso particolarmente semplice; consideriamo una sfera di raggio R (in coordinate sferiche) di fluido perfetto di densità di massa propria μ costante, in quiete rispetto a un opportuno sistema di riferimento (pseudocartesiano), identificato con il sistema di coordinate adattato introdotto precedentemente.

La densità di energia gravitazionale si riduce nel caso statico a

$$u_g = -\frac{c^4}{16\pi k}R^{*2}. \tag{5.1}$$

La perturbazione alla metrica lorentziana dentro e fuori la materia è [**10**]

$$h_{ij} = -\frac{2\chi}{c^2}\,\delta_{ij},$$

dove χ è il potenziale newtoniano. All'interno e all'esterno della sfera esso è dato rispettivamente da

$$\chi^{\text{in}}(r) = -2\pi\mu k\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right), \qquad \chi^{\text{out}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\mu k R^3 r^{-1},$$

dove r è la coordinata radiale sferica. Tenendo conto delle ultime equazioni, la densità di energia del campo gravitazionale si scrive, rispettivamente all'interno e all'esterno della sfera

$$u_g^{\text{in}}(r) = -\frac{2}{9}\pi k\mu^2 r^2, \qquad u_g^{\text{out}}(r) = -\frac{2}{9}\pi k\mu^2 R^6 r^{-4}.$$

Detta Ω la regione di spazio occupata dalla sfera di fluido, l'energia del campo gravitazionale da essa prodotto assume il valore

$$E_g = \int_{R^3-\Omega} u_g^{\text{out}}\,\mathrm{d}^3x + \int_{\Omega} u_g^{\text{in}}\,\mathrm{d}^3x = -\frac{16}{15}\pi^2\mu^2 k R^5, \tag{5.2}$$

che coincide con l'energia potenziale gravitazionale newtoniana della sfera di materia in oggetto.

In base al principio di equivalenza, l'energia della materia è data da

$$(5.3)\qquad E_{\mathrm{mat}} = \int_{\Omega} \mu c^2 [\det(\delta_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta})]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}^3x = \int_{\Omega} \mu c^2 (1 + \tfrac{1}{2}\theta^{\beta}{}_{\beta})\,\mathrm{d}^3x$$

$$= \frac{4}{3}\,\pi\mu c^2 R^3 + \frac{16}{15}\pi^2\mu^2 k R^5 .$$

Questo valore differisce dall'energia della materia in assenza di interazione gravitazionale (c^2 volte la massa di Schwarzschild) per un termine che possiamo interpretare come difetto di massa (negativo). Cattaneo $[4]_2$ ha proposto di assegnare al campo gravitazionale una energia pari a questo difetto di massa. Tale valore coincide con quello da noi calcolato.

In conclusione, è possibile calcolare l'energia del campo gravitazionale in due modi:

(1) integrando su tutto lo spazio (eq. (5.1), (5.2)) una sorta di quadrato del campo gravitazionale (vedi def. di R^{*2} (4.9));

(2) calcolando direttamente l'interazione fra materia e campo, secondo la (5.3).

Ciò è analogo a quanto avviene nel calcolo dell'energia elettrostatica di una distribuzione ϱ di carica, che può essere ottenuta equivalentemente dalle due relazioni

$$(1)' \qquad E_e = \frac{1}{8\pi}\int_{R^3} |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}^3x\,, \qquad\qquad (2)' \qquad E_e = \frac{1}{2}\int_{R^3} \varrho(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x\,.$$

Appendice (traccia di dimostrazione del Teorema 2)

(1) La densità di lagrangiana Ψ così definita

$$\Psi = \Psi(\nabla, \Phi) = \eta^{jk}R_{jk} + \eta^{jk}(T^p{}_{pi}T_{jk}{}^i + \tfrac{1}{2}T^p{}_{ij}T^i{}_{pk} + \tfrac{1}{4}T_i{}^p{}_jT^i{}_{pk} - \nabla_j T^p{}_{pk}$$

$$+ \nabla_p T_j{}^p{}_k - \delta^{iq}_{jp}Q^p{}_{im}Q^m{}_{qk} + \hat{\nabla}_p Q^p{}_{jk} - \hat{\nabla}_j Q^p{}_{pk})$$

$$+ (\tfrac{1}{2}h^m{}_m\eta^{jk} - h^{jk})\cdot(R^l_{jk} - \partial_j T^p{}_{pk} + \partial_p T_j{}^p{}_k + \partial_p Q^p{}_{jk} - \partial_j Q^p{}_{pk})\,;$$

è costante su Ξ, ed è uguale alla densità di lagrangiana di Einstein linearizzata (4.1). Ciò dimostra per computo diretto, in base alla definizione dei campi

T e Q e alla relazione

$$R_{jk} = \hat{R}_{jk} + \delta^{rs}_{jp}(N^p{}_{rq}N^q{}_{sk} + \hat{\nabla}_r N^p{}_{sk}) \, .$$

(2) In secondo luogo si osserva che le espressioni

$$\eta^{jk}\nabla_p Q^p{}_{jk} + (\partial_p Q^p{}_{jk})(\tfrac{1}{2}h^m{}_m\eta^{jk} - h^{jk}) = \partial_p Q^{pk}{}_k \, ,$$

$$\eta^{jk}\nabla_j Q^p{}_{pk} + (\partial_j Q^p{}_{pk})(\tfrac{1}{2}h^m{}_m\eta^{jk} - h^{jk}) = \partial_j Q_p{}^{pj}$$

costituiscono divergenze ordinarie, e possono quindi essere eliminate, ottenendo così una lagrangiana Ψ' equivalente alla lagrangiana di Einstein linearizzata. Inoltre, essendo Ψ costante su Ξ, e tenendo conto della definizione di Ψ', si ha che, assunti come « coordinate » su Ξ i campi T e Q, le derivate variazionali di Ψ' rispetto ai campi stessi sono nulle

$$\frac{\delta\Psi'}{\delta T^i{}_{jk}} = \frac{\delta\Psi'}{\delta Q^i{}_{jk}} = 0 \, . \tag{A.1}$$

(3) Consideriamo ora la densità

$$\mathscr{L} = \psi' + \eta^{jk}\,\delta^{iq}_{jp}\,Q^p{}_{im}\,Q^m{}_{qk} \, .$$

Per le eq. (A.1) si ha

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta T^i{}_{jk}} = 0 \, , \qquad \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta Q^p{}_{im}} = \eta^{jk}\,\delta^{iq}_{jp}Q^m{}_{qk} + \eta^{jm}\,\delta^{qi}_{jk}Q^k{}_{qp} \, ;$$

a questo punto si dimostra facilmente che la condizione

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta Q^i{}_{jk}} = 0 \qquad \text{implica} \quad Q^i{}_{jk} = 0 \, . \tag{A.2}$$

Questo risultato permette di enunciare il seguente

T e o r e m a. *Dato*

$$I = I(\nabla, \Phi) = \int_\Omega \mathscr{L}\, d^4x \, , \tag{A.3}$$

il problema variazionale associato a I *nelle variabili* ∇, Φ *equivale a*

$$\nabla^1\Phi = 0 \qquad (\textit{condizione di metricità al } 1^\circ \textit{ ordine}) \, , \tag{A.4}$$

$$\hat{R}^1_{ij} - \tfrac{1}{2}\eta_{ij}\eta^{hk}\hat{R}^1_{hk} = 0 \, . \tag{A.5}$$

Un noto teorema del calcolo delle variazioni [**5**] afferma che il porre come vincolo a priori di un problema variazionale uno dei risultati del problema stesso conduce a un problema equivalente. Come abbiamo detto, $\delta\mathscr{L}/\delta Q^i{}_{jk} = 0$ implica $Q^i{}_{jk} = 0$, e ciò prova la (A.4). Inserendo poi $Q^i{}_{jk} = 0$ come vincolo a priori nel funzionale (A.3), questo si riduce all'integrale di Ψ'; poichè quest'ultimo è equivalente alla lagrangiana (4.1), il problema variazionale offre le equazioni di Einstein linearizzate nel vuoto (ovvero le eq. A.5).

(5) Sia infine $\Xi' \subset \Xi$ la classe delle connessioni affini soggette a determinati vincoli algebrici sul tensore di torsione. Sussiste allora il Teorema 2. La dimostrazione procede come nel caso appena illustrato, tenendo presente che l'esistenza dei vincoli su ∇ riconducibili a vincoli algebrici su T non invalida l'implicazione (A.2).

Bibliografia

[**1**] R. Arnowitt and S. Deser, *Quantum theory of gravitation: general formulation and linearized theory*, Phys. Rev. **113** (1959), 745-750.

[**2**] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, *The dynamics of general relativity*, in L. Witten (ed.), *Gravitation: an introduction to current research*, Wiley, New York 1962, 227-265.

[**3**] U. Bruzzo, *Formulazione variazionale delle eq. grav. della Relatività generale*, Tesi di Laurea, Istituto di Scienze Fisiche, Genova (non pubbl.).

[**4**] C. Cattaneo: [•]$_1$ *General relativity: relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference*, Nuovo Cimento **10** (1958), 318-337; [•]$_2$ *Conservation laws*, Ann. Inst. H. Poincaré **4** A (1966), 1-20.

[**5**] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York 1953.

[**6**] L. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, University Press, Princeton 1956.

[**7**] S. Helgason, *Differential Geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York 1962.

[**8**] E. Massa: [•]$_1$ *Space tensors in general relativity* (I): *spatial tensor Algebra and Analysis*, General Relativity and Gravitation **5** (1974), 555-572; [•]$_2$ *Space tensors in General Relativity* (III): *The structural equations*, General Relativity and Gravitation **5** (1974), 715-736; [•]$_3$ *Tecniche variazionali in Relatività Generale: generalizzazione di un classico risultato di A. Palatini*, Riv. Mat. Univ. Parma (in corso di stampa).

[**9**] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, S. Francisco 1973.

[**10**] C. Møller, *The theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford 1952.

[**11**] E. Pagani, *Formalismi canonici in Relatività Generale*, Tesi di Laurea, Istituto di Scienze Fisiche, Genova (non pubbl.).

[**12**] A. Palatini, *Deduzione invariantiva delle eq. grav. dal principio di Hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo **43** (1919), 203-212.

[**13**] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1964.

Abstract

A generalized Palatini's method for the analysis of Einstein's gravitational equations is proposed in the case of the linearized theory. A Hamiltonian formulation, analogous to ADM *method for the full theory, is then obtained. The theory yields a Hamiltonian which may be interpreted as the energy of the gravitational field. An example for a static spherosymmetric distribution of matter is discussed.*

* * *