Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 827-836

FULVIA SKOF (*)

Sulle funzioni aritmetiche additive quasi-periodiche (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Entro la classe $\mathscr{F}$ delle funzioni aritmetiche $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ si prendano in considerazione le seguenti classi:

$\mathscr{A}$: classe delle *funzioni additive*, cioè tali che

$$f(mn) = f(m) + f(n)\,, \tag{1}$$

per ogni coppia di interi $m, n \in \boldsymbol{N}$ con $(m, n) = 1$;

$\mathscr{A}_1$: classe delle *funzioni completamente additive*, cioè tali che (1) risulti verificata per qualunque coppia di interi $m, n \in \boldsymbol{N}$ (cioè $(m, n) \geqq 1$);

(U, a)-qp: classe delle *funzioni quasi-periodiche lungo la successione* U, dove $U = \{u_k\}$ con $u_k \in \boldsymbol{N}$, $u_k < u_{k+1}$, è una successione assegnata. f appartiene a tale classe se e solo se esiste almeno un intero $a \geqq 1$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $k_0 = k_0(\varepsilon; U, a)$ per cui

$$|f(u_k + a) - f(u_k)| < \varepsilon \qquad \text{per } k \geqq k_0\,. \tag{2}$$

Il minimo di tali interi a verrà detto il *periodo* (minimo) di f lungo U

(*) Indirizzo: Istituto di Analisi, Università, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 21-III-1979.

Nel presente lavoro ci proponiamo di stabilire alcune proprietà delle funzioni aritmetiche che presentino simultaneamente caratteri di additività e di quasi-periodicità, nell'ordine di idee di un classico teorema di P. Erdös [**1**]$_1$ che caratterizza il logaritmo nella classe delle funzioni aritmetiche additive, teorema che, in relazione alle classi sopra introdotte, può essere formulato nel modo seguente

$$\text{(E)} \qquad f \in \mathscr{A} \cap (\boldsymbol{N}, 1)\text{-qp} \Leftrightarrow f(n) = c \log n\,, \qquad c = f(2)/\log 2\,.$$

Precisamente, nei prossimi nn. **2** e **3** stabiliremo dei criteri per la forma $f(n) = c \log n$ sotto ipotesi attenuate rispetto a quella in (E); nel n. **4** verrà stabilito un ulteriore criterio, di carattere un po' diverso rispetto ai teoremi precedenti, per funzioni f della classe $\mathscr{A} \cap (U, a)$-qp, nel quale si fissa l'attenzione in modo particolare sulle proprietà di distribuzione della successione U, descritte dall'andamento della sua funzione enumeratrice $\nu(x) = \sum\limits_{u_k \leqq x} 1$.

2. - Sulle funzioni additive, quasi-periodiche lungo successioni

Consideriamo dapprima il caso in cui f sia quasi-periodica lungo $\boldsymbol{N}$. Allora si riconosce facilmente che sussistono le seguenti implicazioni

$$(3) \qquad f \in \mathscr{A} \cap (\boldsymbol{N}, 1)\text{-qp} \Rightarrow f \in \mathscr{A} \cap (\boldsymbol{N}, a)\text{-qp} \quad \text{per ogni } a > 1\,,$$

$$(4) \qquad f \in \mathscr{A}_1 \cap (\boldsymbol{N}, a)\text{-qp} \quad \text{per qualche } a \geqq 1 \Rightarrow f \in \mathscr{A}_1 \cap (\boldsymbol{N}, a)\text{-qp}\,.$$

Se in (4) si sostituisce $\mathscr{A}$ ad $\mathscr{A}_1$, l'implicazione non è più vera in generale. Per esempio, si consideri la funzione φ così definita: $\varphi \in \mathscr{A}$, $\varphi(2^h) = 1$ per ogni intero $h \geqq 1$, $\varphi(p^h) = 0$ per ogni primo $p \neq 2$ e ogni intero $h \geqq 1$; essa è quasi-periodica di periodo 2 e non di periodo 1 $\big($infatti, $\varphi(2n) = 1$, $\varphi(2n+1) = 0\big)$.

Di più, sussiste la seguente

P r o p o s i z i o n e 1. $f \in \mathscr{A}_1 \cap (\boldsymbol{N}, a)$-qp *per qualche intero* $a \geqq 1 \Leftrightarrow f(n) = c \log n$, $c = f(2)/\log 2$.

Per $a = 1$ l'asserzione è vera, come corollario del classico teorema (E) di Erdös. Se $a > 1$, lungo la successione $\{na\}$ risulta $f(na + a) - f(na) \to 0$ per $n \to \infty$, da cui, essendo $f \in \mathscr{A}_1$: $f(n+1) - f(n) \to 0$, e pertanto l'asserto segue ancora dal teorema (E).

La funzione φ sopra definita mostra anche che nella Proposizione 1 non si può supporre $f \in \mathscr{A}$ in luogo di $f \in \mathscr{A}_1$. Infatti, tale esempio prova la seguente

Proposizione 2. *Se $a > 1$, esistono funzioni f tali che $f \in \mathscr{A} \cap (\boldsymbol{N}, a)$-qp, $f \notin \mathscr{A}_1$.*

Passiamo ora a considerare una successione crescente $U = \{u_i\}$ di interi naturali u_i. È evidente che se la funzione f è quasi-periodica lungo U ed è additiva, le proprietà di distribuzione della U stessa entro $\boldsymbol{N}$ (per esempio, la sua « densità » ([1])) oppure certe sue caratteristiche di natura aritmetica saranno collegate con l'andamento della funzione stessa. Un esempio classico di proposizione che illustra questo ordine di idee è fornito dalla nota congettura (non ancora dimostrata) di P. Erdös $[\mathbf{1}]_2$:

Congettura (P. Erdös). « Se $U = \{u_i\}$ ha densità 1, $f \in \mathscr{A}$ e $f(u_i + 1) - f(u_i) \to 0$ per $i \to \infty$, allora è $f(n) = c \log n$, $c = f(2)/\log 2$. »

Osserviamo che mentre le ipotesi della Congettura garantiscono la completa additività della f (anzi, per questo sarebbe sufficiente $\delta^*(U) = 1$ anzichè $\delta(U) = 1$ ([2])), quando il periodo minimo di f sia maggiore di 1 le analoghe ipotesi non implicano più, in generale, la completa additività (Prop. 2 nel n. **1**). Pertanto, in vista di criteri riguardanti le funzioni quasi-periodiche con periodo qualunque, cominciamo con lo stabilire un criterio sufficiente di completa additività, che comprenderà come caso particolare il criterio già citato.

Teorema 1. *Sia $U = \{u_i\}$ crescente ($u_i \in \boldsymbol{N}$) con $\delta^*(U) = 1$. Sia $f \in \mathscr{A} \cap (U, a)$-qp per qualche intero $a \geqq 1$; se $a > 1$ sia inoltre*

(i) *$f(p^k) = kf(p)$ per ogni primo $p \mid a$ e per ogni intero $k \geqq 1$.*

Allora $f \in \mathscr{A}_1$.

Basterà provare il seguente

Lemma 1. *Sia $U = \{u_i\}$ crescente ($u_i \in \boldsymbol{N}$) con $\delta^*(U) = 1$. Sia $f \in \mathscr{A} \cap (U, a)$-qp per qualche intero $a \geqq 1$. Allora risulta $f(p^k) = kf(p)$ per ogni primo $p \nmid a$, e ogni intero $k \geqq 1$.*

Dim. Siano fissati il numero primo p con $(p, a) = 1$ e l'intero $h \geqq 1$.

([1]) Data la successione $U = \{u_i\}$, $u_i \in \boldsymbol{N}$, $u_i < u_{i+1}$, denotiamo con $\nu(x)$ la sua « funzione enumeratrice » $\nu(x) = \sum_{u_i \leqq x} 1$ (evidentemente, $0 \leqq \nu(x) \leqq x$). Se esiste $\delta = \lim \nu(x)/x$ per $x \to \infty$ si dice che U ha *densità* (asintotica) δ, $(0 \leqq \delta \leqq 1)$; in ogni caso si ha per $x \to \infty$

$$0 \leqq \delta_* = \liminf \nu(x)/x \leqq \limsup \nu(x)/x = \delta^* \leqq 1 .$$

I numeri δ_* e δ^* si dicono rispettivamente la *densità inferiore* e la *densità superiore* di U.

([2]) Cfr. $[\mathbf{2}]_1$.

Detto $K(p)$ l'insieme degli interi q primi con p, cioè l'insieme $K(p) = \{q\colon q \in \boldsymbol{N},\ (p, q) = 1\}$ (che ha densità $1 - 1/p$), ad ogni $q \in K(p)$ associamo l'insieme finito $S(q)$ (avente $ap + 1$ elementi) così definito

$$S(q) = \{s\colon s = p^h q,\ s = p^{h+1} q + v,\ v = 0, 1, 2, \ldots, ap - 1\}\ .$$

Ripartiamo quindi $K(p)$ nelle due seguenti classi disgiunte (con U_c denotiamo il complementare di U rispetto a $\boldsymbol{N}$)

$$K'(p) = \{q'\colon q' \in K(p),\ S(q') \cap U_c = \emptyset\}\ ,$$

$$K''(p) = \{q''\colon q'' \in K(p),\ S(q'') \cap U_c \neq \emptyset\}\ .$$

Proveremo che $K'(p)$ ha infiniti elementi. Infatti, detta $\nu(x) = \sum\limits_{u_i \leqq x} 1$ la funzione enumeratrice di U, si ha per ipotesi $\limsup \nu(x)/x = 1$ $(x \to +\infty)$; pertanto, fissata una sottosuccessione $\{\xi_t\}$ di U massimizzante, cioè tale che $\nu(\xi_t)/\xi_t \to 1$ per $t \to \infty$, per essa risulta $\nu(\xi_t) = \xi_t(1 - \eta_t)$, con $\eta_t \to 0$ per $t \to \infty$.

Consideriamo la coppia di intervalli contigui $(\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), (\xi_t - ap)/p]$, $((\xi_t - ap)/p, \xi_t]$, con $\varepsilon(\xi_t) \to 0$ per $t \to \infty$, e incominciamo a provare che il numero $\mu(\xi_t)$ degli interi q tali che $S(q) \subseteq (\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), \xi_t]$ verifica la disuguaglianza $\mu(\xi_t)/\xi_t \geqq \gamma > 0$ con $\gamma = \gamma(p, h)$ indipendente da t. Infatti, per ogni q tale che $\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t) < p^h q \leqq (\xi_t - ap)/p$ risulta evidentemente $S(q) \subseteq (\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), \xi_t]$ e il numero $\mu(\xi_t)$ di questi interi q è dato da

$$\mu(\xi_t) = \frac{1}{p^h}\left\{\frac{\xi_t - ap}{p} - \xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t)\right\} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + o(1)\right) \sim \frac{\xi_t}{p^{h+1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\ ;$$

d'altra parte, il numero $\mu''(\xi_t)$ degli interi q'' per i quali $S(q'') \subseteq (\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), \xi_t]$ verifica la relazione

$$\mu''(\xi_t) \leqq (ap + 1)\{\xi_t - (1 - \eta_t)\xi_t\} = o(\xi_t)\ .$$

Ne segue che il numero $\mu'(\xi_t)$ degli interi q' tali che $S(q') \subseteq (\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), \xi_t]$ risulta

$$\mu'(\xi_t) = \mu(\xi_t) - \mu''(\xi_t) \sim \frac{\xi_t}{p^{h+1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad \text{per } t \to \infty\ .$$

Dunque $K'(p)$ ha densità superiore positiva, e pertanto contiene infiniti elementi.

Consideriamo ora la funzione

$$\psi_f = \psi_f(q'; p, h) = \{f(p^h q' + a) - f(p^h q')\} - \{f(p^{h+1} q' + ap) - f(p^{h+1} q')\};$$

risulta

$$\psi_f = \{f(p^h q' + a) - f(p^h q')\} - \sum_{v=0}^{p-1} \{f(p^{h+1} q' + av + a) - f(p^{h+1} q' + av)\} \to 0,$$

per $q' \to \infty$, tenuto conto della quasi-periodicità di f e della definizione di $K'(p)$.

D'altra parte, si riconosce subito che ψ_f è indipendente da q': infatti, essendo $(q', p) = 1$, $(p, p^h q' + a) = 1$ e f additiva, risulta

$$\psi_f = f(p^{h+1}) - f(p^h) - f(p);$$

pertanto è $\psi_f = 0$, ed è provato l'asserto.

3. - Alcune caratterizzazioni della funzione $c \log n$

I Teoremi 2 e 3 che seguono forniscono delle caratterizzazioni del logaritmo nella classe $\mathscr{A} \cap (U, a)$-qp $(a \geqq 1)$ che, in certo senso, si avvicinano alla citata congettura di Erdös: in essi, da un lato risulta attenuata l'ipotesi sulla densità di U, e d'altro lato è introdotta una ulteriore ipotesi che vincola f lungo una successione di interi che, pur avendo densità zero, ha tuttavia una particolare struttura aritmetica.

Teorema 2. *Sia* $U = \{u_i\}$ *crescente* $(u_i \in \boldsymbol{N})$ *con* $\delta^*(U) = 1$. *Sia* $f \in \mathscr{A} \cap (U, a)$-qp *per qualche intero* $a \geqq 1$; *siano inoltre verificate le seguenti proprietà*

(i) *se* $a > 1$ *sia* $f(p^k) = kf(p)$ *per ogni primo* $p \mid a$ *e per ogni intero* $k \geqq 1$;

(ii) *posto* $\sigma(n) = \sum_{(*)} \{f(s^2) - f(s^2 - a^2)\}$,

$$(*) \quad s = n - ar, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, [n/a] - 2,$$

risulti $\sigma(ak) = O(1)$ *per* $k \to \infty$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

Allora è $f(n) = c \log n$, $c = f(2)/\log 2$.

Osservazioni. I. – La condizione (ii) risulta soddisfatta per esempio quando $\{ma\} \subseteq U$ $(m \in \boldsymbol{N})$.

II. – Il classico teorema di Erdös (n. **1**, (E)) si ottiene come corollario assumendo $U = \boldsymbol{N}$, $a = 1$ (in tal caso risulta infatti $\sigma(n) \to f(2)$).

Dimostrazione del Teorema 2. Per il Lemma 1 risulta $f \in \mathscr{A}_1$. Ne segue

$$f(s^2) - f(s^2 - a^2) = \{f(s) - f(s-a)\} - \{f(s+a) - f(s)\}\,,$$

da cui si deduce facilmente la seguente identità, valida per ogni intero $a \geqq 1$ e ogni intero $n \geqq 2a$,

$$(4) \qquad f(n+a) - f(n) = f(n - a\{[n/a] - 2\}) - f(n - a\{[n/a] - 1\}) - \sum_{(*)} \{f(s^2) - f(s^2 - a^2)\}$$

$$(*) \quad s = n - ar, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, [n/a] - 2\,.$$

Risulta quindi $\sigma(ak) = f(2) - \{f(ak + a) - f(ak)\} = O(1)$, da cui $f(k+1) - f(k) = O(1)$ per $k \to \infty$. Un noto risultato di E. Wirsing [**3**] assicura allora $f(n) = c \log n + O(1)$, ed essendo f completamente additiva ne segue l'asserto.

Con tecnica analoga si dimostra che sussiste il seguente

Teorema 3. *Nelle ipotesi del Teorema* 2, *nel quale si sostituisca alla condizione* (ii) *la seguente condizione*

(ii)′ *Posto* $\sigma(n) = \sum_{(*)} \{f(s^2) - f(s^2 - a^2)\}$,

$$(*) \quad s = n - ar\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, [n/a] - 2\,,$$

la funzione $\sigma(ak) + f(2)$ *abbia segno definitivamente costante per* $k \to \infty$, *risulta* $f(n) = c \log n$, $c = f(2)/\log 2$.

Per la dimostrazione basta qui osservare che $f(k+1) - f(k) = \sigma(ak) + f(2)$ risulta avere segno definitivamente costante; pertanto f, come funzione additiva e monotona lungo $\boldsymbol{N}$, è $c \log n$, in base a un classico teorema di Erdös (3).

---

(3) Cfr. [**1**]$_{1,2}$.

Osservazione. La condizione (ii)$'$ risulta verificata, per esempio, quando sia definitivamente $f(s^2) \geqq f(s^2 - a^2)$ (oppure definitivamente $\leqq$), da cui segue la monotonia di $\sigma(n)$. Tenuto conto che le ipotesi assicurano la completa additività di f, la disuguaglianza sopra scritta, che è equivalente a $f(s) \geqq \{f(s-a) + f(s+a)\}/2$, può interpretarsi come una proprietà di convessità imposta alla f.

4. - Un ulteriore criterio per la forma $c \log n$

Il teorema che viene stabilito in questo numero si propone di assegnare un criterio sufficiente per la forma $c \log n$, ancora nell'ordine di idee dei teoremi presentati nei numeri precedenti, ma, a differenza di quelli, esso prescinde dalla considerazione di proprietà aritmetiche di speciali sottosuccessioni, per tenere conto invece, in modo essenziale, delle proprietà di distribuzione della successione $U = \{u_i\}$ lungo la quale viene vincolato l'andamento di f.

Poichè nella letteratura sull'argomento si trova accanto alla condizione di limite $f(u_i + 1) - f(u_i) \to 0$ anche quella $f(u_{i+1}) - f(u_i) \to 0$, riteniamo utile premettere una breve osservazione.

Si considerino le due seguenti condizioni di limite

(α) *$f \in \mathscr{A}$, $f(u_{i+1}) - f(u_i) \to 0$ lungo una successione crescente $U = \{u_i\}$ con $\delta(U) = 1$;*

(β) *$f \in \mathscr{A}$, $f(v_k + a) - f(v_k) \to 0$ lungo una successione crescente $V = \{v_k\}$ con $\delta(V) = 1$, per almeno un intero $a \geqq 1$.*

Si riconosce facilmente che $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ (con $a \geqq 1$ intero qualunque), mentre non è garantito in generale il viceversa.

Infatti, se vale (α) si fissi $a \geqq 1$; posto

$$V_a = \{m \in \boldsymbol{N} \colon m \in U,\ m + a \in U\} = \{v_k\} \qquad \text{con } v_k < v_{k+1}\,,$$

da $\delta(U) = 1$ segue $\delta(U \setminus V_a) = 0$ e quindi $\delta(V_a) = 1$. Inoltre

$$|f(v_k + a) - f(v_k)| < a\varepsilon \qquad \text{per ogni } k \geqq k_0(\varepsilon;\, U)\,,$$

e pertanto

$$(5) \qquad (\alpha) \Rightarrow f \in \mathscr{A} \cap (V_a, a)\text{-qp} \qquad \text{con } \delta(V_a) = 1 \qquad (a \geqq 1)\,.$$

Per quanto riguarda l'implicazione inversa, basta invece osservare che se $a > 1$ la condizione (β) non garantisce la completa additività della funzione f, a differenza di (α).

Teorema 4. *Sia $U = \{u_i\}$ una successione crescente di interi $u_i \in \boldsymbol{N}$, tale che, posto $\nu(x) = \sum_{u_i \leq x} 1$, si abbia*

$$\text{(i)} \qquad u_k - \nu(u_k) = O(u_k^{\sigma_k}) \, ,$$

per almeno una successione di numeri reali $\sigma_k = \sigma(u_k) \to 0+$ per $k \to \infty$.

Sia $f \in \mathscr{A}$ e tale che per ogni φ: $U \to \boldsymbol{N}$ con

$$\text{(ii)} \qquad \varphi(u_k) = O(u_k - k + 1) \qquad \textit{per } k \to \infty$$

risulti

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{u_k - \varphi(u_k) < u_i \leq u_k} |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \to 0 \qquad \textit{per } k \to \infty \, .$$

Allora è $f(n) = c \log n$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $c = f(2)/\log 2$.

Osservazioni. I. – (i) $\Rightarrow \delta(U) = 1$.

II. – Scelta $\varphi(u_k) \equiv 1$ su U, da (iii) segue $f(u_{k+1}) - f(u_k) \to 0$, per $k \to \infty$, e quindi anche la quasi-periodità di f, con periodo 1, lungo una successione di densità 1.

III. – La successione complementare U_c ha infiniti elementi se la condizione (i) è verificata con $\sigma(u_k) \to 0$ in modo da aversi $\sigma(u_k) \log u_k \to \infty$.

IV. – Esistono successioni $U = \{u_k\}$ che verificano (i) e per le quali $\limsup (u_{k+1} - u_k) = +\infty$. Per esempio, $U = \bigcup_{h=1}^{\infty} I_h$, dove $I_h = \{h^h + h \leq n \leq (h+1)^{h+1}\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ e $\sigma(t) = 1/\log\log t$.

V. – Se $U = \boldsymbol{N}$, (i) risulta verificata per qualunque $\sigma_k \to 0+$; (ii) si riduce a $\varphi(k) = O(1)$; (iii) si riduce a $\sum_{k-\varphi(k)<i\leq k} |f(i+1) - f(i)| \to 0$, che è equivalente a $f(i+1) - f(i) \to 0$: il Teorema 4 si riduce quindi al classico teorema (E) di Erdös: « $f \in \mathscr{A}$, $f(n+1) - f(n) \to 0 \Rightarrow f(n) = c \log n$ ».

Dimostrazione del Teorema 4. (a) Dalle ipotesi segue che $f \in \mathscr{A}_1$ (osservazioni I e II, e Lemma 1). (b) Fissato il numero primo p, si considerino le successioni (crescenti) $U = \{u_i\}$, $pU = \{pu_i\}$, $U_p = U \cap pU$. Risulta ovviamente $\delta(U_p) = 1/p > 0$.

Si consideri $u_k \in U$: si tratta di valutare $f(u_k)$ (per k sufficientemente grande).

Denotiamo con u_{k_1} l'elemento di U così definito

$$pu_{k_1} = \max\{u_i \in U_p,\ u_i \leqq u_k\};$$

allora risulta certamente verificata la relazione

$$u_k - pu_{k_1} \leqq p(u_k - k + 1) = O(u_k^{\sigma_k}),$$

per le ipotesi (ii) e (i). Ne segue, essendo $f \in \mathscr{A}_1$

$$f(u_k) = f(pu_{k_1}) + f(u_k) - f(pu_{k_1}) = f(p) + f(u_{k_1}) + \{f(u_k) - f(pu_{k_1})\}.$$

Tenendo conto di (i) e (iii), dove si assuma $\varphi(u_k) = p(u_k - k + 1) + 1$, fissato $\varepsilon > 0$ si trova, per $k \geqq K(\varepsilon)$,

$$|f(u_k) - f(pu_{k_1})| \leqq \sum_{u_i \in U \cap [pu_{k_1},\, u_k]} |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \leqq \sum_{u_i \in U \cap (u_k - \varphi(u_k),\, u_k]} |f(u_{i+1}) - f(u_i)| < \varepsilon.$$

Pertanto risulta

$$f(u_k) = f(p) + f(u_{k_1}) + \varepsilon\theta_1, \quad \text{con } |\theta_1| < 1. \tag{6}$$

Analogamente, $f(u_{k_1}) = f(p) + f(u_{k_2}) + \varepsilon\theta_2$ con $|\theta_2| < 1$, e così via per un numero $\mu = \mu(\varepsilon)$ di volte, fino a trovare $u_{k_\mu} = u_*(p;\varepsilon) = \min\{m \in U_p,\ m \geqq u_{K(\varepsilon)}\}$. In definitiva, risulta

$$f(u_k) = \mu f(p) + f(u_*) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i. \tag{7}$$

Valutiamo ora l'intero $\mu = \mu(\varepsilon)$. Posto

$$\Delta_1 = u_k - pu_{k_1}, \quad \Delta_2 = u_{k_1} - pu_{k_2}, \ \ldots, \ \Delta_\mu = u_{k_{\mu-1}} - pu_*,$$

si ha

$$\begin{aligned} u_k &= u_*(p;\varepsilon)p^\mu + \Delta_\mu p^{\mu-1} + \ldots + \Delta_2 p + \Delta_1 \\ &= p^\mu\{u_*(p;\varepsilon) + O(\sum_{r=1}^{\mu}\Delta_r)\} \\ &= p^\mu\{u_*(p;\varepsilon) + O(u_k - k + 1)\} \\ &= p^\mu\{u_*(p;\varepsilon) + O(u_k^{\sigma_k})\}\,, \end{aligned}$$

con la costante implicata in $O(...)$ eventualmente dipendente da p e da ε. Ne segue (per ε fissato)

$$\log u_k = \mu(\varepsilon)\log p + O(1) + O(\sigma_k \log u_k)\,,$$

da cui $\mu(\varepsilon) \sim (\log u_k)/(\log p)$ per $k \to \infty$, qualunque sia ε.

Pertanto, da (7) si ottiene, per $k \to \infty$

$$f(u_k) = \frac{f(p)}{\log p}\log u_k + o(\log u_k)$$

$$f(u_k)/\log u_k \to f(p)/\log p\,,$$

da cui $f(p)/\log p =$ costante $= f(2)/\log 2$: tenendo infine conto della completa additività di f, si deduce $f(n) = \big(f(2)/\log 2\big)\log n$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$.

Bibliografia

[1] P. Erdös: [•]$_1$ *On the distribution function of additive functions*, Ann. of Math. **47** (1946), 1-20; [•]$_2$ *On the distribution function of additive arithmetical functions and some related problems*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **27** (1958), 45-49.

[2] F. Skof: [•]$_1$ *Un criterio di completa additività per le funzioni aritmetiche riguardante successioni di densità irregolare*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **48** (1970), 1-4; [•]$_2$ *Densità, misura, equidistribuzione delle successioni di interi e proprietà delle funzioni aritmetiche additive*, Rend. Mat. (4) **10** (1977), 607-616.

[3] E. Wirsing, *A characterization of* $\log n$ *as an additive arithmetical function*, Symposia Mathematica, vol. IV, Ist. Naz. Alta Matematica Roma; Academic Press, London 1970, 45-57.

Summary

Properties of additive arithmetical functions $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ *which are almost-periodic on some subsequence of* $\boldsymbol{N}$ *having density (or upper density) 1 are investigated. Results are applied to state some characterizations of* $\log n$*, in connection with an unsolved conjecture of P. Erdös.*

* * *