Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 177-187

PAOLA VERICO (*)

Geometrie parziali regolari (**)

1 - Introduzione

Una geometria parziale finita, [1], *è una struttura di incidenza*, [3], $S=(P, B, I)$ *con una relazione di incidenza simmetrica che soddisfa i seguenti assiomi*:

(i) *ogni punto è incidente con* $t+1$ *rette* ($t \geqslant 1$) *e due punti distinti sono incidenti con al più una retta,*

(ii) *ogni retta è incidente con* $s+1$ *punti* ($s \geqslant 1$) *e due distinte rette sono incidenti con al più un punto,*

(iii) *se* x *è un punto e* L *è una retta non incidente* x, *ci sono esattamente* α *punti* ($\alpha \geqslant 1$) $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$, *e* α *rette* $L_1, L_2, \ldots, L_\alpha$ *tali che* xIL_iIx_iIL, $i=1, 2, \ldots, \alpha$.

Le geometrie parziali furono introdotte per la prima volta nel 1963 da R. C. Bose, [1], è a lui che dobbiamo tra gli altri i seguenti risultati:

se $|P|=v$ e $|B|=b$ allora risulta $v=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$ e $b=(t+1)\cdot(st+\alpha)/\alpha$; chiaramente da queste relazioni e dagli assiomi segue subito che $\alpha|(s+1)st$, $\alpha|(t+1)st$, $\alpha \leqslant (s+1)$ e $\alpha \leqslant (t+1)$;

se $\alpha=1$ la geometria parziale è un quadragono di Tits; $[4]_1$;

se $\alpha=s+1$ la geometria parziale è un $2-(v, s+1, 1)$ disegno, [3];

se $\alpha=t$ allora la geometria parziale risulta un net di ordine $s+1$ e deficienza $s-t+1$, [2].

Questa struttura è stata in seguito studiata a fondo da J. A. Thas e da F. De Clerck che hanno dato una caratterizzazione di tutte le geometrie par-

---

(*) Indirizzo: Via Pio Emanuelli 31, Palazzina 56, 00143 Roma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-XI-1978.

ziali immerse in uno spazio proiettivo, [**6**]$_1$, J. A. Thas ha inoltre caratterizzato tutte quelle immerse in uno spazio affine, [**5**].

Se due punti x e y di S sono collineari tra loro allora scriveremo $x \sim y$, altrimenti scriveremo $x \nsim y$; analogamente se due rette, L e M, si incidono in un punto scriveremo $L \sim M$, in caso contrario $L \nsim M$.

Introduciamo ora un ulteriore assioma, l'*assioma di Pasch* (P): siano L_1 e L_2 due rette tali che $L_1 I x I L_2$, con $L_1 \neq L_2$ e $x \in P$, siano inoltre M_1 e M_2 due rette tali che $M_1 I x I M_2$, con $L_i \sim M_j$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$, allora si ha $M_1 \sim M_2$, [**6**]$_2$.

D'ora in avanti useremo l'abituale linguaggio geometrico; perciò se un punto e una retta si incidono diremo che il punto appartiene alla retta o che la retta passa per il punto; se due punti incidono una retta diremo che la retta congiunge i due punti.

Introduciamo ora il concetto di *spazio di chiusura*, [**4**]$_2$ (n. **3**). Dato un insieme S diciamo che la coppia $(S, \mathscr{C})$ è uno spazio di chiusura se $\mathscr{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di parti di S che chiamiamo chiusi, tale che $S \in \mathscr{C}$ e $\bigcap\limits_{k \in K} C_k \in \mathscr{C}$, per ogni sottoinsieme K di J.

Dato uno spazio di chiusura resta definito un *operatore di chiusura*, [**4**]$_2$ (n. **3**), cioè quell'applicazione di $P(S)$ in $\mathscr{C}$ che associa ad ogni sottoinsieme X di S l'insieme $\overline{X} = \bigcap C_j$ dove $\{C_j\}_{j \in J}$ è la famiglia dei chiusi contenenti X.

Diremo che uno *spazio di chiusura è combinatorio*, [**4**]$_2$ (n. **4**), se soddisfa i seguenti assiomi:

(j) $\phi \in \mathscr{C}$ e per ogni $x \in S$ segue $\{x\} \in \mathscr{C}$,

(jj) per ogni insieme $X \subseteq S$ e per ogni coppia di punti x e y tali che $x \notin \overline{X}$ e $x \in \overline{y \cup X}$ segue che $y \in \overline{x \cup X}$.

Dato uno spazio di rette, cioè una coppia $(S, \mathscr{R})$ dove $\mathscr{R}$ è una famiglia di parti di S che chiamiamo rette tali che per ogni coppia di punti x e y di S esista una retta $r \in \mathscr{R}$ che congiunga x e y, ad esso si può sempre associare uno spazio di chiusura $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$, dove $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S così costituita: $C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ se e solo se il fatto che x e y appartengano a C implica che la retta per x e y appartenga a C, [**4**]$_2$ (n. **5**).

Ad ogni spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$ si può associare lo spazio di rette $(S, \mathscr{R})$, dove $\mathscr{R}$ è la famiglia di rette dello spazio combinatorio, e ad esso si può associare un $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ (non necessariamente combinatorio), che gode della evidente proprietà che la famiglia $\mathscr{C}$ dei chiusi dello spazio combinatorio è contenuta in $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$; inoltre, se $\mathscr{C}$ coincide con $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ allora $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ sarà combinatorio e lo spazio combinatorio di partenza lo diremo completo.

Il Prof. G. Tallini, nel corso del seminario di geometria combinatoria, da Lui diretto presso l'Università di Roma, ha posto tra gli altri il seguente problema: caratterizzare una certa classe di geometrie parziali, che J. A. Thas chiama regolari, da un punto di vista combinatorio.

In questo lavoro al fine di analizzare tale problema immergeremo una geometria parziale regolare in uno spazio di rette $(P, \mathscr{R})$, al quale resta associato lo spazio di chiusura $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$, (nn. **2**, **3**), daremo alcune condizioni necessarie e sufficienti per la regolarità di una geometria parziale che soddisfa (P), (n. **3**, I, III), infine vedremo come in $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ sia sempre contenuto uno spazio combinatorio di dimensione tre se $t > (s+1)(\alpha - 1)$ (n. **4**, I), mentre se $t = (s+1)(\alpha-1)$ daremo delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè lo stesso $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ sia uno spazio combinatorio (n. **4**, II).

Conclude il lavoro una tabella di tutti i valori che possono assumere t ed α per una geometria parziale che soddisfa (P), per ogni $s \leqslant 10$, dedotti con l'uso del calcolatore dalle relazioni aritmetiche che intercorrono tra i parametri stessi.

2 - Geometrie parziali regolari

D'ora in avanti ci occuperemo soltanto di geometrie parziali che soddisfano (P) con $\alpha \neq 1$.

Sia $S = (P, B, I)$ una geometria parziale siffatta con parametri s, t, α. Proviamo che

I – *Sia C un sottoinsieme di P tale che almeno una retta di S appartenga a C e per ogni coppia di punti a e b in C con a collineare con b la retta per essi appartenga a C; allora C è una geometria parziale contenuta in S rispetto alla famiglia di rette di S che hanno almeno due punti in comune con C e alla relazione di incidenza indotta da I.*

Dimostrazione. Basta evidentemente dimostrare che per ogni $x \in C$ il numero di rette che passano per esso e appartengono a C è indipendente dalla scelta del punto ed è maggiore o eguale a uno.

Consideriamo due punti a e b in C e siano $t^*(a)+1$ e $t^*(b)+1$ le rette che passano rispettivamente per a e per b e che appartengono a C. Sia $a \sim b$ e sia K la retta passante per essi, indichiamo con $\{L_i\}$ la famiglia di rette di C passanti per a e distinte da K e con $\{M_j\}$ la famiglia di rette di C passanti per b e distinte da K; allora se $\{(L_i, M_j)\}$ è l'insieme delle coppie di rette tali che $L_i \sim M_j$ otteniamo, calcolando la cardinalità di detto insieme in due modi diversi, prima fissando l'attenzione su a e poi su b, la seguente relazione: $t^*(a)(\alpha-1) = t^*(b)(\alpha-1)$ e cioè $t^*(a) = t^*(b)$. Se $a \nsim b$ allora con dimostrazione analoga relativamente alla famiglia $\{L'_i\}$ di tutte le rette per a e alla famiglia $\{M'_j\}$ di tutte le rette per b si giunge allo stesso risultato.

Indichiamo con t^*+1 il numero delle rette passanti per un punto di C

e che appartengono all'insieme, detto numero, come si è provato, è indipendente dalla scelta del punto. Evidentemente è $t^* + 1 \geqslant \alpha > 1$ ne segue che $t^* \geqslant 1$, onde l'asserto.

Consideriamo ora due rette distinte L e M di S, che si intersecano in un punto x; sia $\mathscr{B}_1$ la famiglia delle rette che intersecano L e M e non passano per x, si ha subito che $|\mathscr{B}_1| = s(\alpha - 1)$; sia poi $\mathscr{B}_2$ la famiglia delle rette che passano per x e intersecano qualche retta appartenente a $\mathscr{B}_1$ (e quindi ogni retta di $\mathscr{B}_1$, per la (P)), si ha subito che $|\mathscr{B}_2| = \alpha$. L'insieme dei punti $P^* \in \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ gode banalmente della proprietà che se due punti a e b di P^* sono collineari allora la retta per essi appartiene a P^*. Da tutto ciò e dalla proposizione 2.I. segue che P^* rispetto alla famiglia di rette che hanno almeno due punti in comune con esso, cioè $B^* = \{\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2\}$, e rispetto alla relazione indotta da I è una geometria parziale contenuta in S, che indichiamo con $S^* = (P^*, B^*, I^*)$ e chiamiamo *piano*. I suoi parametri sono: $s^* = s$, $t^* = \alpha - 1$, $\alpha^* = \alpha$.

Siano ora x e y due punti di $S = (P, B, I)$ con $x \nsim y$, allora definiamo *retta di seconda specie*, $[\mathbf{6}]_2$, l'intersezione di tutti i $(t+1)/\alpha$ piani passanti per x e y. Si verifica facilmente che ogni retta di seconda specie è composta di punti a due a due non collineari tra loro e che due qualsiasi punti di essa generano la retta stessa. Segue immediatamente inoltre che la cardinalità di ogni retta di seconda specie risulta minore o eguale a $s + 1 - s/\alpha$. Chiameremo *regolari*, $[\mathbf{6}]_2$, quelle geometrie parziali che soddisfano (P), con $\alpha \neq 1$ e per le quali ogni retta di seconda specie possiede esattamente $s + 1 - s/\alpha$ punti.

D'ora in avanti ci occuperemo essenzialmente di geometrie parziali regolari e daremo delle condizioni necessarie e sufficienti per la regolarità di una geometria parziale.

3 - Spazio di chiusura di una geometria parziale regolare

Sia $S = (P, B, I)$ una geometria parziale che soddisfa (P), con $\alpha \neq 1$, regolare. Chiameremo retta di prima specie ogni elemento di B e porremo $\mathscr{R}_1 = B$. Denoteremo poi con $\mathscr{R}_2$ la famiglia delle rette di seconda specie, porremo infine $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$. Evidentemente per ogni x e y in P con $x \neq y$ esiste ed è unico l'elemento di $\mathscr{R}$ passante per essi, cioè $(P, \mathscr{R})$ è uno spazio di rette. Sia ora $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ lo spazio di chiusura associato a $(P, \mathscr{R})$, si vede subito che se $C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ contiene un elemento di $\mathscr{R}$ allora, per la **2**.I, esso è una geometria parziale contenuta in S e viceversa, se $C \subseteq P$ è una geometria parziale, allora C appartiene a $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$. Proviamo innanzitutto che

I – *Una geometria parziale* $S = (P, B, I)$ *che soddisfa* (P) *con* $\alpha \neq 1$ *è regolare se, e solamente se, per ogni retta di seconda specie dello spazio esiste un piano che la contiene nel quale essa interseca ogni retta di prima specie.*

Dimostrazione. In una geometria parziale regolare ogni retta di seconda specie xy ha cardinalità $s + 1 - s/\alpha$, allora in ogni piano passante per essa, poichè $t = \alpha - 1$, si ha che il numero di rette di prima specie che intersecano xy e appartengono al piano risulta: $(s + 1 - s/\alpha)\alpha = s(\alpha - 1) + \alpha$ e cioè sono tutte le rette del piano.

Sia ora $S^* = (P^*, B^*, I^*)$ il piano nel quale la generica retta di seconda specie xy interseca tutte le rette di prima specie del piano. Poichè per ogni punto di xy passano α rette distinte di S^*, allora la cardinalità di xy risulta eguale a $(s(\alpha - 1) + \alpha)/\alpha = s + 1 - s/\alpha$, onde S è regolare.

Si osservi che, per quanto ora detto, se in una geometria parziale $S=(P, B, I)$ che soddisfa (P), con $\alpha \neq 1$, ogni retta di seconda specie possiede un piano nel quale interseca tutte le rette di prima specie del piano stesso, allora questo avviene in ogni piano di S che contiene la retta.

Ci proponiamo ora di determinare nello spazio di chiusura $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ di una geometria parziale regolare $S = (P, B, I)$, per ogni $r \in \mathscr{R}$ e $x \in P - r$ la chiusura di $X = x \cup r$ cioè il più piccolo chiuso di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ contenente X.

Prima di affrontare il problema diamo la definizione di *reticolato* di un insieme nello spazio di rette $(P, \mathscr{R})$, [4]₂ (n. **5**). Dato un insieme X in P chiamiamo *reticolato primo* di X e lo indichiamo con X^1, il seguente insieme: $X^1 = \bigcup_{x,y \in X} r(x, y)$, dove con $r(x, y)$ intendiamo indicare la retta di prima o di seconda specie passante per x e y; chiaramente si ha $X \subseteq X^1 \subseteq \overline{X}$, dove con $\overline{X}$ indichiamo la chiusura dell'insieme X in $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$. Chiamiamo ora *reticolato secondo* di X il reticolato primo del reticolato primo di X stesso, e lo indichiamo con X^2; chiaramente $X^1 \subseteq X^2 \subseteq \overline{X}$; possiamo allora costruire con questo procedimento una successione di reticolati $X = X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq \overline{X}$; ora poichè P è finito esisterà certamente un intero h tale che $X^h = X^{h+1}$ ma allora X^h appartiene a $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, ed essendo $X^h \subseteq \overline{X}$ segue $X^h = \overline{X}$.

Affronteremo ora il problema sopra enunciato. A tal fine sia $X = r \cup x$ con r elemento di $\mathscr{R}$ e x appartenente a $P - r$. Si ha allora

II – *L'insieme* $\overline{X}$ *risulta un piano se, e solamente se, il reticolato primo di* X *contiene almeno una coppia di punti collineari tra loro. In tal caso* $\overline{X} = X^1$ *se* r *è di prima specie e* $\overline{X} = X^2$ *se* r *è di seconda specie.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto prima nel caso di una retta di prima specie e poi in quello di una retta di seconda specie.

Sia dunque $X = r \cup x$ con $r \in \mathscr{R}_1$ e $x \in P - r$, chiaramente X^1 conterrà sempre una coppia di punti collineari tra loro e inoltre $X^1 \subseteq \bar{X} \subseteq S(r, x)$, dove con $S(r, x)$ indichiamo il piano passante per r e per x. La cardinalità di X^1 risulta

$$|X^1| = \alpha s + (s - s/\alpha)(s + 1 - \alpha) + 1 = (s + 1)(s(\alpha - 1) + \alpha)/\alpha = |S(r, x)|,$$

onde $\bar{X} = X^1 = S(r, x)$ e cioè la chiusura di X è sempre un piano.

Sia ora $X = r \cup x$ con $r \in \mathscr{R}_2$ e $x \in P - r$; se la chiusura di X è un piano chiaramente X^1 conterrà almeno una coppia di punti collineari tra loro. Viceversa supponiamo che X^1 possieda almeno una coppia di punti collineari tra loro e sia L la retta per essi, sia inoltre $S(L, z)$ il piano generato da L e da un punto $z = x$ se L non passa per x altrimenti $z \in r - (r \cap L)$ se L passa per x; chiaramente risulta $X^1 \subseteq \bar{X} \subseteq S(L, z)$, ma $\bar{X} \supseteq S(L, z)$ in quanto $S(L, z)$ è il più piccolo chiuso contenente L e z e pertanto si ottiene $\bar{X} = S(L, z)$. Tenendo poi conto del fatto che ogni retta di prima specie interseca ogni retta di seconda specie in un piano, per la **3**.I, da $|X^1| = |S(L, z)|$ segue un assurdo, e pertanto X^1 risulta propriamente contenuto in $S(L, z)$. Inoltre, essendo il reticolato primo dell'insieme formato da una retta di prima specie e da un punto un piano, segue $\bar{X} = X^2$, onde l'asserto.

Possiamo a questo punto dare una seconda condizione necessaria e sufficiente per la regolarità di una geometria parziale.

III - *Una geometria parziale $S = (P, B, I)$ che soddisfa (P), con $\alpha \neq 1$, è regolare se, e solo se, il reticolato primo dell'insieme costituito da ogni retta di prima specie e da un punto non appartenente ad essa risulta un chiuso.*

D i m o s t r a z i o n e. Se lo spazio è regolare l'affermazione è un'ovvia conseguenza del teorema precedente. Supponiamo viceversa che lo spazio non sia regolare e proviamo che X^1 non è un chiuso, ne seguirà l'asserto. In questa ipotesi, esiste certamente una retta di seconda specie xy tale che $|xy| < s + 1 - s/\alpha$. Allora, se in un piano contenente xy considero l'insieme $X = r^* \cup z$, dove r^* è una retta di prima specie del piano che interseca xy e z è un punto di xy non appartenente a r^*, esso ha un reticolato primo X^1 tale che $|X^1| < |S(r^*, z)|$ e cioè X^1 risulta propriamente contenuto in $S(r^*, z)$ e pertanto X^1 non è un chiuso, onde l'asserto.

In forza della proposizione **3**.II, relativamente alla chiusura dell'insieme $X = r \cup x$, rimane da analizzare il caso in cui il reticolato primo di $X = r \cup x$, con $x \notin r$, non possiede alcuna coppia di punti collineari tra loro e pertanto, per la propositione 3.II, non è contenuto in alcun piano. Al fine di risolvere il problema anche in questo caso, determiniamo prima il più piccolo elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ contenente un piano di S e un punto dello spazio non appartenente al piano.

Sia $S = (P, B, I)$ una geometria parziale regolare, sia $S^* = (P^*, B^*, I^*)$ un piano di S e sia x un punto non appartenente a S^*. J. A. Thas ha dimostrato che in una geometria parziale regolare esiste sempre un insieme contenente due rette di prima specie che non si intersecano (e perciò non appartenenti entrambe ad uno stesso piano) che gode della proprietà che se due punti collineari tra loro appartengono ad esso allora la retta per i due punti appartiene all'insieme; il più piccolo tra questi insiemi risulta formato dai punti appartenenti agli $s+1$ piani passanti per una delle rette e un punto x dell'altra al variare di x sulla retta stessa, [**6**]$_2$.

Sia allora L una retta di prima specie appartenente al piano S^* e M una retta di prima specie passante per un punto x di S non appartenente a S^* e un punto y appartenente a $\{S^* - L\}$; per quanto sopra detto l'insieme generato da L e da M, che indichiamo con P^σ, risulta essere, per la **2**.I, una geometria parziale rispetto alla famiglia di rette B^σ, che hanno almeno due punti in comune con P^σ, e alla relazione di incidenza I^σ indotta da I. Indichiamo questa geometria parziale con $S^\sigma = (P^\sigma, B^\sigma, I^\sigma)$, essa avrà parametri: $s^\sigma = s$, $t^\sigma = (s+1)(\alpha - 1)$, $\alpha^\sigma = \alpha$. S^σ risulta essere il più piccolo chiuso contenente $S^* \cup x$, altrimenti dovrebbe esistere una geometria parziale contenente propriamente il piano S^* e contenuta propriamente in S, ma questo non è possibile in quanto si dimostra facilmente che in una geometria parziale se $t > \alpha - 1$ allora risulta $t \geqslant (s+1)(\alpha - 1)$ e pertanto sarà $S^\sigma = \overline{S^* \cup x}$.

Siamo giunti inoltre a verificare che una geometria parziale regolare diversa da un piano possiede sempre una sottogeometria parziale con $t = \alpha - 1$ e una con $t = (s+1)(\alpha - 1)$.

Torniamo ora al problema lasciato in sospeso, sia cioè $X = r \cup x$, con $x \notin r$, tale che X^1 non possieda alcuna coppia di punti collineari tra loro (pertanto r è una retta di seconda specie). Nella ricerca della chiusura di X distinguiamo tre casi: $\alpha = s = 2$, $t > (s+1)(\alpha - 1)$, $t = (s+1)(\alpha - 1)$.

I *caso*. Se $\alpha = s = 2$, ogni geometria parziale $S = (P, B, I)$ con tali parametri e che soddisfa (P) risulta isomorfa ad H_2^n, [**6**]$_2$, dove con H_2^n indichiamo una geometria parziale i cui punti sono i punti appartenenti ad uno spazio proiettivo n-dimensionale di ordine 2, $PG(n, 2)$, meno i punti appartenenti a un suo sottospazio, $PG(n-2, 2)$, di dimensione $n-2$, e le cui rette sono le rette di $PG(n, 2)$ che non hanno alcun punto in comune con il sottospazio $PG(n-2, 2)$, mentre la relazione di incidenza è quella indotta dallo spazio proiettivo. Chiaramente la struttura così definita risulta una geometria parziale che soddisfa (P) regolare, con parametri $s = \alpha = 2$ e $t = 2^{n-1} - 1$.

In questo caso si ha $\overline{X} = X^1$, che risulta, se $n > 3$, propriamente contenuto nell'intersezione di tutte le sottogeometrie S_i^σ di S (con $i = 1, \dots, 2^{n-3}$), con parametro $t = (s + 1)(\alpha - 1) = 3$, che contengono X^1, ed inoltre risulta facilmente che esiste un punto z in S tale che $\bigcap_i S_i^\sigma = X^1 \cup z$, per i che va da 1 a 2^{n-3}.

II *caso*. Sia $t > (s + 1)(\alpha - 1)$ escludendo il caso, visto precedentemente, in cui $\alpha = s = 2$; allora si ha

IV - *L'insieme* $\bar{X}$ *risulta eguale all'*$\bigcap_i S_i^\sigma$, *per* $i = 1, 2, \dots, (t + 1)/(\alpha s + \alpha - s)$, *dove con* S_i^σ *indichiamo le sottogeometrie parziali di* S *con* $t = (s + 1) \cdot (\alpha - 1)$ *che contengono* X.

Dimostrazione. Chiaramente si ha $X^1 \subseteq \bigcap_i S_i^\sigma$, ed essendo gli S_i^σ chiusi si ha anche $\bar{X} \subseteq S_i^\sigma$. Non potendo allora essere che $\bar{X}$ sia contenuto propriamente nell'$\bigcap_i S_i^\sigma$, altrimenti ciascun S_i^σ dovrebbe contenere un numero di rette maggiore di $(\alpha s + \alpha - s)(s(\alpha - 1) + \alpha)/\alpha$ e ciò è impossibile, si ha $\bar{X} = \bigcap_i S_i^\sigma$, onde l'asserto.

Si osservi inoltre che $\bar{X}$ è costituito di punti a due a due non collineari tra loro ed è massimale rispetto a questa proprietà in ciascun S_i^σ, in quanto si vede subito che non può esistere in nessun S_i^σ un punto non collineare con ogni punto di $\bar{X}$ e non appartenente a $\bar{X}$.

III *caso*. Se $t = (s + 1)(\alpha - 1)$, escludendo sempre il caso, visto precedentemente, in cui $\alpha = s = 2$, allora si verifica facilmente che o $\bar{X}$ coincide con tutto lo spazio o $\bar{X}$ è un sottoinsieme di punti a due a due non collineari tra loro di S e massimale in S stesso rispetto a questa proprietà.

D'ora in avanti in una geometria parziale $S = (P, B, I)$ regolare, chiameremo *piano di prima specie* l'usuale piano, cioè la geometria parziale con $t = \alpha - 1$. Chiameremo invece nel secondo caso ora analizzato, (il primo non ci interessa in quanto è stato completamente caratterizzato, [**6**]$_2$), *piano di seconda specie* generato da una retta r di seconda specie e da un punto x non collineare con alcun punto di r l'insieme $\bar{X} = \overline{x \cup r} = \bigcap S_i^\sigma$ (IV.3). Si vede facilmente che $\bar{X} = \bigcap S_i^\sigma$ gode della proprietà che per ogni retta r' in $\bar{X}$ e per ogni punto x di $\bar{X}$ con $x \notin r'$, allora $\bar{X} = \overline{r' \cup x}$. Nel terzo caso ora analizzato definiremo il piano di seconda specie solo nelle geometrie parziali regolari nelle quali l'insieme $X = r \cup x$, dove r è una retta generica dello spazio e x è un punto non appartenente a r e non collineare con alcun punto della retta, gode della proprietà che $\bar{X}$ è propriamente contenuto nella geometria parziale ed è pertanto costituito da punti a due a due non collineari tra loro, in tal caso definiamo piano di seconda specie, generato da r e da x, la chiusura di X.

4 - Sottospazi combinatori di una geometria parziale regolare

Sia $S = (P, B, I)$ una geometria parziale che soddisfa (P), regolare con $\alpha \notin \{t+1, 1\}$, e sia $(P, \mathscr{R})$ lo spazio di rette associato a S, dove P è l'insieme di punti di S e $\mathscr{R}$ è l'insieme delle rette di prima e di seconda specie dello spazio; allora a $(P, \mathscr{R})$ possiamo associare in modo canonico uno spazio di chiusura $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ non necessariamente combinatorio.

Consideriamo ora separatamente i casi II e III analizzati nel numero precedente, (il I caso è già stato completamente caratterizzato da J. A. Thas, [**6**]$_2$). Proviamo che

I – *Se $S = (P, B, I)$ è una geometria parziale regolare con $\alpha \neq 1$ e $t > (s+1)\cdot(\alpha - 1)$, allora lo spazio di chiusura $(P, \mathscr{C})$, dove P è l'insieme dei punti di S e $\mathscr{C}$ è la sottofamiglia di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ così costituita: $\mathscr{C} = \{\phi$, punti, rette di prima e di seconda specie, piani di prima e di seconda specie, $S\}$, è uno sottospazio combinatorio di dimensione tre dello spazio di chiusura $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$.*

Dimostrazione. L'asserto è immediatamente verificato, tenendo conto del fatto che due punti qualsiasi di una retta di prima o di seconda specie individuano la retta stessa e inoltre una retta $r \in \mathscr{R}$ e un punto $x \notin r$ di un piano di prima o di seconda specie individuano il piano stesso, per quanto visto precedentemente. Da ciò segue infatti che per ogni $C \in \mathscr{C}$ e per ogni $x \in P - C$, la chiusura di $x \cup C$ copre C onde $(P, \mathscr{C})$ è combinatorio e la sua dimensione è evidentemente tre.

Analogamente alla proposizione I si prova che

II – *Se $S = (P, B, I)$ è una geometria parziale regolare con $\alpha \neq 1$ e $t = (s+1)(\alpha - 1)$ nella quale per ogni $X = r \cup x$ (con r retta di seconda specie e $x \in P - r$) si ha $\bar{X} \neq S$, allora lo spazio di chiusura $(P, \mathscr{C})$, dove $\mathscr{C} = \{\phi$, punti, rette di prima e di seconda specie, piani di prima e di seconda specie, $S\}$, è uno spazio combinatorio completo di dimensione tre, (essendo $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$).*

Si osserva infine che nel caso in cui in $S = (P, B, I)$ regolare con $\alpha \neq 1$ e $t = (s+1)(\alpha - 1)$ esista una retta r e un punto $x \in P - r$ tali che la chiusura dell'insieme $X = r \cup x$ sia tutto lo spazio S, allora non esiste in $(P, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ un sottospazio combinatorio di dimensione tre.

5 - Tabella dei parametri (s, t, α) di una geometria parziale che soddisfa (P) per $s \leqslant 10$.

Daremo ora una tabella di tutti i valori possibili per α e per t per una geometria parziale che soddisfa (P) con $s \leqslant 10$, dedotti col calcolatore dalle relazioni aritmetiche che intercorrono tra i parametri stessi.

Premettiamo che ogni geometria parziale che soddisfa (P) con $\alpha = s + 1$ è uno spazio proiettivo, [4]$_2$, con $\alpha = s$ è un particolare nel duale caratterizzato completamente da J. A. Thas, [4]$_2$, e che inoltre con $\alpha = 1$ la geometria parziale è un quadragono generalizzato; tralasceremo pertanto tali casi.

La tabella seguente indica, per $s \leqslant 10$, tutti i valori di α e di t aritmeticamente compatibili per una geometria parziale che soddisfa (P) con $1 < \alpha < s$.

s	α	t
3	2	1
4	2	1, 7, 9, 17, 27, 57
5	2	1, 11, 41
	3	2
6	2	1, 7, 9, 15, 23, 25, 37, 55, 65, 79, 135, 205, 415
	3	2, 20, 38, 80, 164
7	2	1, 9, 15, 29, 99
	4	3
8	2	1, 11, 17, 21, 29, 35, 47, 49, 65, 77, 101, 119, 161, 209 245, 371, 497, 749, 1505
	3	2, 74
	4	3
9	2	1, 13, 27, 37, 55, 97, 307
	3	2, 38, 56, 98, 308
	5	4
	6	5
10	2	1, 11, 13, 15, 21, 27, 31, 35, 51, 57, 63, 79, 81, 101, 111, 123, 171, 189, 211, 255, 321, 351, 387, 431, 651, 783, 981, 1311, 1971
	5	4, 104, 324

Da questa tabella possiamo dedurre che le geometrie parziali regolari di ordine $s \leqslant 10$ con $1 < \alpha < s$ possono avere o ordine $s = 6$ con $\alpha = 2$ o $s = 10$ sempre con $\alpha = 2$. Infatti solo per questi valori di s e di α si verificano le due condizioni necessarie affinchè la geometria parziale sia regolare e cioè: α divide s ed esiste, compatibile con s e con α, il valore $t = (s + 1)(\alpha - 1)$.

Bibliografia

[1] R. B. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389-419.

[2] R. H. Bruck, *Finite nets - II: Uniqueness and embedding*, Pacific J. Math. **13** (1963), 421-457.

[3] D. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin 1968.

[4] G. Tallini: [•]$_1$ *Strutture di incidenza dotate di polarità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **41** (1971), 75-113; [•]$_2$ *Spazio di rette e geometrie combinatorie*, Seminario di Geometrie Combinatorie, Ist. Mat. Fac. Scienze, Univ. Roma n. 3, Maggio 1977; [•]$_3$ *Spazi combinatori e sistemi di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 221-248.

[5] J. A. Thas, *Partial geometries in finite affine spaces*, Preprint, University of Ghent, Febbraio 1977.

[6] J. A. Thas e F. De Clerck: [•]$_1$ *Partial geometries in finite projective spaces*, Arch. Math. (in corso di stampa); [•]$_2$ *Partial geometries satisfying the axiom of Pasch*, Preprint, University of Ghent.

Summary

Some necessary and sufficient conditions for the regularity of a finite partial geometry satisfying the axiom of Pasch, and, moreover, for the immersion of this partial geometry in a three-dimension combinatorial space are proved.

* * *