Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 861-868

DARIO GRAFFI (*)

Sul teorema di unicità per il campo elettromagnetico sinusoidale in un dominio illimitato (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. – Mi sono occupato, a varie riprese, di teoremi di unicità per le equazioni della fisica-matematica. Ma, in generale, ho considerato equazioni di evoluzione, cioè equazioni in cui compare esplicitamente il tempo, riconducendomi (il che non è sempre immediato) al lemma di Gronwall.

In questa nota, intendo invece prendere in esame equazioni in cui non interviene esplicitamente il tempo.

Precisamente considererò, in un dominio $\mathscr{D}$ dello spazio ordinario, un campo elettromagnetico sinusoidale di pulsazione ω il quale dovrà soddisfare, per ogni punto $\boldsymbol{x}$ di $\mathscr{D}$, alle equazioni di Maxwell adattate al campo sinusoidale (cfr. p. es. [3] cap. IV, § 4, [1] cap. I, § 7), cioè

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} + \gamma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\, i\omega\mu \boldsymbol{H}\,, \tag{1.2}$$

dove i è l'unità immaginaria, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$ sono i vettori complessi, funzioni solo di $\boldsymbol{x}$, che rappresentano, rispettivamente, il campo elettrico, il campo magnetico e la corrente impressa (sorgente del campo elettromagnetico); notiamo che in [3] si introduce anche una corrente magnetica $\boldsymbol{M}$ che però qui si suppone, per semplicità, nulla e inoltre vi è g in luogo di γ; ε, μ, γ sono poi rispet-

(*) Indirizzo: Via A. Murri 9, 40137 Bologna, Italy.
(**) Ricevuto: 30-VIII-1979.

tivamente la costante dielettrica, la permeabilità magnetica e la conduttività in un punto generico $\boldsymbol{x}$ di $\mathscr{D}$.

Poichè il mezzo in $\mathscr{D}$ verrà supposto isotropo, ma non omogeneo, ε, μ e γ saranno grandezze scalari funzioni di $\boldsymbol{x}$, cioè si scriverà

$$\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{x})\,, \qquad \mu = \mu(\boldsymbol{x})\,, \qquad \gamma = \gamma(\boldsymbol{x})\,. \tag{1.3}$$

Ovviamente nelle (1.1), (1.2), valide, come si è detto, in ogni punto $\boldsymbol{x}$ di $\mathscr{D}$, si dovrebbe, a rigore, scrivere in luogo di $\boldsymbol{E}$, ε ecc., $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, $\varepsilon(\boldsymbol{x})$ ecc., però ho preferito le notazioni usuali per la loro semplicità e perchè non danno luogo a equivoco.

È bene prima di proseguire ricordare che, un vettore complesso (ci riferiremo a $\boldsymbol{E}$, ma le stesse considerazioni valgono per $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{J}$) è un vettore della forma ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ sono vettori ordinari, cioè reali)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + i\boldsymbol{E}_2\,. \tag{1.4}$$

Precisamente il campo elettrico rappresentato da $\boldsymbol{E}$ (che indicheremo con $\boldsymbol{E}_r$) ha all'istante t il valore (Re indica la parte reale)

$$\boldsymbol{E}_r = \mathrm{Re}\,\big(\exp\,(i\omega t)\,\boldsymbol{E}\big) = \cos\omega t\,\boldsymbol{E}_1 - \mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{E}_2\,. \tag{1.5}$$

È noto poi che il vettore coniugato $\boldsymbol{E}^*$ di $\boldsymbol{E}$ ha l'espressione

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_1 - i\boldsymbol{E}_2\,. \tag{1.6}$$

Per i vettori complessi si può definire, come per i vettori ordinari, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, in modo perfettamente analogo al prodotto fra due numeri complessi.

In particolare si chiama modulo del vettore $\boldsymbol{E}$ (e che indicheremo con E o anche con $|\boldsymbol{E}|$) l'espressione

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}\,. \tag{1.7}$$

In particolare

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}^*|\,. \tag{1.7$'$}$$

Altre proprietà, del resto ben ovvie, sui vettori complessi verranno richiamate in appendice.

Ora se il dominio $\mathscr{D}$ è limitato e se si suppone $\gamma(\boldsymbol{x}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{x}$ di $\mathscr{D}$, è facile dimostrare il seguente teorema di unicità.

Le (1.1) e (1.2) ammettono, al più, una sola soluzione $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ *di classe* C^1 *in* $\mathscr{D}$, *di classe* C *in* $\overline{\mathscr{D}}$, *qualora in* $\mathscr{D}$ *sia assegnato la* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ *e sulla frontiera* σ *di* $\mathscr{D}$ *sia assegnata la componente tangenziale* $\boldsymbol{E}_t$ (1) *di* $\boldsymbol{E}$ *o l'analoga componente* $\boldsymbol{H}_t$ *di* $\boldsymbol{H}$.

Però se $\mathscr{D}$ è illimitato, per esempio esterno a una o più superfici chiuse σ (quindi σ frontiera di $\mathscr{D}$), il teorema di unicità, or ora enunciato, vale ancora aggiungendo però condizioni all'infinito (in particolare la ben nota condizione di radiazione di Sommerfeld), certamente plausibili dal punto di vista fisico, ma che, almeno dal punto di vista matematico, è opportuno attenuare.

Più precisamente, dimostreremo la validità del teorema di unicità in discorso anche in un dominio illimitato qualora (come nel caso $\mathscr{D}$ limitato) siano assegnati $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$ ed $\boldsymbol{E}_t$ o $\boldsymbol{H}_t$ su σ; inoltre $\varepsilon(\boldsymbol{x})$, $\mu(\boldsymbol{x})$, $\gamma(\boldsymbol{x})$ vengano supposte funzioni positive continue di $\boldsymbol{x}$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$ (o al più con un numero finito di superfici di discontinuità) limitate superiormente e inferiormente, cioè sia, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$,

$$\varepsilon_M \geqslant \varepsilon(\boldsymbol{x}) \geqslant \varepsilon_m > 0 \,, \tag{1.8}$$

$$\mu_M \geqslant \mu(\boldsymbol{x}) \geqslant \mu_m > 0 \,, \tag{1.9}$$

$$\gamma_M \geqslant \gamma(\boldsymbol{x}) \geqslant \gamma_m > 0 \,, \tag{1.10}$$

dove ε_m, μ_m, γ_m sono (come ovviamente ε_M, μ_M, γ_M) numeri positivi.

Notiamo che (1.8) e (1.9) sono certamente soddisfatte dal punto di vista fisico; più restrittiva è la (1.10) perchè può essere $\gamma_m = 0$. È bene perciò notare che il teorema di unicità vale comunque sia piccolo γ_m, purchè positivo.

Introduciamo ora le seguenti utili notazioni

$$l = \frac{\gamma_m}{\varepsilon_M \omega} \,, \tag{1.11}$$

$$k = \frac{1}{2\omega\sqrt{\varepsilon_m \mu_m}} \,, \tag{1.12}$$

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{k}(1-\delta),\ \frac{l(1-\delta)}{k(2+l)}\right) , \tag{1.13}$$

dove $\delta \in (0, 1)$ e, del resto, arbitrario.

Detto poi $\boldsymbol{x}_0$ un punto qualunque dello spazio, poniamo

$$R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \,, \tag{1.14}$$

cioè R è la distanza fra i punti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}_0$.

---

(1) Cioè $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_{1t} + i\boldsymbol{E}_{2t}$, $\boldsymbol{E}_{1t}$, $\boldsymbol{E}_{2t}$ componenti tangenziali su σ di $\boldsymbol{E}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$.

Ciò premesso, il teorema di unicità sarà valido per le eventuali soluzioni di (1.1) e (1.2) (soddisfacenti alle già indicate condizioni su σ) di classe C^1 in $\mathscr{D}$ e di classe C in $\mathscr{D} \cup \sigma$ e tali che, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$, sia

$$E(\boldsymbol{x}) \leqslant M \exp(\beta R) , \qquad H(\boldsymbol{x}) \leqslant M \exp(\beta R) , \tag{1.15}$$

dove M è un numero positivo e $\beta < \alpha/2$.

Le (1.15) sostituiscono e sono molto più ampie delle condizioni che presuppongono $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ nulli all'infinito.

Infatti, poichè $\alpha > 0$, potrà anche essere $\beta > 0$, quindi il teorema di unicità vale anche per campi elettromagnetici che possono diventare infiniti all'infinito esponenzialmente purchè con esponente non troppo elevato.

In particolare il teorema vale per ogni campo limitato in $\mathscr{D}$ o tendente all'infinito di ordine algebrico.

Per la dimostrazione userò il metodo della funzione peso introdotto e applicato con successo per le equazioni del moto dei fluidi dai colleghi Rionero e Galdi [**2**].

2. – Per la linearità delle (1.1) e (1.2) il teorema di unicità sarà provato se, supposto $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$, $\boldsymbol{E}_t$ (o $\boldsymbol{H}_t$) nulla su σ ed $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ soddisfacenti alle (1.15), risulta necessariamente per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0 , \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = 0 . \tag{2.1}$$

Per dimostrare le (2.1), cambiamo nella (1.1) (con $\boldsymbol{J} = 0$) i in $-i$, sicchè $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ diventano rispettivamente $\boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{H}^*$.

Si ha così

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* = - i\omega\varepsilon \boldsymbol{E}^* + \gamma \boldsymbol{E}^* . \tag{2.2}$$

Applichiamo a (1.2) e (2.2) un ben noto procedimento. Cioè moltiplichiamo scalarmente la (2.2) per $\boldsymbol{E}$ e la (1.2) per $\boldsymbol{H}^*$ e poi sottraiamo membro a membro.

Si ottiene

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H}^* \times \boldsymbol{E}) = i\omega(\mu \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* - \varepsilon \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*) + \gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* . \tag{2.3}$$

Ora introduciamo la funzione peso

$$g = \exp(-\alpha R) . \tag{2.4}$$

Moltiplichiamo la (2.3) per g; con facili passaggi, ricordando anche la (1.7), si ha

$$\text{div}\,(g\boldsymbol{H}^* \times \boldsymbol{E}) = i\omega g(\mu H^2 - \varepsilon E^2) + \gamma g E^2 - \text{grad}\, g \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* . \tag{2.5}$$

Cerchiamo un valore maggiorante per l'ultimo termine di (2.5).

Si noti intanto che, essendo $|\text{grad}\, R| = 1$, si ha

$$\text{grad}\, g = -\alpha \exp(-\alpha R)\, \text{grad}\, R \Rightarrow |\text{grad}\, g| = \alpha g . \tag{2.6}$$

Quindi ricordando (1.7), (1.8), (1.9) e (1.12), applicando una diseguaglianza, forse nota, che sarà comunque provata in appendice, si ha

$$|\text{grad}\, g \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*| \leqslant |\text{grad}\, g| EH^* = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\varepsilon\mu}\, EH \leqslant \alpha g k \omega (\varepsilon E^2 + \mu H^2) . \tag{2.7}$$

Consideriamo ora una superficie sferica Σ di centro $\boldsymbol{x}_0$ e raggio R_0 abbastanza grande in modo che σ sia interna a Σ. Detto v_1 il volume della parte di $\mathscr{D}$ compresa fra σ e Σ, integrando la (2.5) su v_1 e indicando con $\boldsymbol{n}_\sigma$ e $\boldsymbol{n}_\Sigma$ i versori rispettivamente normali a σ e a Σ (orientati verso l'esterno di v_1), si ha (²)

$$\int_\sigma g\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{n}_\sigma \, d\sigma + \int_\Sigma g\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}_\Sigma \, d\Sigma \tag{2.8}$$

$$= -i\omega \int_{v_1} g(\mu H^2 - \varepsilon E^2)\, dv_1 - \int_{v_1} \gamma g E^2 \, dv_1 + \int_{v_1} \text{grad}\, g \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \, dv_1 .$$

Ora se, su σ, $\boldsymbol{E}_t = 0$ allora $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{n} = 0$ e la funzione sotto il segno di integrazione nel primo termine di (2.8) è nulla.

Poichè allo stesso risultato si giunge se $\boldsymbol{H}_t = 0$, si conclude che il primo termine di (2.8) è nullo.

Passiamo ora al limite per $R_0 \to \infty$: per la (1.15) si ha su Σ

$$|g\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}_\Sigma| \leqslant g |\boldsymbol{E}| |\boldsymbol{H}| < M^2 \exp(-\alpha + 2\beta) R_0 . \tag{2.9}$$

Ma, come si è supposto $\alpha > 2\beta$, allora il primo membro di (2.9) tende a zero esponenzialmente per $R_0 \to \infty$; quindi, con questo passaggio al limite il secondo termine di (2.8) si annulla.

(²) A rigore per ottenere (2.8) se $\boldsymbol{x}_0 \in v_1$, bisognerebbe integrare la (2.5) nel dominio compreso la Σ, σ e una superficie sferica (interna a v_1) di centro $\boldsymbol{x}_0$ e raggio r e poi far tendere r a zero.

Allora, detto v il volume esterno a σ, cioè il volume di $\mathscr{D}$, la (2.8) diventa

$$(2.10)\qquad i\omega\int_v (g\mu H^2 - g\varepsilon E^2)\,dv + \int_v g\gamma E^2\,dv = \int_v \operatorname{grad} g\cdot \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\,dv\,.$$

Si noti che ogni singolo integrale di (2.10) è convergente perchè, per la presenza di g, le funzioni sotto il segno di integrazione sono maggiorate da $\exp(-\alpha+2\beta)R$ moltiplicato per una costante positiva. Ora uguagliamo fra loro la parte immaginaria e la parte reale di (2.10); tenendo conto che la parte reale e quella immaginaria di un numero complesso sono inferiori (o al più uguali) al suo modulo e tenendo anche conto di (2.7), si ha

$$(2.11)\qquad \int_v (g\mu H^2 - g\varepsilon E^2)\,dv \leqslant \alpha k\int_v (g\varepsilon E^2 + g\mu H^2)\,dv\,,$$

$$(2.12)\qquad \int_v g\gamma E^2\,dv \leqslant \alpha k\omega\int_v (g\varepsilon E^2 + g\mu H^2)\,dv\,.$$

Ora per la (1.13) segue

$$(2.13)\qquad \alpha k \leqslant 1-\delta \Rightarrow 1-\alpha k \geqslant \delta > 0\,.$$

Quindi da (2.11)

$$(2.14)\qquad \int_v g\mu H^2\,dv \leqslant \frac{1+\alpha k}{1-\alpha k}\int_v g\varepsilon E^2\,dv$$

e sostituendo in (2.12)

$$(2.15)\qquad \int_v g\gamma E^2\,dv \leqslant \frac{2\alpha k\omega}{1-\alpha k}\int_v g\varepsilon E^2\,dv\,.$$

Ponendo in luogo di γ, γ_m di ε, ε_M si rinforza la diseguaglianza (2.15). Allora, ricordando (1.11), si ha

$$(2.16)\qquad \int_v \varepsilon_M\omega\left(l-\frac{2\alpha k}{1-\alpha k}\right)gE^2\,dv \leqslant 0\,.$$

Ora per la (1.13) si ha

$$(2.17)\qquad \alpha k \leqslant \frac{l}{2+l}(1-\delta)\,,$$

quindi

$$\frac{2\alpha k}{1-\alpha k} < \frac{2l(1-\delta)}{2+l-l+l\delta} = \frac{2l-2l\delta}{2+l\delta} < l \,. \tag{2.18}$$

Allora se E^2 non fosse identicamente nullo in $\mathscr{D}$, il primo membro di (2.16) sarebbe positivo in contraddizione con la (2.16) stessa; si ha così $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$. Da (1.2) segue subito $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = 0$, quindi il teorema di unicità è dimostrato.

Appendice

Completiamo alcune nozioni, ben note, sui vettori complessi che indicheremo ancora con $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{H}$ (ed espressi da (1.4) e analoga) senza che essi rappresentino necessariamente un campo elettrico o uno magnetico.

Detto y_j ($j = 1, 2, 3$) un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, definiremo componente di $\boldsymbol{E}$ lungo y_j l'espressione

$$E_j = E_{1j} + iE_{2j} \,, \tag{A.1}$$

dove E_{1j} ed E_{2j} sono le componenti lungo y_j di $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$. Ora, essendo

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{H}_2 + i(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{H}_1) \,, \tag{A.2}$$

si ha subito $E^2 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*$.

Si ha poi, com'è facile verificare da (A.1) (è sottointesa la sommatoria rispetto all'indice j da 1 a 3)

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = E_jH_j \Rightarrow E^2 = |E_j^2| \,, \qquad H^2 = |H_j^2| \,. \tag{A.3}$$

Si ha poi ricordando la relazione di Schwarz

$$|\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}| \leqslant |E_jH_j| < \sqrt{|E_j^2||H_j^2|} = EH \,. \tag{A.4}$$

Sia ora $\boldsymbol{a}$ un vettore reale, calcoliamo un valore maggiorante per $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}|$; tenendo presenta la (1.7) si ha

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}_1)^2 + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}_2)^2} \leqslant a\sqrt{E_1^2 + E_2^2} = aE \,. \tag{A.5}$$

Consideriamo quindi il prodotto misto $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

Poichè, come subito si verifica, anche nel prodotto misto dei vettori complessi è lecito scambiare il simbolo di prodotto vettoriale con quello di prodotto scalare, per (A.4) e (A.5) si ha

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}^*| \leqslant |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}|H \leqslant aEH\,. \tag{A.6}$$

Questa diseguaglianza è stata applicata per dedurre (2.7) e (2.9), ponendo nella prima $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} g$ e nella seconda $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_\Sigma$.

Bibliografia

[1] D. Graffi, *Onde elettromagnetiche*, C.N.R. 1965.

[2] S. Rionero e G. P. Galdi, *On the uniqueness of viscous fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **62** (1976), 295-301.

[3] S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic waves*, Van Nostrand, Princeton 1943.

Sunto

Mediante il metodo della funzione peso si dimostra un teorema di unicità per le equazioni del campo elettromagnetico sinusoidale in un dominio illimitato senza porre condizioni di convergenza all'infinito.

* * *