Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 151-160

MARIO GIONFRIDDO (*)

Su un problema relativo alle colorazioni L_2 d'un grafo planare e colorazioni L_s (**)

1 – In questo lavoro si riprende lo studio, già iniziato in [**5**]$_2$, di alcuni problemi relativi alle *colorazioni* L_s ed al *numero s-cromatico* γ_s d'un grafo $G=(V,S)$ finito e non orientato. Posto $d_s=\max_{X\in\mathscr{F}_s}|X|$, $\mathscr{F}_s=\{X\subseteq V\colon \operatorname{diam}X\leqslant s\}$, in [**5**]$_2$ si danno alcune condizioni sufficienti affinchè in un grafo si abbia $\Delta_s=\gamma_s-d_s=0$ (1) e si affronta il problema della determinazione del numero s-cromatico d'un grafo planare. Si dimostrano, più precisamente, i seguenti teoremi.

Teor. 1.1. *Sia $G=(V,S)$ un grafo tale che $d_s\geqslant\frac{1}{2}|V|$. Se esiste in G un $A\subseteq V$ tale che $|A|=d_s$, $A\in\mathscr{F}_s$, $V-A\in\mathscr{F}_s$, si ha $\Delta_s=0$.*

Teor. 1.2. *Se in un grafo $G=(V,S)$ esiste una partizione $\boldsymbol{P}=\{X_0,X_1,\dots,X_r\}$ di V tale che $|X_0|=d_s$,* $\operatorname{diam}G_i\leqslant s$, $\forall i=0,1,\dots,r$ (G_i è il sottografo di G generato da X_i), $d(X_i,X_j)\geqslant s+1$, $\forall i,j=1,\dots r$, $i\neq j$ $\big(d(X_i,X_j)=\min d(x,y)$, $x\in X_i$, $y\in X_j\big)$, *si ha $\Delta_s=0$.*

Teor. 1.3. *Se $s=2$, esistono grafi planari per i quali si ha $\Delta_2=0$, $\Delta_2=1$, $\Delta_2=2$. Se $s\geqslant3$, allora $\forall h\in\boldsymbol{N}$, $\exists G$ planare tale che*

$$\gamma_s=d_s+\left[\frac{[(s-1)/2]^*\cdot(h+1)}{2}\right]^*.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, via Cesare Battisti, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 24-X-1978.

(1) In ogni grafo finito si ha $0\leqslant\Delta_s\leqslant|V|-d_s$.

Per quanto riguarda i grafi planari, osserviamo che i risultati segnalati per $s = 2$, nel Teor. 1.3, sono solo parziali. Inoltre i risultati ottenuti per $s \geqslant 3$ sono sostanzialmente diversi da quelli noti nella teoria dei grafi per $s = 1$ (teorema dei 5 colori e 4CC). Riprendendo tali considerazioni, in questo lavoro si danno dapprima alcune condizioni sufficienti per la determinazione di Δ_s ($\Delta_s = 0$, $\Delta_s \leqslant 1$, $\Delta_s > 0$) e si determina poi, passando alle colorazioni L_2, il minimo valore di n per cui esiste un grafo con n vertici, planare, tale che $\Delta_2 = 1$ oppure $\Delta_2 = 2$. Osserviamo, infine, che i concetti di *colorazione* L_s e di *numero s-cromatico* d'un grafo G (non orientato) sono stati introdotti in $[7]_2$ da F. Speranza e che problemi ad essi relativi sono stati affrontati, oltre che in $[7]_2$ ed in $[5]_2$, anche in [1] ed in $[5]_3$. Nel seguito considereremo sempre grafi finiti, non orientati. Fissato $x \in V$, sarà inoltre $\Gamma_s(x) = \{v \in V: d(x, v) \leqslant s\}$, $U_s(x) = \Gamma_s(x) - \{x\}$, $T_s(x) = V - \Gamma_s(x) = \{v \in V: d(x, v) \geqslant s + 1\}$. $|U_1(x)|$ si dirà *grado* di x e s'indicherà con $g(x)$.

2 - Sia $G = (V, S)$ un *grafo* qualsiasi. Per *colorazione* L_s *di* G s'intende un'applicazione $K: V \to C$ (insieme qualsiasi i cui elementi si dicono *colori*), tale che $K(x) = K(y) \Rightarrow d(x, y) \geqslant s + 1$ per ogni coppia di vertici distinti x, y. Se K è tale che $K(x) \neq K(y)$ per ogni $x \neq y$ appartenenti ad una medesima componente connessa di G, essa viene detta *colorazione* L_∞ *di* G. Il *numero s-cromarico di* G è il minimo numero di colori necessario per poter definire in G una colorazione L_s. Nel seguito indicheremo con $\overline{G}$ il grafo *complementare* di G, con G^s il grafo avente per vertici i vertici di G e tale che $\{x, y\} \in S(G^s)$ se e solo se $d(x, y) \leqslant s$. Per *accoppiamento* M *di* G s'intenderà un insieme $M \subseteq S$ i cui elementi siano a due a due non incidenti; un vertice $x \in V$ si dirà *saturo in* M se è estremo di uno spigolo $s \in M$. Se $A, B \subseteq V$, per *accoppiamento di* A *in* B s'intenderà un accoppiamento M di G che *saturi* tutti gli elementi di A e tale che se $x \in A$, $\{x, y\} \in M$, allora $y \in B$.

Teor. 2.1. *Sia* $G = (V, S)$ *un grafo qualsiasi*; $A \subseteq V$ *tale che* $A \in \mathscr{F}_s$, $|A| = d_s$; $B \subseteq V - A$ *tale che* $B \in \mathscr{F}_s$, $|B| = \max\{|X|: X \subseteq V - A,\ X \in \mathscr{F}_s\}$. *Sussistono le seguenti proposizioni*:

(i) *Se* $W \subseteq V - A$, $W \in \mathscr{F}_s$, *esiste in* $\overline{G^s}$ *un accoppiamento* M *di* W *in* A.

(ii) *Se* $H \subseteq V - (A \cup B)$, $H \in \mathscr{F}_s$, *esiste in* $\overline{G^s}$ *un accoppiamento* M' *di* H *in* B.

Dim. (i) Sia J il sottografo di G generato da $A \cup W$ [risp. J' il sottografo di G generato da $H \cup B$]. Proviamo che in J [risp. in J'] si ha $|Y| \leqslant |\bigcup_{x \in Y} T_s(x)|$ $\forall Y \subseteq W$ [$\forall Y \subseteq H$].

Infatti se fosse $|Y| > |\bigcup_{x \in Y} T_s(x)|$ per almeno un $Y \subseteq W$ [$Y \subseteq H$], si avrebbe

$|Y \cup A - \bigcup_{x \in Y} T_s(x)| > d_s$, $Y \cup A - \bigcup_{x \in Y} T_s(x) \in \mathscr{F}_s$ [risp. $Y \cup B - \bigcup_{x \in Y} T_s(x) \in \mathscr{F}_s$, $|Y \cup B - \bigcup_{x \in Y} T_s(x)| > |B|$, $Y \cup B - \bigcup_{x \in Y} T_s(x) \subseteq V - A$], contro le ipotesi.

La tesi segue, allora, dal teorema di Konig-Hall ([**2**], p. 128), applicato al grafo $\overline{J^s}$ [risp. $\overline{J'^s}$] che è bipartito in A ed in W [in H ed in B].

3 – In questo numero daremo alcune condizioni sufficienti relative alla determinazione di Δ_s.

Teor. 3.1. *Sia $G = (V, S)$ un grafo nel quale esiste una partizione* $\boldsymbol{P} = \{X, Y, Z\}$ *di V tale che $X, Y \in \mathscr{F}_s$, $|X| = |Y| = d_s$. Se esiste in Z un vertice u tale che $T_s(u) \cap X \neq \emptyset$, $T_s(u) \cap Y \neq \emptyset$,* diam $\big(T_s(u) \cap (X \cup Y)\big) \leqslant s$, *si ha $\Delta_s \geqslant 1$.*

Dim. Se fosse, infatti, $\Delta_s = 0$, indicata con K una L_s-colorazione di G mediante d_s colori, si dovrebbe avere $K(u) \in K\big(T_s(u) \cap X\big)$, $K(u) \in K\big(T_s(u) \cap Y\big)$, poichè $|K(X)| = |K(Y)| = d_s$, ed inoltre $K\big(T_s(u) \cap X\big) \cap K\big(T_s(u) \cap Y\big) = \emptyset$, poichè $T_s(u) \cap (X \cup Y) \in \mathscr{F}_s$.

Teor. 3.2. *Sia $G = (V, S)$ un grafo tale che $|V| \geqslant 4$ ed $A \subseteq V$ tale che $A \in \mathscr{F}_s$, $|A| = d_s$.*

(i) *Se $|V - A| \leqslant 2$, si ha $\Delta_s = 0$.*

(ii) *Se $|V - A| \leqslant 5$, si ha $\Delta_s \leqslant 1$.*

Dim. Poniamo $A = \{x_1, x_2, ...\}$, $V - A = \{y_1, y_2, ...\}$. Se $V - A \in \mathscr{F}_s$, la tesi segue dal Teor. 1.1; mentre se $d(y_i, y_j) \geqslant s + 1$ per ogni i, j, $i \neq j$, la tesi segue dal Teor. 1.2. Poichè per $|V - A| \leqslant 2$ si verifica necessariamente una di tali condizioni, la (i) risulta già dimostrata. Supponiamo, dunque, che sia $d(y_1, y_2) \geqslant s + 1$ e $d(y_1, y_3) \leqslant s$. Se $|V - A| = 3$, per il Teor. 2.1 esiste un $x \in A$ tale che $d(y_3, x) \geqslant s + 1$. Si può allora definire una L_s-colorazione K di G, mediante $d_s + 1$ colori α_i, ponendo

$$K(v) = \begin{cases} \alpha_i & \text{per } v = x_i \\ \alpha_{d_s+1} & \text{per } v = y_1,\ v = y_2 \\ K(x) & \text{per } v = y_3\,. \end{cases}$$

Se $|V - A| = 4$, fissato y_3 [risp. y_4] per il Teor 2.1 (i) esiste un vertice $x_i \in A$ [$x_j \in A$] tale che $d(y_3, x_i) \geqslant s + 1$ [$d(y_4, x_j) \geqslant s + 1$]. Si può allora definire, anche in questo caso, una L_s-colorazione K di G, mediante $d_s + 1$ colori α_i ponendo

$$K(v) = \begin{cases} \alpha_i & \text{per } v = x_i \\ \alpha_{d_s+1} & \text{per } v = y_1,\ v = y_2 \\ K(x_i) & \text{per } v = y_3 \\ K(x_j) & \text{per } v = y_4 . \end{cases}$$

Osserviamo che se $d(y_3, y_4) \leqslant s$ si ha $x_i \neq x_j$ e quindi $K(x_i) \neq K(x_j)$.

Sia, infine, $|V - A| = 5$ ed indichiamo con $Y' = \{y_1, y_2, \ldots\}$ un sottoinsieme di Y tale che $Y' \in \mathscr{F}_s$, $|Y'| = \max\{|X| : X \subseteq Y,\ X \in \mathscr{F}_s\}$. Per il Teor. 2.1 (i) esistono $|Y'|$ vertici di A, siano $x_1, x_2, \ldots$, tali che $d(x_i, y_i) \geqslant s+1$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, |Y'|$. Proveremo che in ogni caso esiste una L_s-colorazione di G, che indicheremo con K, mediante $d_s + 1$ colori α_i. Per ogni $x_i \in A$ sarà sempre $K(x_i) = \alpha_i$.

Se $|Y'| = 4$, si ha facilmente la tesi ponendo $K(y_i) = K(x_i)$ per $i = 1, \ldots, 4$, $K(y_5) = \alpha_{d_s+1}$.

Sia $|Y'| = 3$. Se $d(y_4, y_5) \geqslant s + 1$, si può porre $K(y_i) = K(x_i)$ per ogni $y_i \in Y'$, $K(y_4) = K(y_5) = \alpha_{d_s+1}$. Se $d(y_4, y_5) \leqslant s$, per il Teor. 2.1 (ii) esistono due vertici di Y', ad esempio y_2, y_3, tali che $d(y_4, y_2) \geqslant s + 1$, $d(y_5, y_3) \geqslant s + 1$. Se $d(y_1, y_4) \geqslant s + 1$, si può porre $K(y_i) = K(x_i)$ per $i = 1, 2$, $K(y_3) = K(y_5) = \alpha_{d_s+1}$, $K(y_4) = K(x_j)$, dove $x_j \in A$ è un vertice tale che $d(y_4, x_j) \geqslant s + 1$. In modo analogo si può procedere se $d(y_1, y_5) \geqslant s + 1$. Sia, dunque, $d(y_1, y_4) \leqslant s$, $d(y_1, y_5) \leqslant s$. Se $d(y_5, x_i) \geqslant s + 1$ per almeno un $x_i \neq x_1$, allora si ha la tesi ponendo $K(y_J) = K(x_J)$ per $J = 1, 3$, $K(y_5) = K(x_i)$, $K(y_2) = K(y_4) = \alpha_{d_s+1}$. Sia, quindi, $d(y_5, x_i) \leqslant s$ per ogni $i \neq 1$. Segue necessariamente che $d(y_5, x_1) \geqslant s + 1$. Per il Teor. 2.1 (ii) deve allora esistere un $x_j \neq x_1$ tale che $d(y_1, x_j) \geqslant s + 1$. Se $x_j \neq x_3$, si può porre $K(y_1) = K(x_j)$, $K(y_5) = K(x_1)$, $K(y_3) = K(x_3)$, $K(y_2) = K(y_4) = \alpha_{d_s+1}$. Se $x_j = x_3$ (in tal caso è $d(y_1, x_i) \leqslant s$ per ogni $x_i \neq x_1$, $x_i \neq x_3$), per il Teor. 2.1 (i), esiste un $x_h \neq x_1$, $x_h \neq x_3$, tale che $d(y_4, x_h) \geqslant s + 1$. Si può allora porre $K(y_3) = K(y_5) = \alpha_{d_s+1}$, $K(y_i) = K(x_i)$ per $i = 1, 2$, $K(y_4) = K(x_h)$, da cui la tesi.

Supponiamo, adesso, $|Y'| = 2$. Osserviamo che se esistono in Y almeno tre vertici y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} tali che $d(y_{ij}, y_{ih}) \geqslant s + 1$ per ogni $h, j = 1, 2, 3$, $h \neq j$, si ha immediatamente la tesi. Basta porre $K(y_{ij}) = \alpha_{d_s+1}$, per $j = 1, 2, 3$, $K(y_{i4}) = K(x_{i4})$, $K(y_{i5}) = K(x_{i5})$. Si osservi che se $d(y_{i4}, y_{i5}) \leqslant s$, allora per il Teor. 2.1 (i) si ha $x_{i4} \neq x_{i5}$. In modo analogo, si ha la tesi se esiste in Y un vertice y_i tale che $d(y_i, y_{j1}) \geqslant s + 1$, $d(y_i, y_{j2}) \geqslant s + 1$, $d(y_i, y_{j3}) \geqslant s + 1$, per $y_{ji} \in Y$. Basti osservare che, essendo diam $(\{y_{j1}, y_{j2}, y_{j3}\}) \geqslant s + 1$, due di tali vertici, ad esempio y_{jh}, y_{jk}, sono tali che $d(y_{jh}, y_{jk}) \geq s+1$. I vertici y_i, y_{jh}, y_{jk} sono, dunque, a due a due a distanza $\geq s+1$ tra di loro.

Supponiamo che tali condizioni non siano verificate. Essendo diam $(\{y_3, y_4, y_5\}) \geq s+1$, almeno due vertici tra y_3, y_4, y_5 sono a distanza $\geq s+1$. Sia $d(y_5, y_4) \geq s+1$. Fissato y_5, si ha diam $(Y' \cup \{y_5\}) \geq s+1$. Supponiamo, per fissare le idee, $d(y_5, y_1) \geq s+1$. Necessariamente segue che $d(y_5, y_2) \leq s$, $d(y_5, y_3) \leq s$. Inoltre si ha $d(y_1, y_4) \leq s$, da cui $d(y_2, y_4) \geq s+1$, e quindi $d(y_3, y_4) \leq s$, $d(y_1, y_3) \geq s+1$. Si può allora porre $K(y_2) = K(y_4) = \alpha_{d_s+1}$, $K(y_3) = K(x_3)$, $K(y_5) = K(x_5)$, $K(y_1) = K(x_1)$ (si osservi che può essere, in tal caso, $x_1 = x_3$ oppure $x_1 = x_5$) ed infine, come in precedenza, $K(x_i) = \alpha_i$ per ogni $x_i \in A$.

Se $|Y'| = 1$, la tesi segue immediatamente dal Teor. 1.2. Il teorema è così completamente dimostrato.

La (i) del Teor. 3.2 assicura che $\Delta_s = 0$ per $|V - A| \leq 2$. Proviamo con un esempio che esistono grafi con $|V - A| = 3$ e tali che $\Delta_s = 1$. Sia infatti G il grafo avente per vertici $v_1, v_2, \ldots, v_8$ e per spigoli $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_3, v_7\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_4, v_8\}$, $\{v_5, v_8\}$, $\{v_6, v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$. Si verifica che $d_2 = 5$, $|V - A| = 3$ (dove $A = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$), $\gamma_2 = 6$.

4 – In questo numero dimostreremo alcuni teoremi utili per il seguito.

Teor. 4.1. *Sia $G = (V, S)$ un grafo con almeno un vertice x_1 di grado uno, G_1 il sottografo di G generato da $V - \{x_1\}$. Se G_1 è L_2-colorabile con k colori, anche G è L_2-colorabile con k colori.*

Dim. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i colori di una L_2-colorazione di K di G. Se y è il vertice adiacente in G a x_1, si ha $|U_2(x_1)| = |U_1(y)|$. Essendo per ogni $x \in V(G_1)$ $|U_1(x)| \leq k-1$, esiste almeno un colore α_i tale che $\alpha_i \notin K(U_2(x_1))$. Si può allora definire una L_2-colorazione K' di G ponendo $K'(x) = K(x)$ per ogni $x \neq x_1$, $K'(x_1) = \alpha_i$. Da cui la tesi.

Teor. 4.2. *Sia $G = (V, S)$ un grafo distinto dal ciclo a 5 vertici e con almeno un vertice x_1 di grado due adiacente a due vertici y, z, anch'essi di grado due. Se il grafo G_1, sottografo di G generato da $V - \{x_1\}$, è L_2-colorabile con $k \geq d_2(G_1) + 1$ colori, anche G è L_2-colorabile con k colori.*

Dim. Se G è un ciclo, la tesi è di facile verifica. Se G non è un ciclo, G_1 non è un tronco, dunque $d_2(G_1) \geq 4$. Se K è allora una colorazione L_2 di G_1 mediante $k \geq d_2(G_1) + 1$ colori α_i, essendo $|U_2(x_1)| \leq 4$, esiste almeno un colore α_i tale che $\alpha_i \notin K(U_2(x_1))$. Si può, quindi, definire una colorazione L_2

di G, mediante k colori, ponendo $K'(x) = K(x)$ per ogni $x \neq x_1$, $K'(x_1) = \alpha_i$. Da cui segue la tesi. Se $K(y) = K(z)$ si ha la tesi osservando che esistono un $\alpha_J \notin K(U_1(t)) \cup \{K(z)\}$, ove $t \in U_1(z)$, ed un $\alpha_i \notin K(U_2(x_1)) \cup \{\alpha_J\}$.

Teor. 4.3. *Sia G un grafo regolare di grado tre e $\mathscr{C}$ la classe dei cicli elementari di G. Se $|V| = 10$ e $d_2(G) = 4$, si ha*

$$L = \min_{C \in \mathscr{C}} l(C) = 4\,,$$

dove $l(C)$ è la lunghezza di C.

Dim. Supponiamo, dapprima, che esista in G un ciclo elementare di lunghezza tre e sia $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ l'insieme dei suoi vertici. Se $y_i \in V - X$ è adiacente a x_i, dalle ipotesi segue che per almeno una coppia di indici i, j, $i \neq j$, si ha $y_i \neq y_j$. Supponiamo $y_i \neq y_j$, per ogni $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Se T è l'insieme $\{t_1, t_2, \ldots\} = V - (X \cup \{y_1, y_2, y_3\})$, essendo $d_2 = 4$, si ha $|U_1(y_i) \cap T| = 2$ e $U_1(y_i) \cap U_1(y_j) = \emptyset$, $i \neq j$. Da cui $|\bigcup_i (U_1(y_i) \cap T)| = 6$, contro le ipotesi.

Supponiamo, dunque, $y_2 = y_3 \neq y_1$. Indicati, allora, con z_1, z_2 i vertici adiacenti a y_1 e distinti da x_1, con z_3 il vertice adiacente a y_2 e distinto da x_2, x_3, con t_1, t_2 i rimanenti vertici di V, si ha necessariamente $\{t_1, t_2\} \in S$. Inoltre almeno un vertice di $\{t_1, t_2\}$ dev'essere adiacente a z_3. Sia, per fissare le idee, $\{t_1, z_3\} \in S$. Ne segue $\{t_1, z_1\} \in S$ (oppure $\{t_1, z_2\} \in S$), $\{t_2, z_1\} \in S$, $\{t_2, z_3\} \in S$. Da cui $g(z_2) = 1$, contro le ipotesi.

È, quindi, $L \geqslant 4$. Indichiamo con x_i i vertici di un ciclo $C \in \mathscr{C}$ di lunghezza L e con $\{x_i, x_{i+1}\}$ i suoi spigoli (per $i = L$, si pone $i + 1 = 1$). Osserviamo che non può essere $L = 5$, poichè $d_2 = 4$. Non può essere, inoltre, $9 \leqslant L \leqslant 10$, poichè essendo il grafo regolare di grado 3, esistono necessariamente spigoli del tipo $\{x_i, x_j\}$ con $j \neq i + 1$. Non può essere, infine, $6 \leqslant L \leqslant 8$, poichè essendo $|V - \{x_1, x_2, \ldots\}| \leqslant 4$ esiste almeno un vertice $t \neq x_i$ tale che $|U_1(t) \cap \{x_1, x_2, \ldots\}| \geqslant 2$ e ciò comporta l'esistenza in G di cicli $C \in \mathscr{C}$ tali che $l(C) < L$. Necessariamente è, dunque, $L = 4$.

5 – Si pone il seguente

Problema. *Determinare il minimo valore di $n \in N$ per cui esiste un grafo, possibilmente planare, con n vertici tale che $\Delta_2 = 1$ oppure tale che $\Delta_2 = 2$.*

Supporremo $n \geqslant 4$, poichè per $n \leqslant 3$ si ha facilmente $\Delta_2 = 0$. Sarà, dunque, $d_2 \geqslant 3$. Se $d_2 = 3$, G è un tronco o un ciclo di lunghezza $\geqslant 6$. Nel primo caso è $\Delta_2 = 0$, nel secondo caso è $\Delta_2 \leqslant 1$. In particolare se G è un ciclo con 6 vertici si ha $\Delta_2 = 0$, se G è un ciclo con 7 vertici si ha $\Delta_2 = 1$. Poichè per $n \leqslant 6$ e

$d_2 \geq 4$ si ha $n - d_2 \leq 2$, segue per il Teorema 3.2 (i) che in tali casi è sempre $\Delta_2 = 0$. Si può concludere, quindi, che *il minimo valore di n per cui esiste un grafo con n vertici tale che $\Delta_2 = 1$ è $n = 7$. Un grafo verificante tali condizioni è C_7* (ciclo con 7 vertici). *Si osservi che C_7 è un grafo planare.*

Esaminiamo, adesso, la seconda parte del problema. Osserviamo che per $n \leq 9$ e $d_2 \geq 4$ oppure per $n = 10$ e $d_2 \geq 5$ si ha, per il Teor. 3.2, $\Delta_2 \leq 1$. Dimostriamo che *se $n = 10$ e $d_2 = 4$ si ha ancora $\Delta_2 = 1$.*

La tesi è immediata se G è un grafo con vertici pendenti (cfr. Teor. 4.1). Supponiamo, allora, che G non appartenga a tale classe di grafi. Per ogni vertice $x \in V$ si ha dunque $2 \leq g(x) \leq 3$. Inoltre, se $m = |S|$ e $h = m - 11$, si ha $0 \leq h \leq 4$ e la *caratteristica dei vertici di G* (²) è del tipo $[(2)_{10-2(h+1)}, (3)_{2(h+1)}]$.

(I) *Supponiamo $h = 4$.*

Per il Teor. 4.3 esiste in G un ciclo di lunghezza 4. Siano x_i i vertici di un tale ciclo, $y_i \in V - \{x_1, x_2, ...\}$ tali che $\{x_i, y_i\} \in S$, v_1 e v_2 i rimanenti vertici. È necessariamente $\{v_1, v_2\} \in S$. Inoltre v_1 [risp. v_2] è adiacente a y_1 ed a y_3 (oppure a y_2 ed a y_4). Supponiamo $U_1(v_1) = \{v_2, y_1, y_3\}$, $U_1(v_2) = \{v_1, y_2, y_4\}$. Necessariamente è $\{y_1, y_2\} \in S$, $\{y_3, y_4\} \in S$ (oppure, in modo analogo, $\{y_1, y_4\} \in S$, $\{y_2, y_3\} \in S$). Si verifica facilmente che un tale grafo è L_2-colorabile con 5 colori. Da cui segue la tesi.

(II) *Supponiamo $0 \leq h \leq 3$.*

Esiste in G almeno un vertice x_1 di grado due. Supponiamo che non esista in G alcuna catena elementare di lunghezza ≥ 2 i cui vertici siano tutti di grado due, poichè in tal caso la tesi seguirebbe dal Teor. 4.2. Se x_2, z_1 sono i vertici adiacenti a x_1, poniamo $U_1(x_2) = \{x_1, x_3, x_4\}$ (³).

Sia (1) $|U_2(x_1)| \leq 4$.

Osserviamo che se G_1 è il grafo generato da $V - \{x_1\}$, essendo $|V(G_1)| = 9$, esiste una L_2-colorazione K di G_1, mediante 5 colori α_i. Essendo, inoltre, $|U_2(x_1)| \leq 4$, si ha in G_1 $d(x_2, z_1) \leq 2$ e quindi $K(x_2) \neq K(z_1)$. Poichè esiste almeno un colore $\alpha_i \notin K(U_2(x_1))$, si può *estendere* la colorazione K a V ponendo $K(x_1) = \alpha_i$. Da cui la tesi.

Supponiamo allora (2) $|U_2(x_1)| \geq 5$.

Se $g(z_1) = 2$, indicato con z_2 il vertice adiacente a z_1 e distinto da x_1, si ha $z_2 \notin U_1(x_2)$. Se $U_1(z_2) = \{z_1, z_3, z_4\}$, si ha inoltre $U_1(z_2) \cap U_1(x_2) = \emptyset$. Poniamo, per semplicità, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, W

(²) La *caratteristica dei vertici di G* è una $|V|$-upla $(g(x_1), g(x_2), ...)$ costituita dai gradi di tutti i vertici di G, [**3**], [**4**], [**5**]$_1$.

(³) Se $|U_2(x_1)| \leq 4$ può essere $z_1 \in U_1(x_2)$. Se $|U_2(x_1)| \geq 5$ è $z_1 \notin U_1(x_2)$.

$= \{x_3, x_4, z_3, z_4\}$, $V - (X \cup Z) = \{t_1, t_2\}$, $T = \{t_1, t_2, z_3, z_4\}$, $J = \{x_3, x_4, t_1, t_2\}$. Se diam $T \leqslant 2$ (o, in modo analogo, diam $J \leqslant 2$), per il Teor. 2.1 esiste in $\overline{G^2}$ un accoppiamento di T in X. Si può, allora, definire una L_2-colorazione K di G attribuendo ai vertici di T quattro colori distinti e ponendo poi $K(z_1) = K(x)$, dove $x \in T$ è tale che $d(z_1, x) \geqslant 3$, $K(x_i) = K(x)$ per $i = 3, 4$ e $x \in T$ tale che $d(x_i, x) \geqslant 3$, $K(x_1)$ uguale ad un colore di $K(T)$ distinto da $K(x_3)$, $K(x_4)$, $K(z_1)$, ed infine $K(x_2) = K(z_2) \notin K(T)$. Se è $d(t_1, t_2) \geqslant 3$, si ha facilmente la tesi poichè esiste in $\overline{G^2}$ un accoppiamento di Z in X e si può porre $K(t_1) = K(t_2) \notin K(X) = K(Z)$. Se, infine, è diam $W \leqslant 2$ (e $d(t_1, t_2) \leqslant 2$), si ha la tesi attribuendo quattro colori distinti ai vertici di W, ponendo poi $K(x_2) = K(z_2) \notin K(W)$, ed osservando infine che esistono in $\overline{G^2}$ un accoppiamento M di $\{x_1, z_1\}$ in W ed un accoppiamento N di $\{t_1, t_2\}$ in W. Supponiamo, dunque, diam $T \geqslant 3$, diam $J \geqslant 3$, diam $W \geqslant 3$, $d(t_1, t_2) \leqslant 2$. Sia, per fissare le idee, $d(x_4, z_3) \geqslant 3$. Se $d(z_4, t_i) \geqslant 3$ (o, in modo analogo, $d(x_3, t_i) \geqslant 3$) per almeno un $i = 1, 2$, si ha la tesi ponendo $K(x_4) = K(z_3)$, $K(z_4) = K(t_i)$, $K(x_1) = K(t_j)$, $j \neq i$, $K(z_1) = K(x_3)$, $K(x_2) = K(z_2)$. Se $d(x_3, z_4) \geqslant 3$, si può porre $K(x_4) = K(z_3)$, $K(x_3) = K(z_4)$, $K(x_2) = K(z_2)$, $K(x_1) = K(t_1)$, $K(z_1) = K(t_2)$. Supponiamo, perciò, diam $(\{x_3, t_1, t_2, z_4\}) \leqslant 2$. Essendo diam $J \geqslant 3$, diam $T \geqslant 3$, si ha $d(x_4, t_i) \geqslant 3$ e $d(z_3, t_j) \geqslant 3$ per $i, j = 1, 2$ (può essere $i = j$). Attribuiti, allora, quattro colori distinti a x_3, t_1, t_2, z_4, si può porre $K(x_2) = K(z_2) \notin K(\{x_3, t_1, t_2, z_4\})$, $K(x_4) = K(t_i)$, $K(z_3) = K(t_j)$, $K(x_1) = K(z_4)$, $K(z_1) = K(x_3)$.

Se $g(z_1) = 3$, poniamo $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\} = \Gamma_1(z_1) - \{x_1\}$, $T = V - (X \cup Z) = \{t_1, t_2, \ldots\}$. Dalle ipotesi si ha $1 \leqslant |U_1(x_2) \cap U_1(z_1)| \leqslant 2$. Supponiamo, dapprima, $|U_1(x_2) \cap U_1(z_1)| = 1$. Se diam $T \geqslant 3$, posto $d(t_1, t_2) \geqslant 3$, si ha la tesi osservando che si può attribuire un medesimo colore a t_1, t_2 ed a t_3, x_1, e che esiste in $\overline{G^2}$ un accoppiamento di Z in X che non *satura* x_1. Se diam $T \leqslant 2$, almeno un vertice di $\{x_3, x_4\}$ [risp. di $\{z_2, z_3\}$] è a distanza $\geqslant 3$ da almeno un vertice di T. Sia $d(x_3, t_1) \geqslant 3$, $d(z_2, t_i) \geqslant 3$. Se $i \neq 1$, si può porre $K(z_2) = K(t_i)$, $K(x_3) = K(t_1)$, $K(x_4) = K(z_1)$, $K(x_2) = K(z_3)$, $K(x_1) = K(t_j)$ per $j \in \{2, 3\} - \{i\}$. Se è necessariamente $i = 1$, si ha $d(z_j, t_h) \leqslant 2$, e per analogia $d(x_k, t_j) \leqslant 2$, per ogni $j, h = 2, 3$, $k = 3, 4$. In tal caso esiste un indice $i \in \{2, 3\}$ tale che $d(z_1, t_i) \geqslant 3$, ed inoltre esiste in $\overline{G^2}$ un accoppiamento di $\{z_2, z_3\}$ in $\{x_3, x_4, t_2, t_3\}$ che non *satura* t_2, t_3. Se, per fissare le idee, è $d(z_1, t_2) \geqslant 3$, $d(z_2, x_4) \geqslant 3$ [risp. $d(z_2, x_3) \geqslant 3$], si può porre $K(z_1) = K(t_2)$, $K(x_1) = K(t_3)$, $K(x_2) = K(z_3)$, $K(x_3) = K(t_1)$, $K(x_4) = K(z_2)$ [risp. $K(x_3) = K(t_1) = K(z_2) \neq K(x_4)$].

Se è $|U_1(x_2) \cap U_1(z_1)| = 2$, poniamo rispetto al caso precedente $z_3 = x_4$. Si ha inoltre $|T| = 4$. Osserviamo che, poichè il grafo G_1 (sottografo di G generato da $V - \{x_1\}$) ha 9 vertici, esiste per esso una L_2-colorazione K', mediante 5 colori. Ne segue che esiste nella K' un colore associato ad un solo vertice. Se $|K'(U_2(x_1))| \leqslant 4$, si ha la tesi attribuendo a x_1 uno dei rimanenti colori. Supponiamo $|K'(U_2(x_1))| = 5$. Se $K'(x_2)$ è associato soltanto a x_2 [risp.

$K'(z_1)$ associato solo a z_1], si ha la tesi ponendo $K(z_2) = K'(x_2)$, $K(x_1) = K'(z_2)$, $K(x) = K'(x)$ per ogni $x \neq x_1, z_2$ [risp. $K(x_3) = K'(z_1)$, $K(x_1) = K'(x_3)$, $K(x) = K'(x)$ per ogni $x \neq x_1, x_3$]. Se $K'(x_3)$ [risp. $K'(z_2)$] è associato soltanto a x_3 [risp. z_2], si può porre $K(z_1) = K'(x_3)$, $K(x_1) = K'(z_1)$ [risp. $K(x_2) = K'(z_2)$, $K(x_1) = K'(x_2)$], $K(x) = K'(x)$ per ogni $x \neq x_1$, z_1 [x_2]. Supponiamo, infine, che sia $K'(x_4)$ il colore associato ad un solo vertice; possiamo anche supporre che i rimanenti colori siano associati ciascuno a due vertici. In tal caso si può affermare che esiste in $\overline{G_1^2}$ (e quindi anche in $\overline{G^2}$) un accoppiamento M di $\{x_2, x_3, z_1, z_2\}$ in T tale che se $\{x, y\} \in M$ allora $K'(x) = K'(y)$. Osserviamo che esiste un $t_i \in T$ tale che $d(t_i, x_4) \geqslant 3$. Infatti se $g(x_4) = 2$ allora $d(x_4, T) \geqslant 3$, se $g(x_4) = 3$ esiste un unico vertice $t_j \in T$ adiacente a x_4, il quale può essere adiacente al più a due vertici di T. Poniamo, allora, $d(x_4, t_1) \geqslant 3$. Se $\{t_1, z_1\} \in M$ (o, in modo analogo, $\{t_1, x_2\} \in M$), si può porre $K(t_1) = K'(x_4)$, $K(x_3) = K'(z_1)$, $K(x_1) = K'(x_3)$, $K(x) = K'(x)$ per ogni $x \neq t_1, x_1, x_3$. Se è $\{t_1, z_2\} \in M$ (o, in modo analogo, $\{t_1, x_3\} \in M$), si può porre $K(t_1) = K'(x_4)$, $K(x_2) = K'(z_2)$, $K(x_1) = K'(x_2)$, $K(x) = K'(x)$ per ogni $x \neq x_2, x_1, t_1$.

La proposizione risulta così completamente dimostrata.

Consideriamo, adesso, il grafo G avente per vertici $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ e per spigoli $\{x_i, x_{i+1}\}$ per $i = 1, 2, \ldots, 9$, $\{x_{10}, x_1\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_9\}$, $\{x_3, x_8\}$, $\{x_{11}, x_6\}$, $\{x_{11}, x_{10}\}$. Si può verificare che per G si ha $|V| = 11$, $d_2 = 4$, $\gamma_2 = 6$ e, quindi, $\Delta_2 = 2$. Si può, dunque, concludere che *il minimo valore di* n *per cui esiste un grafo con* n *vertici tale che* $\Delta_2 = 2$ *è* $n = 11$. *Si osservi che il grafo* G, *descritto in precedenza e verificante tali condizioni, è planare.*

Il problema esaminato ne suggerisce altri. Ad esempio sussiste il problema, che ci proponiamo di esaminare in seguito, di *determinare il minimo valore di* n *per cui esiste un grafo con* n *vertici* (*possibilmente planare*) *tale che* $\Delta_2 = 3$, *o, più in generale, tale che* $\Delta_2 = u$, *ove* u *è un prefissato numero naturale.*

Bibliografia

[1] S. Antonucci, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[2] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] M. Ferro, *Caratteristiche dei singrammi orientati*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **2** (1973), 159-173.

[4] A. M. Ghirlanda, *Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi*, Ann. Univ. Ferrara **11** (1964), 93-106.

[5] M. GIONFRIDDO: $[\cdot]_1$ *Sulla determinazione dei singrammi non orientati*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), 206-213; $[\cdot]_2$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-458; $[\cdot]_3$ *Automorfismi colorati e colorazioni $L(r, s)$ in un grafo G*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-B (1979).

[6] O. ORE, *The four color-problem*, Academic-Press, New York, London 1967.

[7] F. SPERANZA: $[\cdot]_1$ *Numero cromatico, omomorfismi, colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; $[\cdot]_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** suppl. fasc. 3 (1975), 53-62.

Sommario

In questo lavoro si riprendono in esame alcuni problemi, già considerati in $[\mathbf{5}]_2$ *ed in* $[\mathbf{7}]_2$, *relativi alle colorazioni L_s d'un grafo G ed al suo numero s-cromatico γ_s. Si danno alcune condizioni sufficienti per la determinazione di Δ_s e si determinano poi i grafi col minimo numero di vertici tali che $\Delta_2 = \gamma_2 - d_2 = 1$ e $\Delta_2 = 2$ rispettivamente.*

* * *