Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 25-32

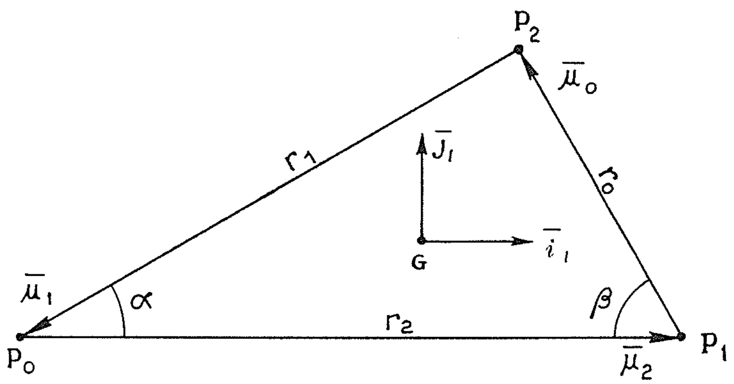
F. R. MARSICANO (*)

Aspectos cualitativos del problema de tres cuerpos (**)

1 - Coordenadas y ecuaciones del movimiento del sistema para el caso $\dot{r}_i = 0$

Sean P_0; P_1; P_2 los tres cuerpos de masas respectivamente m_0, m_1, m_2; $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ los vectores posición relativos de un punto con respecto a otro

(1) $$\bar{u}_i = P_{i+2} - P_{i+1} .$$



G el centro de masas; $\bar{i}_1$ un versor de referencia con origen en G y paralelo a $\bar{u}_2$; $\bar{j}_1$ el versor normal a $\bar{i}_1$, situado en el plano de los tres cuerpos; $\bar{k}_1 = \bar{i}_1 \wedge \bar{j}_1$. La terna $G\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ es por supuesto una terna no inercial y no principal de inercia.

(*) Indirizzo: Riego Nuñez 747 Turdera 1834, Rep. Argentina.

(**) Del Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Técnicas de la Republica Argentina. — Ricevuto: 25-IV-1978.

Si introducimos los parámetros de Lagrange [**2**]

$$p_i = -\bar{u}_{i+1} \cdot \bar{u}_{i+2} = \tfrac{1}{2}(r_{i+1}^2 + r_{i+2}^2 - r_i^2) . \tag{2}$$

llamamos M a la masa total $M = m_0 + m_1 + m_2$ y tenemos en cuenta la relación

$$(r_i r_{i+1})^2 - p_{i+2}^2 = \sum p_i p_{i+1} , \tag{3}$$

se pueden calcular fácilmente los momentos de inercia y centrífugos del sistema con respecto a la terna $G\bar{i}_1 \bar{j}_1 \bar{k}_1$

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{m_2(m_0 + m_1)}{M r_2^2} \sum_0^2 p_i p_{i+1} , \\
J_{22} &= \frac{m_2(m_0 + m_1)}{M} \frac{p_0^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2 m_1(m_0 + m_2)}{M} - \frac{2 m_1 m_2}{M} p_0 , \\
J_{33} &= \frac{\sum_0^2 r_1^2 m_{i+1} m_{i+2}}{M} , \qquad J_{13} = J_{23} = 0 , \\
J_{12} &= J_{21} = \frac{m_2}{r_2^2 M} [m_1 r_2^2 + p_0(m_2 - M)] \sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} .
\end{aligned} \tag{4}$$

Designando con $\mathscr{U}$ a la función potencial

$$\mathscr{U} = \sum_0^2 \frac{m_{i+1} m_{i+2}}{r_i} , \tag{5}$$

la integral de las fuerzas vivas puede expresarse como sigue Agostinelli [**1**]

$$\sum_0^2 \frac{\dot{\bar{u}}_i^2}{m_i} = \frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - C_1 \qquad (C_1 = \text{costante}) , \tag{6}$$

o bien introduciendo las funciones γ_i de Lagrange

$$\gamma_i = \tfrac{1}{2} [\dot{\bar{u}}_{i+1}^2 + \dot{\bar{u}}_{i+2}^2 - \dot{\bar{u}}_i^2] , \tag{7}$$

y desarrollando

$$\gamma_0 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \gamma_1 \frac{m_0 + m_2}{m_0 m_2} + \gamma_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} = \frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - C_1 . \tag{8}$$

Por otra parte las funciones auxiliares de Lagrange [2], [1] π_i y ψ_i para el caso. $\dot{r}_i = 0$ se expresan así

$$\pi_i = r_i^2 \dot{\overline{u}}_i^2 = r_i^2(\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2}) \,,$$
(9)
$$\psi_i = p_i \gamma_i + \frac{\varrho^2}{4} \,,$$

donde ϱ es otra función auxiliar de Lagrange dada por

$$\varrho = \overline{u}_0 \dot{\overline{u}}_1 - \overline{u}_1 \dot{\overline{u}}_0 = \overline{u}_1 \dot{\overline{u}}_2 - \overline{u}_2 \dot{\overline{u}}_1 = \overline{u}_2 \dot{\overline{u}}_0 - \overline{u}_0 \dot{\overline{u}}_2 \,.$$

Con las (9) y (10) es fácil desarrollar la ecuación (P) de Lagrange

$$\sum_0^2 \frac{\pi_i}{m_i^2} + 2 \sum_0^2 \frac{\psi_i}{m_{i+1} m_{i+2}} = C_2^2 \qquad (C_2 = \text{constante}) \,, \tag{10}$$

en función de las γ_i

$$\frac{\gamma_0}{m_1^2 m_2^2} [r_1^2 m_2^2 + r_2^2 m_1^2 + 2p_0 m_1 m_2] + \frac{\gamma_1}{m_0^2 m_2^2} [r_0^2 m_2^2 + r_2^2 m_0^2 \tag{11}$$
$$+ 2p_1 m_0 m_2] + \frac{\gamma_2}{m_0^2 m_1^2} [r_0^2 m_1^2 + r_1^2 m_0^2 + 2p_2 m_1 m_0] = C_2^2 - \frac{M\varrho^2}{m_0 m_1 m_2} \,.$$

La función auxiliar ϱ de Lagrange debe cumplir con la ecuación (N) de Lagrange, que en el caso aquí tratado es decir con la condición $\dot{r}_i = 0$ se simplifica y toma la siguiente forma [4]

$$\varrho^4 - 4\varrho^2 \sum_0^2 r_i^2 \gamma_i + 16 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \gamma_i \gamma_{i+1} = 0 \,.$$

Las dos ecuaciones (8) (11) lineales en las γ_i y la ecuación (N) cuadrática en γ_i permiten hallar las γ_i en función de las r_i de las constantes C_1 de las fuerzas y C_2 del momento cinético y de la función auxiliar ϱ

$$\gamma_0 = \gamma_0(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \varrho^2) \,, \qquad \gamma_1 = \gamma_1(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \varrho^2) \,, \qquad \gamma_2 = \gamma_2(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \varrho^2). \tag{12}$$

Pero en el caso que estamos tratando ($\dot{r}_i = 0$) los tres cuerpos se mueven en ese instante como un sólido rígido que rota alrededor de G con velocidad angular $\bar{\Omega}$ dada por [4]

$$\bar{\Omega} = \omega_1 \bar{i}_1 + \omega_2 \bar{j}_1 + \omega_3 \bar{k}_1 , \tag{13}$$

y ϱ^2 en ese instante en el cual las $\dot{r}_i = 0$ vale [4]

$$\varrho^2 = 4\omega_3^2 \sum_0^2 p_i p_{i+1} , \tag{14}$$

por lo tanto las γ_i pueden ser puestas en función de ω_3 en lugar de ϱ

$$\gamma_0 = \gamma_0(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \omega_3^2) , \quad \gamma_1 = \gamma_1(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \omega_3^2) , \quad \gamma_2 = \gamma_2(r_i;\, C_1;\, C_2^2;\, \omega_3^2) . \tag{15}$$

Ademas los $\dot{\bar{u}}_i^2$ (en el caso $\dot{r}_i = 0$) están dadas por la fórmula de Poisson $\dot{\bar{u}}_i^2 = (\bar{\Omega} \wedge \bar{u}_i)^2$ que puede desarrollarse según la identidad de Lagrange

$$(\bar{\Omega} \wedge \bar{u}_i)^2 = \omega^2 r_i^2 - (\bar{\Omega} \cdot \bar{u}_i)^2, \qquad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 , \tag{16}$$

los productos escalares $\bar{\Omega} \cdot \bar{u}_i$ se calculan fácilmente como sigue

$$\begin{aligned} &\bar{u}_0 = - r_0 \cos \beta \bar{i}_1 + r_0 \operatorname{sen} \beta \bar{j}_1 , \\ &\bar{u}_1 = - r_1 \cos \alpha \bar{i}_1 - r_1 \operatorname{sen} \alpha \bar{j}_1 , \qquad \bar{u}_2 = r_2 \bar{i}_1 , \end{aligned} \tag{17}$$

de donde

$$\begin{aligned} &\bar{\Omega} \cdot \bar{u}_0 = r_0(\omega_2 \operatorname{sen} \beta - \omega_1 \cos \beta) , \\ &\bar{\Omega} \cdot \bar{u}_1 = - r_1(\omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \operatorname{sen} \alpha) , \qquad \bar{\Omega} \cdot \bar{u}_2 = \omega_1 r_2 . \end{aligned} \tag{18}$$

A su vez es fácil ver que

$$\cos \beta = \frac{p_1}{r_0 r_2} , \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}}{r_1 r_2} , \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}}{r_0 r_2} , \quad \cos \alpha = \frac{p_0}{r_1 r_2} . \tag{19}$$

Con las (7) (16) (18) y (19) se pueden expresar las γ_i en función de las r_i

y de las ω_i

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \omega^2 p_0 + \frac{\omega_1^2}{2r_2^2}(p_1^2 - p_0^2 - r_2^4) - \omega_1\omega_2 \sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} \\
(20) \qquad \gamma_1 &= \omega^2 p_1 + \frac{\omega_1^2}{2r_2^2}(p_0^2 - p_1^2 - r_2^4) + \omega_1\omega_2 \sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} \\
\gamma_2 &= \omega^2 p_2 - \frac{\omega_1^2}{2r_2^2}(p_1^2 - p_0^2 - r_2^4) - \frac{\omega_2^2}{r_2^2}\sum_0^2 p_i p_{i+1} \\
&\qquad + \frac{\omega_1\omega_2(p_1 - p_0)}{r_2^2}\sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Reemplazando las (20) en los primeros miembros de las (15) y resolviendo por ω_i, se obtiene

$$(21) \qquad \omega_1 = \omega_1(r_i;\, C_1;\, C_2^2)\,, \qquad \omega_2 = \omega_2(r_i;\, C_1;\, C_2^2)\,, \qquad \omega_3 = \omega_3(r_i;\, C_1;\, C_2^2)\,,$$

es decir se obtienen las velocidades angulares ω_i en función de las distancias mutuas y las constantes C_1 y C_2^2.

2 - Las superficies de velocidad nula en el caso plano

Si el movimiento de los tres cuerpos se desarrolla en un plano, entonces la única velocidad angular no nula es la ω_3 mientras que $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = 0$; así también $\bar{\Omega}\cdot\bar{u}_i = 0$ luego de las (20) se obtiene

$$(22) \qquad \gamma_0 = \omega_3^2 p_0\,, \qquad \gamma_1 = \omega_3^2 p_1\,, \qquad \gamma_2 = \omega_3^2 p_2\,,$$

y de las (2) y (7)

$$(23) \qquad \dot{\bar{u}}_0^2 = \omega_3^2 r_0^2\,, \qquad \dot{\bar{u}}_1^2 = \omega_3^2 r_1^2\,, \qquad \dot{\bar{u}}_2 = \omega_3^2 r_2^2\,.$$

Asimismo de las (9) y (10)

$$(24) \qquad \pi_i = r_i^4 \omega_3^2\,,$$

$$(25) \qquad \psi_i = \omega_3^2(p_i^2 + \sum p_i p_{i+1})\,,$$

con lo que la ecuación (8) se expresa como

$$\omega_3^2 \sum_0^2 \frac{r_i^2}{m_i} = \frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - C_1 , \tag{26}$$

y la ecuación (P) como

$$\omega_3^2 [\sum_0^2 \frac{r_i^4}{m_i^2} + 2 \sum_0^2 \frac{p_i^2}{m_{i+1} m_{i+2}} + 2 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \frac{1}{m_i \, m_{i+1}}] = C_2^2. \tag{27}$$

Esta última expresión, en base a las (2) se simplifica como sigue

$$\omega_3^2 (\sum_0^2 \frac{r_i^2}{m_i})^2 = C_2^2 . \tag{28}$$

La eliminación de ω_3^2 entre la (26) y la (28) conduce a la ecuación de las *superficies de velocidad nula* para el caso plano

$$(\frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - C_1) \sum_0^2 \frac{r_i^2}{m_i} = C_2^2 , \tag{29}$$

que coincide con la hallada anteriormente por otro procedimiento [**3**] salvo un cambio inesencial en la constante C_2. Otra referencia sobre la ecuación (29) puede verse en [**5**].

3 - Las superficies de velocidad nula en el caso isósceles a eje de simetría

Si ocurre que $m_0 = m_1 = m$ y continuamente $r_0 = r_1 = r$ y los tres cuerpos giran alrededor del eje fijo $\bar{j}_1$ se obtienen las soluciones isósceles a eje de simetría; las superficies de velocidad nula en este caso se obtienen haciendo $\omega_1 = \omega_3 = 0$ en las ecuaciónes (20) con lo que se deduce

$$\gamma_0 = \omega_2^2 p_0 , \qquad \gamma_1 = \omega_2^2 p_1 , \qquad \gamma_2 = \omega_2^2 (p_2 - \frac{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}{r_2^2}) . \tag{30}$$

Además

$$p_0 = \frac{r_2^2}{2} , \qquad p_1 = p_0 , \qquad p_2 = r^2 - p_0 . \tag{31}$$

Con lo que la (8) queda expresada como

$$\omega_2^2 \left[\frac{2r^2}{m} + \frac{r_2^2}{m_2} - \frac{2\sum_0^2 p_i p_{i+1}}{r_2^2 m}\right] = \frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - C_1 . \tag{32}$$

Por otra parte ya habíamos demostrado [4] que, en este caso,

$$\varrho = 0 , \qquad \psi_i = p_i \gamma_i , \tag{33}$$

$$\pi_i = r^2 \overline{u}_0^2 , \tag{34}$$

$$\dot{\overline{u}}_0^2 = \omega_2^2 \left[r^2 - \frac{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}{r_2^2}\right] , \qquad \dot{\overline{u}}_1^2 = \dot{\overline{u}}_0^2 , \qquad \dot{\overline{u}}_2^2 = \omega_2^2 r_2^2 . \tag{35}$$

de manera que la ecuación (P) ahora queda expresada así

$$\frac{r_2^4 \omega_2^2 M^2}{4m^2 m_2^2} = C_2^2 , \tag{36}$$

la eliminación de ω_2^2 entre la (32) y la (36) conduce a la ecuación de las *superficies de velocidad nula* para el caso isósceles

$$\frac{2}{mr} + \frac{1}{m_2 r_2} - \frac{C_1}{2M} - \frac{C_2^2 m m_2}{r_2^2 M^2} = 0 , \tag{37}$$

que coincide con la hallada en [**3**]$_1$ y [**3**]$_2$ por otros procedimientos salvo un cambio inesencial en la constante C_2.

Bibliografia

[1] C. Agostinelli, *Sul problema dei tre corpi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **21** (1950), 165-195.

[2] J. L. Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps*, Oeuvres 6.

[3] F. R. Marsicano: [•]$_1$ *Curvas de velocidad nula correspondientes a las soluciones triangulares isosceles del problema de tres cuerpos*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 75-82; [•]$_2$ *Sobre las superficies de velocidad nula correspondientes al problema de tres cuerpos*, An. Soc. C. Argentina **188** (1969), 117-126.

[4] F. R. Marsicano y A. Peretti, *Sobre la ecuacion N de Lagrange*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **1** (1975), 67-78.

[5] N. Patetta, *Possible configuration in the planar three bodies problem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (21) **10** (1976).

Resumen

A partir del sistema de ecuaciones de Lagrange para el problema de tres cuerpos, se analiza el caso en que las distancias mutuas r_i $(i = 0, 1, 2)$ *entre los tres cuerpos tienen derivada primera temporal simultáneamente nulas, sin ser necesariamente* $\ddot{r}_i = 0$; *comparamos luego algunos resultados perticulares con los obtenidos en trabajos previos con otros métodos.*

* * *