Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 287-297

F. SACERDOTE (*)

Limiti per le soluzioni di problemi ellittici di tipo misto (**)

1 - Introduzione

La ricerca di limitazioni *a priori* per le soluzioni dei problemi al contorno relativi a equazioni alle derivate parziali è una questione di grande importanza nella teoria esistenziale. È infatti ben noto che tutte le condizioni classiche che assicurano la corretta formulazione di un problema al contorno consistono in sostanza in determinate maggiorazioni *a priori* sulle soluzioni o, più precisamente, queste maggiorazioni *a priori* si sono rivelate interessanti per se stesse, in quanto capaci di fornire con immediatezza le principali informazioni quantitative sulle soluzioni.

In tale direzione Payne e Weinberger [**2**], e successivamente Bramble and Payne $[\mathbf{1}]_{1,2}$ hanno trovato maggiorazioni *a priori* relative a soluzioni di problemi ellittici del secondo ordine con dato al contorno di tipo Dirichlet o Neumann, utilizzando tecniche che si basano essenzialmente sull'applicazione del teorema di Green con l'introduzione di una funzione ausiliaria cui si richiedono opportune proprietà di regolarità.

In questo lavoro ho cercato di estendere il metodo usato da Payne e Weinberger ai problemi di tipo misto, nei quali cioè su una parte della frontiera il dato è di Dirichlet mentre sulla parte complementare sono assegnate condizioni naturali. L'estensione non è immediata, a causa della difficoltà di costruire la funzione ausiliaria in modo che abbia il comportamento richiesto nella regione di trapasso dei dati.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, Università, 56100 Pisa, Italy.
(**) Ricevuto: 15-II-1979.

Tale costruzione è possibile, e vengono dati alcuni esempi espliciti, quando la frontiera della regione in cui è formulato il problema presenta spigoli in corrispondenza della regione di trapasso dei dati.

2 - Una formula di maggiorazione

Sia D un dominio limitato dello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ la cui frontiera ∂D è costituita da un numero finito di porzioni di varietà ciascuna di classe C^1.

Ci proponiamo di trovare delle limitazioni per la funzione vettoriale $\boldsymbol{u} = (u^\beta)$ $(\beta = 1, \ldots, m)$, soluzione del seguente problema al contorno

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{g} && \text{in } D\,, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\varphi} && \text{su } B_1\,, \\ \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)_\alpha &= \psi_\alpha && \text{su } B_2\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove B_1 e B_2 sono due parti disgiunte di ∂D tali che $B_1 \cup B_2 = \partial D$, $\mathscr{B}$ è un operatore differenziale di componenti

$$\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{u}) = (a^{ij}_{\alpha\beta} u^\beta{}_{,j})_{,i}\,; \tag{2.2}$$

($a^{ij}_{\alpha\beta}(x)$ sono funzioni continue e differenziabili con continuità a tratti con derivate parziali limitate in D, con $a^{ij}_{\alpha\beta}(x) = a^{ji}_{\beta\alpha}(x)$, ed esistono due costanti positive b_0 e b_1 tali che

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} (\xi^\alpha_i)^2 \leqslant a^{ij}_{\alpha\beta}(x)\, \xi^\alpha_i \xi^\beta_j \leqslant b_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} (\xi^\alpha_i)^2\,, \tag{2.2$'$}$$

per ogni $x \in D$ e ogni n-upla $(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n)$ di vettori di $\boldsymbol{R}^m$), $(\partial/\partial\nu)_\alpha$ è l'operatore di frontiera

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)_\alpha = a^{ij}_{\alpha\beta} u^\beta{}_{,j} n_i\,, \tag{2.3}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore normale esterno a ∂D.

In (2.2) e (2.3), come del resto nel seguito, si intendono eseguite le somme sugli indici ripetuti.

Payne e Weinberger [2] hanno considerato il problema di Dirichlet corrispondente alla (2.1), vale a dire quando B_2 è vuoto e $B_1 = \partial D$. Mediante una generalizzazione del metodo usato in tale lavoro determineremo limitazioni di funzionali quadratici nei valori al contorno della soluzione in termini dei dati del problema.

A questo scopo decomponiamo la soluzione $\boldsymbol{u}$ in tre parti

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

dove $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ sono soluzioni dei problemi

$$(2.4)\quad (\mathrm{a})\ \begin{cases} \mathscr{B}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{g} & \text{in } D \\ \boldsymbol{w} = 0 & \text{su } B_1 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial \nu}\right)_\alpha = 0 & \text{su } B_2 \end{cases} \qquad (\mathrm{b})\ \begin{cases} \mathscr{B}(\boldsymbol{v}_1) = 0 & \text{in } D \\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\varphi} & \text{su } B_1 \\ \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha = 0 & \text{su } B_2 \end{cases} \qquad (\mathrm{c})\ \begin{cases} \mathscr{B}(\boldsymbol{v}_2) = 0 & \text{in } D \\ \boldsymbol{v}_2 = 0 & \text{su } B_1 \\ \left(\dfrac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha = \psi_\alpha & \text{su } B_2. \end{cases}$$

I risultati di Payne e Weinberger si basano sull'utilizzazione della seguente identità

$$(2.5)\qquad \oint_{\partial D} \{f^k n_k [(\frac{\partial u}{\partial t})^2 - (N^{-1})^{\alpha\beta} (\frac{\partial u}{\partial \nu})_\alpha (\frac{\partial u}{\partial \nu})_\beta] - 2 f^i T_i^\alpha (\frac{\partial u}{\partial \nu})_\alpha \frac{\partial u}{\partial t}\}\, \mathrm{d}S$$

$$= -2\int_D f^i u^\alpha{}_{,i} \mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}V + \int_D (f^k{}_{,k} a^{ij}_{\alpha\beta} - 2 f^i{}_{,k} a^{kj}_{\alpha\beta} + f^k a^{ij}_{\alpha\beta,k})\, u^\alpha{}_{,i} u^\beta{}_{,j}\, \mathrm{d}V.$$

Per illustrare il significato di tale espressione conviene partire dalla decomposizione $u^\alpha_{,i} = c^\alpha n_i + U_i^\alpha$ tale che $a^{ij}_{\alpha\beta} U^\beta_j n_i = 0$ e quindi $a^{ij}_{\alpha\beta} u^\alpha_{,i} u^\beta_{,j} = a^{ij}_{\alpha\beta} U^\alpha_i U^\beta_j + a^{ij}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta n_i n_j$. Si ricava $c^\alpha = (N^{-1})^{\alpha\beta} (\partial u/\partial \nu)_\beta$, dove $N_{\alpha\beta} = a^{ij}_{\alpha\beta} n_i n_j$, N^{-1} è la matrice inversa, e, posto

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^2 = a^{ij}_{\alpha\beta} U^\alpha_i U^\beta_j = a^{ij}_{\alpha\beta} u^\alpha{}_{,i}\, u^\beta{}_{,j} - (N^{-1})^{\alpha\beta} (\frac{\partial u}{\partial \nu})_\alpha (\frac{\partial u}{\partial \nu})_\beta\,,$$

$$U_i = \frac{\partial u}{\partial t} T_i \quad \text{dove } \frac{\partial u}{\partial t} = + [(\frac{\partial u}{\partial t})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad a^{ij}_{\alpha\beta} T^\alpha{}_i T^\beta{}_j = 1\,.$$

Si verifica che $(\partial u/\partial t)^2$ è indipendente dalle componenti dei vettori grad u^α, $\alpha = 1, \ldots, m$ lungo la direzione di n ed è una forma quadratica definita positiva nelle derivate tangenziali delle componenti u^α. $f(x)$ è un campo vettoriale le cui proprietà di regolarità sono tali da consentire l'applicazione del teorema di Green negli integrali in cui esso compare.

L'integrando del I membro della (2.5) non è quindi altro che una trascrizione dell'espressione

$$(f^k a^{ij}_{\alpha\beta} - 2f^i a^{kj}_{\alpha\beta}) u^\alpha_{,i} u^\beta_{,j} n_k$$

tale da evidenziare le componenti normale e tangenziale delle derivate. La (2.5) risulta semplicemente da applicazione del teorema della divergenza ed è quindi chiara la necessità che le condizioni imposte sulla differenziabilità di $a^{ij}_{\alpha\beta}$ e f^i siano tali da consentire l'applicazione di tale teorema.

Nel seguito sarà più volte necessario utilizzare la seguente disuguaglianza

$$|(f^k_{,k} a^{ij}_{\alpha\beta} - 2f^i_{,k} a^{kj}_{\alpha\beta} + f^k a^{ij}_{\alpha\beta,k}) u^\alpha_{,i} u^\beta_{,j}| \leqslant c a^{ij}_{\alpha\beta} u^\alpha_{,i} u^\beta_{,j} \,. \tag{2.6}$$

L'esistenza di una costante c per cui la (2.6) è verificata su tutto D è garantita dal fatto che $a^{ij}_{\alpha\beta}$ è definita positiva, purchè le componenti di $f(x)$ e le loro derivate parziali siano limitate in D. Come vedremo, tale limitazione su f pone pesanti vincoli a una completa soluzione del problema.

Ricordiamo inoltre che per il teorema di Green

$$\int_D u^\alpha \mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}V + \int_D a^{ij}_{\alpha\beta} u^\alpha_{,i} u^\beta_{,j}\, \mathrm{d}V = \oint_{\partial D} u^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_\alpha \mathrm{d}S \,. \tag{2.7}$$

Passiamo ora all'applicazione della (2.5) nei casi (2.4 (a), (b), (c)).

Le proprietà del campo vettoriale f di volta in volta richieste saranno semplicemente enunciate nel seguito di questo paragrafo, mentre nel § 3 saranno illustrati, in alcuni casi particolari, semplici esempi di campi vettoriali aventi le caratteristiche richieste.

(a) *Condizioni al contorno omogenee.*

Scegliamo f_1 in modo che $f^k_1 n_k = 0$ su B_2 e applichiamo al secondo addendo del secondo membro di (2.5) la (2.6) e la (2.7), tenendo presente che nel nostro caso il II membro di (2.7) è nullo. Si ottiene così

$$\int_{B_1} f^k_1 n_k (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)_\beta \mathrm{d}S \leqslant \int_D (2f^i_1 w^\alpha_{,i} - c w^\alpha) \mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{w})\, \mathrm{d}V \,. \tag{2.8}$$

Se invece si sceglie f_2 in modo che $f^k_2 n_k = 0$ su B_1, si ottiene

$$\int_{B_2} f^k_2 n_k \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S \leqslant -\int_D (2f^i_2 w^\alpha_{,i} + c w^\alpha) \mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{w})\, \mathrm{d}V \,. \tag{2.9}$$

Ora, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$(2.10)\quad \Big[\int_D (\pm 2f^i w^\alpha{}_{,i} - c w^\alpha)\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}V\Big]^2 \leqslant \int_D |\pm 2f^i \boldsymbol{w}_{,i} - c\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V \cdot \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}V.$$

Applicando ancora la disuguaglianza di Schwarz e la disuguaglianza triangolare si può provare che esiste una costante k_0 tale che

$$(2.11)\quad \Big[\int_D |\pm 2f^i \boldsymbol{w}_{,i} - c\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V\Big]^{\frac12} \leqslant k_0\,\Big[\int_D a^{ij}_{\alpha\beta} w^\alpha{}_{,i} w^\beta{}_{,j}\,\mathrm{d}V\Big]^{\frac12} + c\Big[\int_D |\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V\Big]^{\frac12}.$$

Ora dalla (2.7) applicando ancora la disuguaglianza di Schwarz si ottiene

$$(2.12)\qquad \Big[\int_D a^{ij}_{\alpha\beta} w^\alpha{}_{,i} w^\beta{}_{,j}\,\mathrm{d}V\Big]^2 \leqslant \int_D |\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V \cdot \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}V.$$

D'altra parte, essendo $\boldsymbol{w}$ nullo su parte del bordo di D, esiste una costante μ tale che

$$\int_D |\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V \leqslant \mu \int_D \sum_{j,\alpha} (w^\alpha{}_{,j})^2\,\mathrm{d}V \leqslant \frac{\mu}{b_0} \int_D a^{ij}_{\alpha\beta}\, w^\alpha{}_{,i}\, w^\beta{}_{,j}\,\mathrm{d}V$$

(il primo passaggio è un ben noto risultato della teoria degli autovalori (vedi ad esempio Weinberger [**3**]); l'ultimo passaggio segue dalla (2.2)').

Infine sostituendo nella (2.12) si ottiene

$$\int_D a^{ij}_{\alpha\beta}\, w^\alpha{}_{,i} w^\beta{}_{,j}\,\mathrm{d}V \leqslant \frac{\mu}{b_0} \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}V,$$

$$\int_D |\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V \leqslant \frac{\mu^2}{b_0^2} \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}V.$$

Inserendo queste ultime disuguaglianze nella (2.11) si ricava dalla (2.10) che esiste una costante k_0' tale che

$$\Big|\int_D (\pm 2f^i w^\alpha{}_{,i} - c w^\alpha)\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}V\Big| \leqslant k_0' \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}V.$$

Utilizziamo questo risultato nelle (2.8) e (2.9) imponendo ora su f l'ulteriore condizione che $f_1^k n_k$ sia limitato inferiormente da un numero positivo su B_1 e $f_2^k n_k$ verifichi la stessa condizione su B_2. Teniamo inoltre presente che la matrice N^{-1} è definita positiva; si possono quindi trovare due costanti a_1 e a_2 tali che

$$\int_{B_1} f_1^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)_\beta dS \geqslant a_1 \int_{B_1} \left|\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right|^2 dS\,,$$

$$\int_{B_2} f_2^k n_k \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS \geqslant a_2 \int_{B_2} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS\,.$$

In conclusione esistono due costanti K_1 e K_2 tali che

$$(2.13)' \qquad \int_{B_1} \left|\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right|^2 dS \leqslant K_1 \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2 dV,$$

$$(2.13)'' \qquad \int_{B_2} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS \leqslant K_2 \int_D |\mathscr{B}(\boldsymbol{w})|^2 dV\,.$$

Da $(2.13)''$ si può ottenere una stima per $\int_{B_2} |\boldsymbol{w}|^2 dS$ se si tiene presente che, essendo $\boldsymbol{w}$ nulla su B_1, vale la disuguaglianza

$$\int_{B_2} |\boldsymbol{w}|^2 dS \leqslant A \int_{B_2} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS\,.$$

(b) *Equazione omogenea con condizione al contorno omogenea su* B_2.

Introducendo la (2.6) nella (2.5) e utilizzando la (2.7) (ricordiamo che nel nostro caso $\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{v}) = 0$) si ottiene

$$(2.14) \quad \left|\oint_B \left\{f^k n_k \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_\beta\right] - 2 f^i T_i^\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_\alpha \frac{\partial v}{\partial t}\right\} dS\right| \leqslant c \oint_B v^\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_\alpha dS\,.$$

Se ora $\boldsymbol{v}_1$ è soluzione del problema (2.4) (b), dalla (2.14), scegliendo f in modo che $f^k n_k = 0$ su B_2, si ricava

$$\int_{B_1} \left\{- f^k n_k \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 - (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\beta\right] + 2 f^i T_i^\alpha \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha \frac{\partial v_1}{\partial t}\right\} dS \leqslant c \int_{B_1} v_1^\alpha \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha dS\,,$$

ovvero

$$(2.15) \quad \int_{B_1} \left\{f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\beta + \left(2 f^i T_i^\alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} - c v_1^\alpha\right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha\right\} dS \leqslant \int_{B_1} f^k n_k \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 dS.$$

Utilizziamo ora l'identità

$$(2.16)\qquad (2f^i T_i^\alpha \frac{\partial v}{\partial t} \pm c v^\alpha)\,(\frac{\partial v}{\partial \nu})_\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}\,|c_1(2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v}{\partial t} + c\boldsymbol{v}) + \frac{1}{c_1}\,(\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2 - \frac{c_1^2}{2}\,|2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v}{\partial t} \pm c\boldsymbol{v}\,|^2 - \frac{1}{2c_1^2}\,|(\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2,$$

dove c_1 è una costante positiva arbitraria.

Dalla (2.15) si ottiene

$$\int_{B_1} \{f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta}\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\alpha\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\beta + \tfrac{1}{2}\,|c_1(2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v_1}{\partial t} - c\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{c_1}\,(\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2 - \frac{1}{2c_1^2}\,|(\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2\}\,\mathrm{d}S$$

$$\leqslant \int_{B_1} \{f^k n_k\,(\frac{\partial v_1}{\partial t})^2 + \frac{c_1^2}{2}\,|2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v_1}{\partial t} - c\boldsymbol{v}_1\,|^2\}\,\mathrm{d}S\,,$$

e a maggior ragione

$$(2.17)\qquad \int_{B_1} \{f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta}\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\alpha\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\beta - \frac{1}{2c_1^2}\,|(\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2\}\,\mathrm{d}S$$

$$\leqslant \int_{B_1} \{f^k n_k\,(\frac{\partial v_1}{\partial t})^2 + \frac{c_1^2}{2}\,|2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v_1}{\partial t} - c\boldsymbol{v}_1\,|^2\}\,\mathrm{d}S\,.$$

Sia ora f tale che $f^j n_j \geqslant k > 0$ e sia c_2 tale che

$$c_2\,|(\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2 \leqslant (N^{-1})^{\alpha\beta}\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\alpha\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\beta$$

(ricordiamo che la matrice N^{-1} è definita positiva). Dalla (2.17) segue allora

$$(2.18)\qquad (kc_2 - \frac{1}{2c_1^2}) \int_{B_1} |(\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}})\,|^2\,\mathrm{d}S \leqslant \int_{B_1} \{f^k n_k\,(\frac{\partial v_1}{\partial t})^2 + \frac{c_1^2}{2}\,|2f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v_1}{\partial t} - c\boldsymbol{v}_1\,|^2\}\,\mathrm{d}S\,.$$

Il secondo membro della (2.18) è noto; evidentemente affinchè la (2.18) sia significativa occorre scegliere c_1 in modo che $kc_2 - (1/2c_1) > 0$.

Per ottenere una stima per $\boldsymbol{v}_1$ su B_2 si può prendere f in modo che $f^k n_k = 0$ su B_1; in tal modo si ottiene

$$-\int_{B_2} f^k n_k\,(\frac{\partial v_1}{\partial t})^2\,\mathrm{d}S + \int_{B_1} 2f^i T_i^\alpha\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\alpha\,\frac{\partial v_1}{\partial t}\,\mathrm{d}S \leqslant c \int_{B_1} v_1^\alpha\,(\frac{\partial v_1}{\partial \nu})_\alpha\,\mathrm{d}S,$$

ovvero

$$-\int_{B_2} f^k n_k \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S \leqslant \int_{B_1} \left(c v_1^\alpha - 2 f^i T_i^\alpha \frac{\partial v_1}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_\alpha \mathrm{d}S \tag{2.19}$$

$$\leqslant \left(\int_{B_1} \left|c\boldsymbol{v}_1 - 2 f^i \boldsymbol{T}_i \frac{\partial v_1}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12} \left(\int_{B_1} \left|\frac{\partial v_1}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12}.$$

Il I fattore all'ultimo membro della (2.19) è noto dai dati al contorno, mentre per il secondo si è ricavata la stima (2.18).

In questo caso per ottenere un risultato significativo si sceglie f in modo che su B_2 si abbia $-f^k n_k \geqslant \alpha > 0$.

Inoltre si può ottenere una stima per $\int_{B_2} |\boldsymbol{v}_1|^2 \mathrm{d}S$; a tale scopo, detto $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ un prolungamento di $\boldsymbol{\varphi}$ di classe C^1 su tutto ∂D, si tenga presente che, essendo $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{\varphi}$ nulla su B_1, vale la disuguaglianza

$$\int_{B_2} |\boldsymbol{v}_1 - \hat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 \mathrm{d}S \leqslant A \int_{B_2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}_1 - \hat{\boldsymbol{\varphi}})\right)^2 \mathrm{d}S \leqslant 2A \left[\int_{B_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S + \int_{B_2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S\right],$$

da cui, tenendo presente che

$$\int_{B_2} |\boldsymbol{v}_1 - \hat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 \mathrm{d}S \geqslant \left[\left(\int_{B_2} |\boldsymbol{v}_1|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12} - \left(\int_{B_2} |\hat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12}\right]^2,$$

si ottiene

$$\left(\int_{B_2} |\boldsymbol{v}_1|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12} \leqslant \left(\int_{B_2} |\hat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 \mathrm{d}S\right)^{\frac12} + A^{\frac12} \left[\int_{B_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S + \int_{B_2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S\right]^{\frac12}.$$

(c) *Equazione omogenea con condizione al contorno omogenea su* B_1.

Sia ora $\boldsymbol{v}_2$ soluzione del problema (2.4) (c). Allora dalla (2.14), scegliendo f in modo che $f^k n_k = 0$ su B_1, si ottiene

$$\int_{B_2} \left\{f^k n_k \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^2 - (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\beta\right] - 2 f^i T_i^\alpha \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \frac{\partial v_2}{\partial t}\right\} \mathrm{d}S \leqslant c \int_{B_2} v_2^\alpha \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \mathrm{d}S,$$

ovvero

$$\int_{B_2} \left\{f^k n_k \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(2 f^i T_i^\alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} + c v_2^\alpha\right)\right\} \mathrm{d}S \leqslant \int_{B_2} \left\{f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\beta\right\} \mathrm{d}S,$$

da cui, utilizzando l'identità (2.16), si ricava

$$(2.20)\qquad \int_{B_2}\{f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta}(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\alpha(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\beta+\tfrac{1}{2}|c_1(2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2)+\frac{1}{c_1}(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2 - \frac{1}{2c_1}|(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2\}\,dS$$

$$\geqslant \int_{B_2}\{f^k n_k(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2+\frac{c_1^2}{2}|2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2|^2\}\,dS\,.$$

Osserviamo ora che

$$\int_{B_2}|c_1(2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2)+\frac{1}{c_1}(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2\,dS$$

$$\leqslant[(\int_{B_2}c_1^2|2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2|^2\,dS)^{\frac12}+(\int_{B_2}\frac{1}{c_1^2}|(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2\,dS)^{\frac12}]^2$$

$$\leqslant 2\int_{B_2}c_1^2|2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2|^2\,dS+2\int_{B_2}\frac{1}{c_1^2}|(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2 dS\,.$$

Sostituendo nella (2.20) si ottiene

$$(2.21)\qquad \int_{B_2}[f^k n_k(N^{-1})^{\alpha\beta}(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\alpha(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\beta+\frac{1}{2c_1^2}|\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}}|^2]\,dS$$

$$\geqslant\int_{B_2}[f^k n_k(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2-\frac{c_1^2}{2}|2f^i\boldsymbol{T}_i\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial t}+c\boldsymbol{v}_2|^2]\,dS.$$

Si sceglie ora f in modo che $f^k n_k \geqslant k>0$ su B_2 e si tiene presente che esistono costanti a e A tali che

$$\int_{B_2}f^k n_k(N^{-1})^{\alpha\beta}(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\alpha(\frac{\partial v_2}{\partial \nu})_\beta\,dS\leqslant a\int_{B_2}|(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2\,dS,\qquad \int_{B_2}|\boldsymbol{v}_2|^2\,dS\leqslant A\int_{B_2}(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2\,dS\,;$$

(per quest'ultima disuguaglianza è essenziale che $\boldsymbol{v}_2=0$ su B_1).

Dalla (2.21) si ricava allora

$$(2.22)\qquad \int_{B_2}(a+\frac{1}{2c_1^2})|(\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{\nu}})|^2 dS\geqslant\int_{B_2}\{k(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2-\frac{c_1^2}{2}(\sup_{B_2}|2f^i\boldsymbol{T}_i|^2(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2+c^2|\boldsymbol{v}_2|^2)\}\,dS$$

$$\geqslant\int_{B_2}[k-\frac{c_1^2}{2}(\sup_{B_2}|2f^i\boldsymbol{T}_i|^2+Ac^2]\,(\frac{\partial v_2}{\partial t})^2\,dS.$$

Naturalmente in questo caso occorre scegliere la costante arbitraria c_1 in modo che il coefficiente di $(\partial v_2/\partial t)^2$ all'ultimo membro sia positivo. Per avere una stima per $(\partial v_2/\partial \nu)_\alpha$ su B_1 si sceglie f in modo che $f^k n_k = 0$ su B_2. Si ottiene così

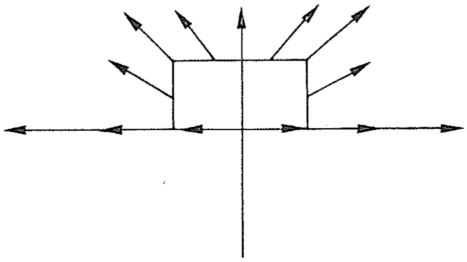
$$(2.23) \qquad \int_{B_1} f^k n_k (N^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\beta \mathrm{d}S \leqslant \int_{B_2} \left(c v_2^\alpha - 2 f^i T_i^\alpha \frac{\partial v_2}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right)_\alpha \mathrm{d}S,$$

e si procede come per la (2.19), dato che al II membro il II fattore è noto e per il I fattore si può utilizzare la stima (2.22).

3 - Costruzione del campo vettoriale f

In tutti i casi esaminati si è richiesto per il campo vettoriale f, oltre alle proprietà di regolarità che consentivano di applicare i teoremi di Green, che f fosse tangente al bordo di D su una delle due parti in cui esso era diviso e che sull'altra parte la proiezione di f sulla normale al bordo fosse di segno costante e minorata in modulo da una costante strettamente positiva.

Osserviamo innanzitutto che se su ∂D i punti di separazione fra B_1 e B_2 sono punti di non regolarità è possibile costruire f di classe C^1 che verifica le proprietà richieste. Ad esempio se D è il rettangolo $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ e B_1 è il lato $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ y = 0\}$, il campo $f(x, y) \equiv (x, y)$ è parallelo a B_1, mentre su B_2 $\min f^k n_k = 1$.



Come si vede, la discontinuità della normale a ∂D nei punti di separazione fra B_1 e B_2 consente di scegliere campi f continui.

Come ulteriore esempio, se in $\boldsymbol{R}^3$ D è il parallelepipedo $\{(x, y, z) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e B_1 è la faccia sul piano xy, il campo $f(x, y, z) = (x, y, z)$ verifica le proprietà richieste, essendo $f \cdot n = 0$ su B_1 e $f \cdot n = 1$ su B_2.

Analoga situazione si ha se D è la semisfera $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$; B_1 è la «base» sul piano xy e il campo f è lo stesso dell'esempio precedente.

Le difficoltà sorgono se i punti di separazione fra B_1 e B_2 sono punti di regolarità per ∂D; in tal caso infatti si deve avere una discontinuità per f, il che comporta che in prossimità di tali punti le derivate parziali $f^k_{,j}$ sono illimitate e non è quindi più valida la disuguaglianza (2.6).

Bibliografia

[1] J. H. Bramble and L. E. Payne: $[\bullet]_1$ *Bounds in the Neumann problem for second order uniformly elliptic operators*, Pacific J. Math. **12** (1962), 823; $[\bullet]_2$ *Some inequalities for vector functions with applications in elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **11** (1962), 16-26.

[2] L. E. Payne and H. F. Weinberger, *New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations*, Pacific J. Math. **8** (1958), 551-573.

[3] H. F. Weinberger, *Variational methods for eigenvalue problems*, (lecture notes by G. P. Schwartz), University of Minnesora 1962.

Summary

This paper is an extension to mixed boundary value problems for second order elliptic systems of the method used by Payne & Weinberger to find a priori *estimates for solutions of the Dirichlet problem. The extension is only possible when the boundary is singular at the points of transition between natural and geometrical boundary data.*

* * *