Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 55-63

OSVALDO FERRI (*)

Le calotte a due caratteri rispetto ai piani in uno spazio di Galois $S_{3,q}$ (**)

1 – In uno spazio di Galois $S_{3,q}$ un k-insieme K dicesi a due caratteri rispetto ai piani e precisamente di tipo $(m, n)_2$ con $m < n$, se ogni piano interseca K o in m o in n punti (cfr. [**3**]$_{1,2}$). Esistono, come è noto, svariati esempi di k-insiemi siffatti (per particolari valori di m ed n) come le forme hermitiane e le quadriche non singolari. Altri esempi sono dati da A. Bichara in [**1**].

In questo lavoro ci proponiamo di esaminare se esistono delle *calotte* in $S_{3,q}$ che siano a due caratteri rispetto ai piani. Esempi siffatti sono gli ovaloidi di $S_{3,q}$, e quindi, se q è dispari, le quadriche ellittiche, ed in $S_{3,2}$ il sottoinsieme ottenuto togliendo un piano all'$S_{3,2}$. Faremo vedere che questi sono gli unici casi possibili, proveremo cioè che

(I) *in $S_{3,q}$ una calotta K, a due caratteri rispetto ai piani, con $|K|\geqslant 2$, è necessariamente un ovaloide, e quindi, se q è dispari, una quadrica ellittica oppure è $q=2$ e $K = S_{3,2}-\alpha$, ove α è un piano di $S_{3,2}$.*

2 – Sia K una k-calotta di $S_{3,q}$ (cioè un k-insieme tale che tre suoi punti non stiano mai su una retta) di tipo $(m, n)_2$, con $k\geqslant 2$. Denoteremo con t_m e t_n il numero dei piani di $S_{3,q}$ rispettivamente m-secanti e n-secanti K (numeri che diconsi *caratteri* di K, cfr. [**3**]$_{1,2}$).

Si noti che un piano interseca la k-calotta in un h-arco e quindi, essendo $h\leqslant q+2$, sarà $n\leqslant q+2$. Risulta poi $k > n$ in quanto K non può essere, evidentemente, contenuto in un piano.

(*) Indirizzo: Viale Lombardia 35, 67100 L'Aquila, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 11-VII-1978.

Per i caratteri t_m e t_n di K valgono le relazioni (cfr. [**3**]$_2$, n. 1 (17) e (18))

$$t_m + t_n = \theta_3 , \qquad m t_m + n t_n = k\theta_2 ,$$

$$m(m-1)\,t_m + n(n-1)\,t_n = k(k-1)\,\theta_1 , \tag{2.1}$$

$$m(m-1)(m-2)\,t_m + n(n-1)(n-2)\,t_n = k(k-1)(k-2) ,$$

essendo $\theta_i = q^i + q^{i-1} + \ldots + q + 1$.

Dalle prime due equazioni di (2.1) si ricava

$$t_m = \frac{\theta_3 n - \theta_2 k}{n-m} , \qquad t_n = \frac{\theta_2 k - \theta_3 m}{n-m} \tag{2.2}$$

e sostituendo nella terza si ha

$$\theta_1 k^2 - [\theta_1 + (m+n-1)\theta_2]k + mn\theta_3 = 0 . \tag{2.3}$$

Supponiamo dapprima, in questo numero, $q = 2$. La (2.3) diventa

$$3k^2 - [7(m+n) - 4]k + 15m\cdot n = 0 , \tag{2.4}$$

in cui, essendo $n \leqslant q + 2 = 4$, si ha

$$0 \leqslant m < n \leqslant 4 . \tag{2.5}$$

Si verifica subito, dando ad m ed n i possibili valori compatibili con la (2.5) che quelli che portano a soluzioni accettabili della (2.4) sono

$$m = 0,\ n = 4 \Rightarrow k = 8 , \qquad m = 1,\ n = 3 \Rightarrow k = 5 , \qquad m = 2,\ n = 4 \Rightarrow k = 6 .$$

Nel prima caso, preso un piano α esterno alla k-calotta (certamente esistente essenso $m = 0$), esso contiene $q^2 + q + 1 = 7$ punti ed ogni piano diverso da α interseca K in $n = 4 = q^2$ punti. La k-calotta è allora costituita da $S_{3,2} - \alpha$. Nel secondo caso K è una 5-calotta, cioè una (q^2+1)-calotta di $S_{3,2}$, ossia un ovoloide. Nell'ultimo caso K dovrebbe essere una 6-calotta di tipo $(2, 4)_2$; mostriamo che essa non può esistere. Sia infatti β un piano 4-secante K. Gli altri due punti di K, che non stanno su β, si trovano su una retta r che interseca β in un punto T non appartenente al 4-arco $\beta \cap K$. Delle tre rette di β per T, due sono 2-secanti $\beta \cap T$ ed una è esterna, sia essa s. Dei tre piani per s uno è β (4-secante K), un altro è il piano congiungente r ed s che è 2-secante K e il rimanente piano è esterno a K e ciò è assurdo, essendo K a due caratteri rispetto ai piani.

Si è così provato che, *se* $q = 2$, *i soli casi possibili sono i complementari dei piani e gli ovaloidi di* $S_{3,2}$, cioè l'asserto della proposizione (I) per $q = 2$. Nel seguito supporremo perciò $q > 2$.

3 – In $S_{3,q}$, con $q > 2$, una k-calotta K di tipo $(m, n)_2$ è tale che per essa è $m > 0$. Infatti se fosse $m = 0$, in forza della prop. XIV di [**3**]$_2$, K sarebbe costituita necessariamente da un punto e ciò è escluso perchè $k \geqslant 2$ o dal complementare di un iperpiano e ciò è escluso, essendo $q > 2$, perchè K è una calotta.

Supponiamo allora $m = 1$. Se A e B sono due punti di K, ogni piano per la retta AB interseca K in un n-arco e quindi risulta $(n - 2)(q + 1) + 2 = k$. Sostituendo tale valore di k ed $m = 1$ nella (2.3) si ottiene

$$(q + 1)n^2 - (q^2 + 6q + 3)n + 2(q + 1)(1 + 2q) = 0\ ,$$

che ha per soluzioni $n = q + 1$ e quindi $k = q^2 + 1$, cioè K è un ovaloide, ed $n = 4 - 2/(q + 1)$ che non è accettabile in quanto non è intera, *onde l'asserto* della prop. (I) per $m = 1$.

Per provare completamente l'asserto occorre dunque mostrare che, *per* $m \geqslant 2$ *non esistono calotte di tipo* $(m, n)_2$ e ciò che faremo nei numeri **4** e **5**.

4 – Sia K una k-calotta di tipo $(m, n)_2$ di $S_{3,q}$ $(q > 2)$ con $m \geqslant 2$, onde è

$$2 \leqslant m < n \leqslant q + 2\ , \tag{4.1}$$

ed inoltre (cfr. [**2**] n. 21)

$$k < q^2 + 1\ . \tag{4.2}$$

Osserviamo che non può essere $n - m = 1$, in quanto sostituendo $n = m + 1$ nella (2.3) si ha l'equazione in k

$$\theta_1 k^2 - (\theta_1 + 2\theta_2 m)k + m(m + 1)\theta_3 = 0\ ,$$

il cui discriminante è

$$\Delta = 4q^2m^2 - 4q^3(q + 1)m + (q + 1)^2\ ,$$

che, come subito si prova, è minore di zero per ogni m verificante la (4.1) e qualsiasi sia q; sarà dunque

$$n - m \geqslant 2 . \tag{4.3}$$

Dalla (2.3) e dalla quarta delle (2.1), in cui si tenga conto delle (2.2), si ha

$$k = \frac{\theta_3 mn[2q + 3 - (m + n)]}{-\theta_2(m + n)^2 + \theta_2(q + 3)(m + n) + \theta_1^2 mn - \theta_2(q + 2)} , \tag{4.4}$$

in cui m, n verificano la (4.1). Poichè il numeratore della (4.4) è positivo (cfr. (4.1)), deve risultare positivo il denominatore cioè

$$mn > \theta_2[(m + n)^2 - (q + 3)(m + n) + q + 2]/\theta_1^2 .$$

Se fosse $n = q + 2$, dalla precedente relazione si avrebbe

$$q + 2 > (m + q + 1)\theta_2/\theta_1^2 ,$$

cioè $m < 2 + (q - 1)/(q^2 + q + 1)$ ovvero $m \leqslant 2$ da cui per la (4.1) $m = 2$. Ma sostituendo nella (4.4) $m = 2$, $n = q + 2$ si ha $k = \theta_3(q + 2)$ e ciò è escluso per la (4.2). Quindi è $n \leqslant q + 1$, onde per la (4.1),

$$2 \leqslant m < n \leqslant q + 1 \tag{4.5}$$

e, per la (4.3), si ha

$$m \leqslant q - 1 . \tag{4.6}$$

Proiettiamo la k-calotta da un suo punto S sopra un piano π non passante per S. La proiezione K' *è un* $(k - 1)$*-insieme di* π *di tipo* $(m - 1, n - 1)_1$ rispetto alle rette. Infatti ogni retta r di π, congiunta con S, dà origine ad un piano che interseca K in $m - 1$ ovvero $n - 1$ punti diversi da S, onde r ha con K' in comune $m - 1$ ovvero $n - 1$ punti; inoltre esistono di fatto sia $(m - 1)$-secanti che $(n - 1)$-secanti K' altrimenti K' sarebbe ad un solo carattere diverso da zero e quindi, in forza della prop. I di **[3]**$_2$, dovrebbe essere $K' = \emptyset$ e ciò è escluso (essendo $k \geqslant 2$) oppure $K' = \pi$ ma allora $n - 1 = q + 1$ e ciò è escluso per la (4.5). Sempre per la (4.5) è $n - 1 \leqslant q$. Mostriamo che non può essere $n - 1 = q$. Se così fosse K' sarebbe di tipo $(m - 1, q)_1$ con $m - 1 \geqslant 1$ (cfr. (4.1)) e, in forza della prop. VIII di **[4]** (pag. 1022), K' dovrebbe essere il complementare di un arco hermitiano di π o il complementare di un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ di π. Quindi deve essere: $m-1=(q+1)-(\sqrt{q}+1)=q-\sqrt{q}$ onde $n=q+1$ ed $m=q-\sqrt{q}+1$ e $k-1=q^2-\sqrt{q}$ ovvero $k-1=q^2+q(1-\sqrt{q})$. Sostituendo allora nella (2.3) $k=q^2-\sqrt{q}+1$, $m=q-\sqrt{q}+1$, $n=q+1$ e posto $\sqrt{q}=s$ si ha: $s^5-s^4-s^3+s^2+s+1=0$ che non ammette soluzioni intere. Sostituendo poi, sempre nella (2.3) $k=q^2+q(1-\sqrt{q})+1$, $m=q-\sqrt{q}+1$, $n=q+1$ e posto $\sqrt{q}=s$, si ha: $s^4-s^3+s-1=0$ che non ammette radici intere accettabili. Si è cosí provato che

$$n\leqslant q\,. \tag{4.7}$$

Due casi sono possibili (cfr. (4.1)) a seconda che sia $m-1\geqslant 2$ ovvero $m-1=1$.

Esaminiamo dapprima il caso $m-1=1$, *cioè* $m=2$. Il $(k-1)$-insieme K' del piano π è allora di tipo $(1, n-1)_1$ con $n-1\leqslant q$ per la (4.7), e quindi, in forza della prop. VIII di [4], si ha che esso è un subpiano di ordine $\sqrt{q}$ di π ovvero un arco hermitiano di π e quindi, in ambedue i casi è $n-1=\sqrt{q}+1$ cioè $n=\sqrt{q}+2$, onde

$$m+n=\sqrt{q}+4\,,\qquad m\cdot n=2(\sqrt{q}+2)\,. \tag{4.8}$$

Nel primo caso è $k-1=q+\sqrt{q}+1$ cioè $k=q+\sqrt{q}+2$. Sostituendo questo valore e le (4.8) nella (2.3) si ha, dopo aver posto $\sqrt{q}=s$: $s^4+s^3-2s^2-s^4+1=0$ che non ammette soluzioni intere accettabili. Nel secondo caso è $k-1=q\sqrt{q}+1$ cioè $k=q\sqrt{q}+2$ e sostituendo sempre nella (2.3) tale valore di k e le (4.8) risulta, posto $\sqrt{q}=s$: $s^3-4s^2+3=0$ che non ammette soluzioni intere accettabili.

Possiamo dunque supporre nel seguito

$$3\leqslant m<n\leqslant q\,. \tag{4.9}$$

5 – Relativamente al $(k-1)$-insieme K' di π di tipo $(m-1, n-1)_1$, soddisfacente la (4.9), deve aversi (cfr. la (33) di [4] n. 7, pag. 1023)

$$(k-1)^2-[1+(m+n-3)\theta_1](k-1)+(m-1)(n-1)\theta_2=0\,. \tag{5.1}$$

Ricavando k^2 da (2.3) e sostituendo in (5.1) si ha

$$k=\theta_1\frac{-mn+q(m+n)-(q-2)}{2q+3-(m+n)}\,. \tag{5.2}$$

Dalla prop. X di [4] si ha che deve essere $(n-1)-(m-1)=n-m=p^l$

con l intero e a priori, tale che $0 \leq l \leq h$; ma non può essere $l = 0$ per la (4.3), nè essere $l = h$ per la (4.9). Dunque è

(5.3) $$n - m = p^l \qquad (1 \leq l \leq h-1) .$$

Dalla (2.3) si ha $(k-m)(k-n) \equiv 0$, mod. q, cioè (mettendo in evidenza i termini contenenti p)

(5.4) $$(k-m)(k-n) = Ap^r q = Ap^{r+h} \qquad (A \text{ intero primo con } p) ,$$

dalla (5.4) si ottiene

(5.5) $$k^2 - (m+n)k + mn = Ap^r q .$$

La (2.3) si può scrivere

(5.6) $$k^2 - (m+n)k + mn - (m+n-1)\frac{q^2}{\theta_1} k + mnq^2 = 0 ;$$

sostituendo la (5.5) nella (5.6) (e dividendo per q^2) si ha

(5.7) $$(m+n-1)k = \theta_1 \left[\frac{Ap^r}{q} + mn\right] .$$

Dalla (5.7), essendo il primo membro intero e q primo con θ_1 e con A, segue

(5.8) $$r \geq h .$$

Dalla (5.4) si deduce

(5.9) $$k = m + \alpha_1 p^{t_1} \qquad \text{e} \qquad k = n + \alpha_2 p^{t_2} ,$$

con α_1 e α_2 interi positivi (perchè $k > n > m$) e primi con p. Inoltre dalla (5.4) e per la (5.8) si ha

(5.10) $$t_1 + t_2 = r + h \geq 2h .$$

Le (5.9) devono sussistere contemporaneamente quindi, confrontandole, e per la (5.3) si ottiene

(5.11) $$\alpha_1 p^{t_1} = p^l + \alpha_2 p^{t_2} .$$

Se $t_1 = 0$ si ha l'assurdo della (5.11) in quanto allora α_1 dovrebbe essere divisibile per p, il che è escluso, a meno che non sia $t_2 = 0$ ma allora dalla (5.10) si avrebbe $0 \geqslant 2h$ che è assurdo. Analogamente è $t_2 \neq 0$.

Se t_1, t_2 ed l sono diversi tra loro, dividendo i due membri della (5.11) per p^s, ove s è il più piccolo tra t_1, t_2, l, e tenendo conto che α_1 e α_2 sono primi con p, si ha l'assurdo.

Se $t_1 = t_2 = l$ ne segue, per la (5.10), che $2l \geqslant 2h$ che è escluso per la (5.3).

Se $t_1 = l \neq t_2$ si ha, dalla (5.11) $(\alpha_1 - 1)p^l = \alpha_2 p^{t_2}$. Se $l > t_2$, dividendo per p^{t_2}, si ha $(\alpha_1 - 1)p^{l-t_2} = \alpha_2$ il che è escluso perchè α_2 è primo con p. Ne segue che è $l < t_2$ e $t_2 = r + h - l$, allora

$$k = n + \alpha_2 p^{r+h-l} . \tag{5.12}$$

Se $t_2 = l \neq t_1$ si ha sempre dalla (5.11) $(\alpha_2 + 1)p^l = \alpha_1 p^{t_1}$, che, per $l > t_1$, è assurda; ne segue $l < t_1$ e $t_1 = r + h - l$ cioè

$$k = m + \alpha_1 p^{r+h-l} . \tag{5.13}$$

Se $t_1 = t_2 \neq l$ si deduce dalla (5.10) $2t_1 = r + h \geqslant 2h$, e quindi $t_1 \geqslant h$, onde $t_1 > l$ e allora, per la (5.11) si ha

$$(\alpha_1 - \alpha_2)p^{t_1 - l} = 1 , \tag{5.14}$$

che è assurda.

I due casi possibili, e quindi da esaminare, sono allora

(I) $k = m + \alpha_1 p^{r+h-l}$ con $\alpha_1 \geqslant 1$ intero e $(\alpha_1, p) = 1$,

(II) $k = n + \alpha_2 p^{r+h-l}$ con $\alpha_2 \geqslant 2$ intero e $(\alpha_2, p) = 1$.

Esaminiamo il caso (I). Tenuto conto della (5.2) si ha

$$m + \alpha_1 p^{r+h-l} = \theta_1 \frac{-mn + q(m+n) - q + 2}{2q + 3 - (m+n)} ,$$

con $\alpha_1 \geqslant 1$ e $r \geqslant h > l$. Dalla precedente relazione si ricava

$$[2q + 3 - (m+n)]\alpha_1 p^{r-l} = \frac{(q+1)[-mn+q(m+n) - q+2] - m[2q+3-(m+n)]}{q}$$

cioè

$$[2q+3-(m+n)]\,\alpha_1\,p^{r-t}=(q+1)(m+n-1)-nm-2m+2+\frac{m^2-3m+2}{q}.$$

Deve essere quindi, essendo $m \geqslant 3$ per la (4.9),

$$\frac{(m-1)(m-2)}{q}=I \quad (I \text{ intero positivo}). \tag{5.15}$$

La (5.15) si può scrivere

$$\frac{(m-1)(m-2)}{p}=Ip^{h-1}=\mathscr{I} \quad (\mathscr{I} \text{ intero positivo}),$$

cioè

$$\frac{(m-1)(m-2)}{p}=\mathscr{I}, \tag{5.16}$$

ossia p divide $m-1$ ovvero $m-2$. Se p divide $m-1$ allora, evidentemente, è primo con $m-2$ e quindi, dalla (5.15) si ha che $q=p^h$, che è primo con $m-2$, divide $m-1$, cioè $m-1=\beta_1 q$ con β_1 intero positivo ossia $m=\beta_1 q+1$ e ciò è escluso dalla (4.9). Se p divide $m-2$, allora è primo con $m-1$ e quindi dalla (5.15) segue che q deve dividere $m-2$, cioè $m-2=\beta_2 q$, con β_2 intero positivo, ovvero $m=\beta_2 q+2$ e ciò è escluso dalla (4.9).

Se nel ragionamento del capoverso precedente sostituiamo m con n e α_1 con α_2 si ha la discussione del caso (II). Quindi anche in questo caso si giunge all'assurdo. Rimane così provato completamente l'asserto della proposizione (I).

L'Autore ringrazia il prof. G. Tallini per i preziosi consigli e suggerimenti che gli ha fornito nello svolgere le ricerche oggetto del presente lavoro.

Bibliografia

[1] A. Bichara, *Sui k-insiemi di $S_{3,q}$ di tipo $((n-1)q+1, nq+1)_2$*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **62** (1977), 480-488.

[2] B. Segre, *Introduction to Galois geometries*, Atti Acc. Naz. Lincei Mem. (8) **8** (1967).

[3] G. TALLINI: [•]$_1$ *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Rel. n. 30, Istituto di Matematica, Università di Napoli 1974; [•]$_2$ *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Convegno Internazionale Geometrie Combinatorie (settembre 1973), Atti Acc. Naz. Lincei.

[4] M. TALLINI SCAFATI, *$\{k, n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli a due caratteri*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **15** (1966), nota I, 812-818, nota II, 1020-1025.

Summary

We prove that a cap K of $S_{3,q}$, intersected by every plane in m or n points, is necessarily an ovaloid, that is, if q is odd, an elliptic quadric, or it is $q = 2$ and K is the complementary of a plane of $S_{3,q}$.

* * *