Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 73-79

C. Cotti Ferrero e M. G. Rinaldi (*)

Sugli stems i cui ideali propri sono massimali (**)

Introduzione

Diversi autori (cfr. ad esempio [**4**], [**5**], [**7**]) hanno caratterizzato gli anelli commutativi (con o senza unità) i cui ideali propri sono massimali; in altri lavori (cfr. [**1**], [**3**]) si classificano fra l'altro, classi di anelli o stems i cui ideali propri soddisfano a tale proprietà.

Nasce allora l'idea di studiare più in generale gli stems destri i cui ideali propri sono massimali. In questo lavoro proviamo che tali stems hanno al più due ideali propri a meno che non siano particolari zero-stems o stems costanti.

Questo ci ha indotti a studiare più minutamente gli stems aventi esattamente uno o due ideali, individuandone abbastanza dettagliatamente la struttura, almeno limitatamente al caso distributivo. Incidentalmente (Th. 4 (c_1), (c_3)) si individuano notevoli stems distributivi che non sono anelli.

1 - Risultati principali

1.1 – Sia N uno stem destro. Per $S \subseteq N$ indichiamo con S^n il sottostem generato dai prodotti $x_1 x_2 \dots x_n$, con $x_1, \dots, x_n \in S$; poniamo inoltre $A_d(S) = \{x \in N \mid Sx = \{0\}\}$; $A_s(S) = \{x \in N \mid xS = \{0\}\}$ ed $A(S) = A_d(S) \cap A_s(S)$. In questo ci differenziamo dalle notazioni di [**6**], cui ci riferiremo senz'altro per tutte le altre.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Per l'autore C. Ferrero Cotti il lavoro è eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-VIII-1978.

Allo scopo di determinare la struttura degli stems N i cui ideali propri sono massimali, cominciamo con il

Lemma 1. *Sia N uno stem destro i cui ideali propri sono massimali e siano I, J, K tre ideali propri distinti di N; risulta $N = I + J = I + K = J + K$ con I, J, K stems semplici fra loro isomorfi.*

Siano I, J, K tre ideali propri distinti di N. Consideriamo l'ideale $I \cap K$: esso, se proprio, è massimale ed è contenuto sia in I che in K. Ne segue che $I \cap K = \{0\}$.

Di qui $N = I + K$ perchè I, K sono massimali. In definitiva $N = I + K = I + J = J + K$.

Inoltre I, J, K sono stems semplici isomorfi tra loro visto che I, J sono isomorfi ad N/K ed I, K ad N/J.

Lemma 2. *Sia N uno stem destro i cui ideali propri sono massimali e siano I_1, I_2 ideali propri di N, non necessariamente distinti, tali che $I_1 \cdot I_2 = \{0\}$. Lo stem N ha più di due ideali propri distinti se e solo se N è uno zero-anello il cui gruppo additivo N^+ è somma diretta di due gruppi dello stesso ordine primo p.*

Sia dapprima $I_1 = I_2 = I$. Allora $I^2 = \{0\}$ per ipotesi e ogni altro ideale di N è uno zero-stem (Lemma 1). Sia invece $I_1 = I$ e $I_2 = J$ con $I_1 \neq I_2$ e sia K un ideale diverso da I_1, I_2. Per $j \in J$, esistono elementi $i \in I$ e $k \in K$ tali che $j = i + k$, perchè (Lemma 1) $N = I + K$; inoltre, per $\bar{j} \in J$, risulta $j\bar{j} = i\bar{j} + k\bar{j} = k\bar{j}$ (perchè ora $IJ = \{0\}$). Ne segue che $J^2 \subseteq KJ \subseteq K$ e perciò $J^2 \subseteq K \cap J = \{0\}$, allora anche I e K risultano zero-stems perchè isomorfi a J (Lemma 1). In ogni caso dunque tutti gli ideali di N sono zero-stems.

Siano I, J, K ideali distinti di N; per il Lemma 1, l'ideale I è isomorfo sia ad N/J che ad N/K, che risultano dunque essere zero-stems perchè lo è I e quindi $N^2 \subseteq J \cap K = \{0\}$: ne segue che N è uno zero-stem somma diretta di zero-stems I, J che risultano semplici per il Lemma 1.

Dunque $N^+ = I^+ \oplus J^+$ con I^+, J^+ gruppi semplici: ricordato (cfr. [**8**], pag. 27) che un gruppo somma diretta di gruppi semplici, ha due soli sottogruppi normali propri a meno che sia abeliano elementare, risulta dimostrata la parte diretta del lemma. L'inverso è ovvio.

Il lemma che segue è ben noto, ma non lo abbiamo trovato nella letteratura corrente.

Lemma 3. *Sia G un gruppo e siano I, J, K tre sottogruppi normali propri e distinti di G tali che $G = I \oplus J = I \oplus K = J \oplus K$; allora G è abeliano.*

Infatti per $i \in I$, $g \in G$, esistono elementi $j \in J$ e $k \in K$ tali che $i + g = i + j + k = j + k + i = g + i$. Dunque I è contenuto nel centro di G. Analogamente J è contenuto nel centro di G. Ne segue che $G = I \oplus J$ è abeliano.

1.2 – Siamo ora in grado di dimostrare il teorema più importante del lavoro; esso generalizza agli stems quanto provato in [5], [7] per gli anelli commutativi (con o senza unità).

Teorema 1. *Uno stem destro N ha tutti gli ideali propri massimali e possiede più di due ideali propri distinti se e solo se è uno zero-anello o uno stem costante il cui gruppo additivo N^+ è somma diretta di due gruppi dello stesso ordine primo p.*

Siano I, J, K tre ideali propri distinti di N. Se uno degli ideali in questione ha quadrato nullo, l'enunciato segue dal Lemma 2.

Altrimenti $I^2 \neq \{0\}$, $J^2 \neq \{0\}$ e $K^2 \neq \{0\}$. *Vogliamo dimostrare che in tale caso* $I_0 = \{i \in I \mid i \cdot 0 = 0\} = \{0\}$; per questo cominciamo ad osservare che

$$(1) \qquad I_0 \neq \{0\} \Rightarrow I_0 I \neq \{0\} .$$

Sia infatti, per assurdo $I_0 \neq \{0\}$ ma $I_0 I = \{0\}$; allora $I_0 \subseteq A_s(I) \cap I$ ed $A_s(I) \cap I$ risulta un ideale *non nullo* di I, come si verifica direttamente. Visto che I è semplice (Lemma 1), riesce $A_s(I) \cap I = I$ e pertanto $I \subseteq A_s(I)$. Dunque $I^2 = \{0\}$; questo è escluso, e la (1) è dimostrata.

Ora, dalla $N = J + K = I + J$ (Lemma 1) segue che, $\forall i \in I$, esistono elementi $j, j_1 \in J$, $k \in K$ e $i_1 \in I$, tali che $i = j + k$ e $k = i_1 + j_1$. Allora $i = j + i_1 + j_1 = i_1 + j + j_1$ (Lemma 3) e pertanto $i = i_1$ (Lemma 1). Se ne trae che, qualunque sia $i \in I$, esiste uno $j \in J$ tale che $i + j \in K$ e che qualunque sia $j \in J$ esiste un $i \in I$, tale che $i + j \in K$.

Siano $i \in I$, $i_0 \in I_0$; per quanto sopra visto possiamo considerare uno $j \in J$, tale che $i + j \in K$, dimostriamo che $i_0(i + j) \in K \cap I$. Infatti addirittura $I_0 \cdot K \subseteq I$ (perchè I è un ideale) e $I_0 \cdot K \subseteq K$ perchè, per $k \in K$, risulta $i_0 \cdot k = i_0(0 + k) - i_0\, 0 \in K$ (essendo K un ideale). Dunque $i_0(i + j) = 0$ ed $I_0 \cdot K = \{0\}$. Analogamente si prova che $I_0 \cdot J = \{0\}$. Poichè I, J sono ideali, risulta $[i_0(i + j) - i_0 i] - i_0 j \in J + J = J$ e poichè N^+ è abeliano, è pure $[i_0(i + j) - i_0 i] - i_0 j = [i_0(i + j) - i_0 j] - i_0 i \in I + I = I$. Ne segue che $i_0(i + j) - i_0 i - i_0 j = 0$ perchè $I \cap J = \{0\}$ e dunque $i_0(i + j) = i_0 i + i_0 j$. Poichè $I_0 K = I_0 J = \{0\}$, risulta $\forall i_0 \in I$ e $\forall i \in I$, $i_0 i = 0$, onde $I_0 I = \{0\}$, contro la (1). Abbiamo dunque dimostrato che, nel caso attuale, $I_0 = \{0\}$; analogamente si ha $J_0 = \{j \in J \mid j \cdot 0 = 0\} = \{0\}$ e $K_0 = \{k \in K \mid k \cdot 0 = 0\} = \{0\}$.

Ne segue che I, J, K sono costanti e quindi *anche* N, essendo somma diretta di stems costanti, *è costante.*

Poichè I, J sono stems semplici (Lemma 1) e costanti, I^+ e J^+ sono gruppi semplici ed $N^+ = I^+ \oplus J^+$ ha più di due sottogruppi normali propri e distinti se e solo se I^+ e J^+ hanno lo stesso ordine primo p.

L'inverso è ovvio perchè se N è uno zero- anello o uno stem costante, tutti i sottogruppi normali di N^+ sono suoi ideali [1].

2 - Teoremi di struttura

2.1 – Esaminiamo ora gli stems N che hanno esattamente due ideali propri.

Teorema 2. *Uno stem destro N ha gli ideali propri massimali ed ha esattamente due ideali propri I, J se e solo se $N = I + J$ ove I, J sono stems semplici ed inoltre, nel caso in cui N sia uno zero-stem o uno stem costante, I^+, J^+ non hanno lo stesso ordine primo.*

Lo stem N abbia due soli ideali propri distinti I, J e siano questi massimali; allora $N = I + J$ con I, J stems semplici. Se inoltre N è uno zero-stem o uno stem costante allora I^+, J^+ devono essere gli unici sottogruppi normali non banali di N^+ e pertanto non possono avere lo stesso ordine primo (cfr. [**8**], pag. 27).

Sia, viceversa, $N = I + J$ con I, J semplici; allora I, J sono ideali massimali di N perchè N/I ed N/J sono isomorfi a J ed I rispettivamente. Sia K un ideale proprio di N distinto da I e J; deve essere $I \cap K = \{0\}$ perchè I è semplice e massimale; dunque $N = I + K$. Allora anche K è un ideale massimale di N perchè N/K è isomorfo ad I che è semplice. Lo stem N ha dunque tutti gli ideali propri massimali. Se I, J, K sono tre ideali propri distinti di N, allora (Teorema 1) lo stem N risulta uno zero-anello o uno stem costante il cui gruppo additivo è somma diretta di gruppi aventi lo stesso ordine primo. Ne segue l'asserto.

Teorema 3. *Uno stem N distributivo ha tutti gli ideali massimali ed ha esattamente due ideali se e solo se N è somma diretta dei due ideali ed inoltre si verifica uno dei seguenti casi.*

(1) *I due ideali sono zero-stems semplici di ordini, se primi, distinti.*

(2) *I due ideali sono anelli semplici non zero-anelli.*

(3) *Uno dei due ideali concide con $A(N)$, l'altro con N^2 ed N^2 non è uno zero-anello.*

---

[1] Ringraziamo il prof. G. Pilz che ha dato un suggerimento indispensabile al completamento della dimostrazione.

Siano I, J i due ideali propri e distinti di N. Per il Teorema 2, $N = I \dotplus J$ ove I, J sono stems semplici. Poichè N è distributivo, $A(N)$ è un ideale di N ed inoltre il derivato N' di N^+ è contenuto in $A(N)$.

Se $A(N) = N$ *siamo nel caso* (1).

Se $A(N) = 0$ *mostriamo intanto che* $N^2 = N$.

Infatti allora $N' \subseteq A(N) = \{0\}$ e dunque N è un anello ed N^2 è un ideale di N. Se $N^2 = \{0\}$, allora $N = \{0\}$, cosa ovviamente esclusa. Se N^2 è un ideale proprio di N, non è restrittivo porre $N = N^2 \dotplus J$ (Teorema 2) e allora $J^2 \subseteq N^2 \cap J = \{0\}$, onde $JN = NJ = \{0\}$. Ne segue $J \subseteq A(N) = \{0\}$, il che è escluso. *Si conclude che* $N = N^2$. Pertanto N è un anello ed i due ideali propri I, J sono semplici (Teorema 2). Poichè $A(N) = \{0\}$, tali ideali non possono essere zero-anelli e siamo nel caso (2).

Altrimenti $A(N)$ *è un ideale proprio di* N e sia J l'altro ideale proprio di N. Risulta al solito $N = A(N) \dotplus J$ e un rapido calcolo mostra che $N^2 \subseteq J^2$ onde $N^2 = J^2$. Ora J è un anello, perchè isomorfo ad $N/A(N)$ ed è semplice per il Teorema 2; ne segue che J^2 è un ideale di J, non nullo perchè $A(N)$ è proprio e, anzi, che $J^2 = J$. Quindi $N^2 = J$, perchè $N^2 = J^2$. Inoltre N^2 non è uno zero-anello perchè altrimenti $N^4 = \{0\}$ onde $N^3 \subseteq A(N) \cap N^2 = \{0\}$ ed $N^2 \subseteq A(N)$ il che è escluso. Siamo nel caso (3). L'inverso è ovvio, come si vede tenendo presente il Teorema 2.

2.2 – Passiamo ora allo studio degli stems aventi un solo ideale. Allo scopo ricordiamo che si dice *critico* uno stem avente ideali propri e *non* appartenente alla varietà generata dai suoi quozienti propri.

Osserviamo che uno stem critico è sottodirettamente irriducibile ed ha un solo ideale minimale (questi risultati sono stati dimostrati per gli anelli in $[\mathbf{2}]_2$ oss. 2 e teor. 5, con dimostrazioni che continuano a valere anche per gli stems).

Teorema 4. *Sia* N *uno stem distributivo. Lo stem* $N \neq N^2$ *ha un solo ideale se e solo se si verifica uno dei seguenti casi.*

(a_1) N *è un anello di ordine* p^2 (p *primo*) *ed* $N^2 = A(N) \neq \{0\}$;

(a_2) N *è un anello primo con* N^2 *ideale massimale e minimale.*

(b_1) N *è uno zero-stem ed* N^+ *ha un solo sottogruppo normale.*

(c_1) N^+ *ha* N' *come unico sottogruppo normale,* $A(N)^+ = N'$ *ed* $N/A(N)$ *è uno zero-anello di ordine primo.*

(c_2) *$N^+ = A^+ \oplus B^+$ con A^+ gruppo semplice non abeliano, B^+ di ordine primo, $A(N)^+ = A^+ = N'$ ed $N^2 = B^2 \subseteq A^+$.*

(c_3) *$A(N)^+ = N'$ non possiede sottogruppi normali propri di N^+, N^{2+} non è normale in N^+ ed $N/A(N)$ è un anello semplice non zero-anello.*

Sia N uno stem distributivo con $N^2 \neq N$ e con un solo ideale proprio. Consideriamo l'annullatore $A(N)$ di N.

Se $A(N) = N$, si ha subito il caso (b_1).

Sia $A(N)$ l'unico ideale proprio di N. Il derivato N' di N^+ è un ideale di N contenuto in $A(N)$. Dovrà pertanto essere $N' = \{0\}$ o $N' = A(N)$. Se $N' = \{0\}$, allora N è un anello. Visto che N^2 è ora un ideale di N non nullo (perchè $A(N)$ è proprio) e diverso da N per ipotesi, è $N^2 = A(N)$: dunque $N^3 = \{0\}$ ed $N/A(N)$ è uno zero-anello. Ne segue che N è un anello a cubo nullo tutti i cui quozienti sono zero-anelli. Per il teorema 3 ed il corollario 2 di [**2**]$_1$ siamo nel caso (a_1).

Sia $N' = A(N)$ e sia $N^2 \subseteq A(N)$. Se N' è l'unico sottogruppo normale di N^+, siamo nel caso (c_1). Altrimenti sia B un sottogruppo normale di N^+ distinto da N'. Poichè $N/A(N)$ è uno zero-anello semplice, allora N' è un sottogruppo normale massimale di N^+ ed inoltre $N' \cap B = \{0\}$, perchè $A(N) = N'$ è massimale (*e dunque B non contiene N'*) ed ogni ideale di $A(N)$ è un ideale di N. Ne segue che $N^+ = N' \oplus B$, con B gruppo di ordine primo perchè isomorfo ad N/N' ed N' gruppo semplice non abeliano. Siamo nel caso (c_2).

Se $N^2 \not\subseteq A(N)$ (ma sempre $N' = A(N)$) N^2 non può essere un ideale di N e pertanto N^{2+} non è normale in N^+. Siamo nel caso (c_3).

Sia infine $A(N) = \{0\}$, allora N è un anello ed $N^2 \neq N$ è un ideale di N. Se $N^2 = \{0\}$ siamo nel caso (b_1).

Altrimenti N^2 è l'unico ideale di N e pertanto è minimale e massimale; inoltre N è non nilpotente perchè $A(N) = \{0\}$ ed è critico perchè la varietà generata dai quozienti propri di N contiene solo zero-anelli, mentre N non è uno zero-anello. Per il Teorema 1 di [2]$_1$, N risulta primo. Siamo nel caso (a_2).

Vediamo di invertire i risultati: gli stems *dei casi* (b_1) *e* (c_1) hanno ovviamente un solo ideale.

Valga la (a_1). Intanto $N^3 = \{0\}$ e per il teorema 3 di [**2**]$_1$ tutti i quozienti di N sono zero-anelli. Ne segue che $A(N) = N^2$ è contenuto in ogni ideale di N; ma visto che $N/A(N)$ ha ordine primo, non esistono ideali di N che contengono $A(N)$ propriamente; ne segue che $A(N)$ è l'unico ideale di N.

Valga la (a_2). Per il Teorema 1 di [**2**]$_1$, N^2 è contenuto in ogni ideale di N. Visto che N^2 è anche massimale, esso è l'unico ideale di N.

Valga la (c_2). Per le ipotesi $A(N)$ è un ideale massimale di N (perchè $N/A(N)$ è uno zero-anello di ordine primo) ed è semplice. Sia J un ideale di N diverso da $A(N)$, allora $A(N) \cap J = \{0\}$.

Ora si ha $N = A(N) \dotplus J$ (perchè $A(N)$ è massimale) e pertanto

$N^2 = JN \subseteq J$; visto che anche $N^2 \subseteq A(N)$, riesce $N^2 \subseteq J \cap A(N) = \{0\}$; questo è assurdo, e dunque $A(N)$ è l'unico ideale di N.

Valga la (c_3). Sia J un ideale di N distinto da $A(N)$; come sopra, $A(N) \cap J = \{0\}$, poichè $A(N)$ è massimale; allora $N = J \dot{+} A(N)$ e pertanto $N^2 \subseteq J$. D'altra parte J è un anello semplice non zero-anello (perchè isomorfo ad $N/A(N)$) e pertanto $J^2 = J$. Ne segue $J = J^2 \subseteq N^2 \subseteq J$ onde $N^2 = J$, e questo è assurdo perchè ora N^2 non è ideale di N, ancora $A(N)$ risulta l'unico ideale di N.

Corollario 1. *Sia N uno stem distributivo soddisfacente alla* (c_3) *del Teorema* 4; *se $N/A(N)$ ha unità, allora $N = A(N) + N^2$.*

Sia $[e]$ l'unità di $N/A(N)$; si ha, per $x \in N$, $x = ex + a$ ed in particolare $e^2 = e + \bar{a}$ (per opportuni $a, \bar{a} \in A(N)$).

Inoltre $eN \cap A(N) = \{0\}$: sia $z \in eN \cap A(N)$, allora $z = ey$ con $e \cdot ey = e^2y = 0$ (perchè $z \in A(N)$), ma $0 = e^2y = (e + \bar{a})y = ey = z$. Dunque $N = eN + A(N)$. Infine $eN = N^2$ perchè $N^2 \subseteq eN$ come si vede subito sfruttando la decomposizione iniziale.

Bibliografia

[1] C. Ferrero Cotti, *Sugli stems in cui la corrispondenza $xy \to yx$ è una funzione*, Atti Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (2) **44** (1977), 265-277.

[2] C. Ferrero Cotti e S. Manara Pellegrini: $[\bullet]_1$ *Sugli anelli i cui quozienti propri sono nilpotenti*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 754-760; $[\bullet]_2$ *Su anelli critici e cocritici*, Matematiche **31** (1976), 147-155.

[3] C. Ferrero Cotti e G. B. Rizza, *Anelli anticommutativi*, Atti Acc. Sci. Torino **107** (1972-73), 639-652.

[4] P. Maroscia, *Sugli anelli commutativi unitari in cui ogni ideale proprio è primo*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **55** (1973).

[5] F. J. Perticani, *Commutative rings in which every proper ideal is maximal*, Fund. Math. **71** (1971), 193-197.

[6] G. Pilz, *Near Rings*, North Holland, Linz 1977.

[7] J. Reineke, *Commutative rings in which every proper ideal is maximal*, Fund. Math. **97** (1977), 229-231.

[8] E. Schenkman, *Group Theory*, Van Nostrand, Princeton 1965.

Summary

The near-rings whose proper ideals are maximal are studied: they have in the non degenerate cases at most two proper ideals. Other particular near-rings with one or two ideals are studied.

* * *