Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 773-780

P. AZZIMONDI e C. SCARAVELLI (*)

Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

In questi ultimi anni (come è noto) sono stati scritti moltissimi lavori sul problema del punto unito, soprattutto (1) per applicazioni fra spazi metrici. Qui noi diamo un teorema di esistenza e unicità per il punto unito di una applicazione di uno spazio metrico *generalizzato* completo in sè, con ipotesi di contrattività abbastanza generali (su questo teorema, per gli spazi metrici, cfr. $[\mathbf{4}]_2$, [**8**]).

Precisamente, dopo aver introdotto gli spazi in cui intendiamo operare (cfr. n. **2**), si dà la dimostrazione del teorema (cfr. n. **3**), e si fanno alcune osservazioni (cfr. n. **4**). Infine, nella Bibliografia, fra le tantissime Note sull'argomento, vengono riportate quelle che hanno suggerito la presente, e alcune di quelle che contengono ampie informazioni ed estesi riferimenti bibliografici sul problema stesso (cfr., in particolare, $[\mathbf{10}]_{1,2}$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.) e del G.N.I.M. (C.N.R.). – Ricevuto il 13-III-1979.
(1) Ma non esclusivamente: si vedano, ad esempio, $[\mathbf{10}]_{1,3}$, [**11**], [**12**], [**13**], [**14**].

2. - Una classe di spazi metrici generalizzati

Siano E un insieme e $d\colon E\times E \to \mathfrak{R}^+$ una applicazione che verifica le seguenti proprietà

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ per $x, y \in E$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ per $x, y \in E$,

(c) esistono: un sottoinsieme A di $\mathfrak{R}^+$ contenente un intervallo $0 \,|\!\!-\!\!|\, a$ $(a>0)$, una costante reale $\tau \geqslant 1$, e una funzione $\varphi\colon A \to \mathfrak{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x, y, z \in E$, $d(x, y) \in A \Rightarrow d(x, z) \leqslant \varphi[d(x, y)] + \tau d(y, z)$ (*proprietà triangolare generalizzata*: *p.t.g.*).

Lo spazio (E, d) così definito è lo spazio metrico *generalizzato* in cui intendiamo muoverci; esso è stato introdotto (anche per altri fini) in $[\mathbf{3}]_{1,2}$ come caso particolare di altri spazi metrici generalizzati. Un siffatto spazio sarà qui chiamato, per brevità, *H-spazio*. Negli H-spazi si possono introdurre (e trattare alla stessa stregua che negli ordinari spazi metrici) le nozioni topologiche e di completezza. In particolare, si segnala che *gli H-spazi sono spazi di Hausdorff*, e che l'applicazione d è uniformemente continua.

3. - Un teorema di punto unito negli H-spazi

Teorema. *Siano dati un H-spazio completo* (E, d) *e una funzione* $f\colon E \to E$; *siano* A *e* τ, *rispettivamente, l'insieme e la costante indicati in* (c). *Se*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant a_1(x, y)\, d(x, y) + a_2(x, y)\, d\big(x, f(x)\big) + a_3(x, y)\, d\big(y, f(y)\big) \tag{1}$$
$$+ a_4(x, y)\, d\big(x, f(y)\big) + a_5(x, y)\, d\big(y, f(x)\big),$$

con $a_i\colon E\times E \to \mathfrak{R}^+$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ *e* $\sup\limits_{(x,y)\in E\times E} \sum\limits_{i=1}^{5} a_i(x, y) = \alpha < 1/\tau$,

$$d\big(x, f(x)\big) \in A \qquad \textit{per ogni } x \in E, \tag{2}$$

allora esiste uno ed un sol punto unito per la funzione f.

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in E$, consideriamo la successione

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \ldots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \ldots \tag{3}$$

di punti di E, e indichiamo con $O(x_0)$ l'insieme dei punti della successione (3) stessa, ricordando che è

$$\text{diam}\, O(x_0) = \sup\left\{d(x_r, x_s): r < s;\, r = 0, 1, 2, \ldots;\, s = 1, 2, 3, \ldots\right\}. \tag{4}$$

Si ha allora:

1°) $$\forall_{\substack{h,k\in\mathfrak{N}\\ h<k}} d(x_h, x_k) \leqslant \alpha^h \,\text{diam}\, O(x_0).$$

Infatti, dati $h, k \in \mathfrak{N}$ con $h < k$, per la (3) e la (1) si ottiene successivamente

$$d(x_h, x_k) = d[f(x_{h-1}), f(x_{k-1})] \leqslant a_1(x_{h-1}, x_{k-1})\, d(x_{h-1}, x_{k-1})$$

$$+ a_2(x_{h-1}, x_{k-1})\, d(x_{h-1}, x_h) + a_3(x_{h-1}, x_{k-1})\, d(x_{k-1}, x_k) + a_4(x_{h-1}, x_{k-1})\, d(x_{h-1}, x_k)$$

$$+ a_5(x_{h-1}, x_{k-1})\, d(x_{k-1}, x_h)$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{d(x_r, x_s): h - 1 \leqslant r < s \leqslant k\right\},$$

e, applicando $(h - 1)$ volte questa maggiorazione,

$$d(x_h, x_k) \leqslant \alpha^h \max\left\{d(x_r, x_s): 0 \leqslant r < s \leqslant k\right\}, \tag{5}$$

da cui, per la (4), l'asserto.

2°) $$\text{diam}\, O(x_0) = \sup\left\{d(x_0, x_n): n \in \mathfrak{N}\right\}.$$

Infatti, banalmente,

$$\sup\left\{d(x_0, x_n): n \in \mathfrak{N}\right\} \leqslant \text{diam}\, O(x_0); \tag{6}$$

inoltre dalla (5) (essendo $\alpha < 1$), si ha

$$d(x_h, x_s) < \max\left\{d(x_m, x_n): 0 \leqslant m < n \leqslant k\right\} \quad \text{per } 1 \leqslant h < s \leqslant k,$$

quindi

$$\max\left\{d(x_m, x_n): 0 \leqslant m < n \leqslant k\right\} = \max\left\{d(x_0, x_n): 0 < n \leqslant k\right\},$$

e ancora

$$d(x_h, x_k) < \max\left\{d(x_0, x_n): 0 < n \leqslant k\right\} \leqslant \sup\left\{d(x_0, x_n): n \in \mathfrak{N}\right\},$$

da cui, immediatamente,

$$d(x_r, x_s) \leqslant \sup\left\{d(x_0, x_n): n \in \mathfrak{N}\right\}, \qquad \text{con } r < s;\ r = 0, 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, 3, \ldots,$$

cioè, per la (4),

$$\operatorname{diam} O(x_0) \leqslant \sup\left\{d(x_0, x_n): n \in \mathfrak{N}\right\}; \tag{7}$$

le (6) e (7) ci danno l'asserto.

3°) $$\operatorname{diam} O(x_0) < +\infty .$$

Infatti, se fosse $\operatorname{diam} O(x_0) = +\infty$, sarebbe anche, per 2°),

$$\forall_{\lambda \in \mathfrak{N}^+} \ \exists_{n \in \mathfrak{N}} \ \lambda \leqslant d(x_0, x_n); \tag{8}$$

d'altra parte, posto $d(x_0, x_\nu) = \max\left\{d(x_0, x_i): 0 < i \leqslant n\right\}$ (con $0 < \nu \leqslant n$), per la (2), la (3), la p.t.g. di (c) e la (5), si ha successivamente

$$\begin{aligned} d(x_0, x_\nu) &\leqslant \varphi[d(x_0, x_1)] + \tau d(x_1, x_\nu) \\ &\leqslant \varphi[d(x_0, x_1)] + \alpha\tau \max\left\{d(x_j, x_i): 0 \leqslant j < i \leqslant n\right\} \\ &= \varphi[d(x_0, x_1)] + \alpha\tau \max\left\{d(x_0, x_i): 0 < i \leqslant n\right\} = \varphi[d(x_0, x_1)] + \alpha\tau d(x_0, x_\nu), \end{aligned}$$

cioè

$$d(x_0, x_\nu) \leqslant \frac{\varphi[d(x_0, x_1)]}{1 - \alpha\tau}; \tag{9}$$

ma, essendo $d(x_0, x_n) \leqslant d(x_0, x_\nu)$, si avrebbe anche, per la (8),

$$\forall_{\lambda \in \mathfrak{N}^+} \ \lambda \leqslant \frac{\varphi[d(x_0, x_1)]}{1 - \alpha\tau},$$

il che è assurdo.

Pertanto da 1°), tenuto conto di 3°), si ha

$$\lim_{h,k\to+\infty} d(x_h, x_k) = 0 ,$$

onde la successione (3) è di Cauchy, e, per l'ipotesi di completezza di E, converge in E. Posto $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_* \in E$, da un certo indice n in poi si ha $d(x_n, x_*) < a$ e quindi $d(x_n, x_*) \in A$ [essendo a ed A la costante e l'insieme di (c)]. Allora, per la p.t.g. e la (1), si ha banalmente

$$d(x_*, f(x_*)) \leqslant \varphi[d(x_{n+1}, x_*)] + \tau d[f(x_n), f(x_*)] \leqslant \varphi[d(x_{n+1}, x_*)] +$$

$$+ \alpha\tau \max \{d(x_n, x_*), d(x_n, x_{n+1}), d(x_*, f(x_*)), d(x_n, f(x_*)), d(x_*, x_{n+1})\},$$

cioè, quando $n \to +\infty$ (essendo φ infinitesima nello zero),

$$d(x_*, f(x_*)) \leqslant \alpha\tau d(x_*, f(x_*)) ,$$

il che implica $x_* = f(x_*)$.

Infine, se $y_* \in E$ fosse un altro punto unito, per la (1) si avrebbe subito

$$d(x_*, y_*) = d(f(x_*), f(y_*)) \leqslant \alpha \max \{d(x_*, y_*), d(x_*, f(y_*)), d(y_*, f(x_*))\},$$

ossia

$$d(x_*, y_*) \leqslant \alpha d(x_*, y_*) ,$$

cioè $x_* = y_*$.

4. - Osservazioni

I. Sfruttando la (5) e una disuguaglianza del tipo (9) si vede facilmente che, per $h, k \in \mathfrak{N}$ $(h < k)$, $d(x_h, x_k) \leqslant (\alpha^h/(1-\alpha\tau))\varphi[d(x_0, x_1)]$, da cui, quando $k \to +\infty$ (per $h \in \mathfrak{N}$), $d(x_h, x_*) \leqslant (\alpha^h/(1-\alpha\tau))\varphi[d(x_0, x_1)]$ (che è una affermazione analoga alla (c) del teorema 1 di $[4]_2$). Pertanto, con semplici passaggi, formalmente identici a quelli del teorema 2 di $[\mathbf{4}]_2$ per gli spazi metrici, si può concludere col

Corollario. *Se le ipotesi* (1) *e* (2) *del Teorema* (cfr. n. **3**) *sono verificate, invece che da f, da una « iterata » f^m $(m \in \mathfrak{N})$, allora f ha un unico punto unito $x_* \in E$, e $\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = x_*$, per ogni $x_0 \in E$.*

II. Fra i tanti casi particolari del Teorema (cfr. n. **3**) che si possono ottenere specificando le funzioni a_i, può essere interessante quello che si ha sostituendo l'ipotesi (1) con

$$(10)\qquad d(f(x), f(y)) \leqslant \{\lambda_0[d(x, f(x))]^2 + \lambda_1 d(x, f(x))\, d(x, f(y))$$
$$+ \lambda_2 d(x, f(x))\, d(x, y) + \lambda_3 d(x, f(x))\, d(y, f(x)) + \lambda_4[d(x, f(y))]^2$$
$$+ \lambda_5 d(x, f(y))\, d(x, y) + \lambda_6 d(x, f(x))\, d(y, f(y)) + \lambda_7 d(x, f(y))\, d(y, f(x))$$
$$+ \lambda_8[d(x, y)]^2 + \lambda_5 d(y, f(x))\, d(x, y) + \lambda_4[d(y, f(x))]^2 + \lambda_3 d(y, f(y)) d(x, f(y))$$
$$+ \lambda_2 d(y, f(y))\, d(x, y) + \lambda_1 d(y, f(y))\, d(y, f(x)) + \lambda_0[d(y, f(y))]^2\}:$$
$$:\{d(x, f(y)) + \gamma_0 d(x, f(x)) + \gamma_1 d(x, y) + \gamma_0 d(y, f(y)) + d(y, f(x))\},$$

dove *il secondo membro è il più generale rapporto, simmetrico in* x, y, *fra un polinomio di secondo grado e uno di primo grado nelle distanze ivi indicate, e dove i* $\lambda_r, \gamma_0, \gamma_1$ *sono numeri reali non negativi tali che, per le* 2^{10} *possibili scelte delle funzioni* a_i, *si abbia sempre* $\alpha < 1/\tau$.

III. L'ipotesi (2) del Teorema serve qui chiaramente a rendere possibile l'uso della proprietà triangolare generalizzata nella dimostrazione del Teorema stesso [cfr. 3°), n. **3**]. Però in certi casi l'appartenenza all'insieme A [cfr. (c), n. **2**] delle distanze che vi debbono appartenere, affinchè si possa usare la p.t.g. (nel procedimento dimostrativo), discende direttamente (con semplici passaggi) dall'ipotesi (1): *e allora la* (2) *diventa superflua. Questo accade*, ad esempio, *se* (*almeno*) $a_4(x, f(x)) = 0$, *per* $x \in E$. Infatti applicando la (1) alla successione (3), si vede subito (in questo caso) che la successione $\{d(x_n, x_{n+1})\colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ è infinitesima. Pertanto, da un certo $p \in \mathfrak{R}$ in poi, $d(x_p, x_{p+1}) \in A$: questo basta per poter ripetere lo schema dimostrativo del n. **3** per la successione x_{p+n}, e concludere poi con l'esistenza e l'unicità del punto unito. Così, nel caso particolare di II basta porre $\lambda_4 = 0$, in quanto scegliendo a_4 uguale al rapporto fra $\lambda_4 d(x, f(y))$ e il denominatore di (10), si ha addirittura $a_4(x, y) \equiv 0$.

IV. Ovviamente, *gli spazi metrici sono H-spazi particolari*, con $A \equiv \mathfrak{R}^+$, $\tau = 1$, φ funzione identica. *Pertanto i Teoremi*: 2 *di* [**1**], 1 *di* [**2**], 2.5 *di* [**4**]$_1$, 1 (a) *e* (b) *di* [**4**]$_2$, 1 *part* (a) *e* 2 *di* [**5**], 2 *di* [**6**]$_1$, 1 *di* [**7**], *di* [**8**], 3 *di* [**9**]$_1$, 3 *di* [**9**]$_2$, 1 *di* [**15**]$_1$, 2 *di* [**15**]$_2$, (dimostrati in spazi metrici, dove la condizione (2) del n. **3** è sempre banalmente verificata) *si possono riguardare come casi particolari del Teorema oggetto del* n. **3**. In particolare, poi, i Teoremi: 1 part (a) di [**5**], 2 di [**6**]$_1$, 1 di [**7**], 3 di [**9**]$_1$ rientrano anche nel caso indicato qui all'Osservazione II.

Bibliografia

[1] R. M. TIBERIO BIANCHINI, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **5** (1972), 103-108.

[2] D. W. BOYD and J. S. WONG, *On nonlinear contractions,* Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 458-464.

[3] M. CICCHESE: $[\cdot]_1$ *Distanze generalizzate uniformemente continue,* Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 133 137; $[\cdot]_2$ *Questioni di completezza e contrazioni in spazi metrici generalizzati,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **13**-A (1976), 175-179.

[4] Lj. B. ĆIRIĆ: $[\cdot]_1$ *Generalized contractions and fixed-point theorems,* Publ. Inst. Math. (Beograd) (26) **12** (1971), 19-26; $[\cdot]_2$ *A generalization of Banach's contraction principle,* Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 267-273.

[5] G. HARDY and T. ROGERS, *A generalization of a fixed point theorem of Reich,* Canad. Math. Bull. (2) **16** (1973), 201-206.

[6] R. KANNAN: $[\cdot]_1$ *Some results on fixed points,* Bull. Calcutta Math. Soc. **60** (1968), 71-76; $[\cdot]_2$ *Some results on fixed points* - II, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 405-408.

[7] M. S. KHAN, *A fixed point theorem for metric spaces,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 53-57.

[8] S. MASSA, *Generalized contractions in metric spaces,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 689-694.

[9] S. REICH: $[\cdot]_1$ *Some remarks concerning contractions mappings,* Canad. Math. Bull. **14** (1971), 121-124; $[\cdot]_2$ *Kannan's fixed point theorem,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **4** (1971), 1-11.

[10] D. ROUX: $[\cdot]_1$ *Generalizzazioni del Teorema di Brower a spazi a infinite dimensioni,* Atti del Convegno Linceo: Applicazioni del teorema del punto fisso all'Analisi Economica (1977), 73-86; $[\cdot]_2$ *Teoremi di punto fisso per applicazioni contrattive,* Atti del Convegno Linceo: Applicazioni del Teorema del punto fisso all'Analisi Economica (1977), 89-110; $[\cdot]_3$ *Applicazioni quasi non espansive: approssimazione dei punti fissi,* Rend. Mat. (4) **10**, serie IV (1977), 597-605.

[11] D. ROUX and C. DELLA MATTIA MADERNA, *On contractive mappings in Uniform spaces,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11** (1975), 121-130.

[12] D. ROUX and E. MALUTA, *Contractive Kannan maps in compact spaces,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 141-145.

[13] D. ROUX and C. ZANCO, *Kannan maps in normed spaces,* to appear in Atti Accad. Naz. Lincei Rend.

[14] P. M. SOARDI, *Existence of fixed points of nonexpansive mappings in certain Banach lattices* (to appear in Proc. Amer. Math. Soc.).

[15] C. S. WONG: $[\cdot]_1$ *Generalized contractions and fixed point theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 409-417; $[\cdot]_2$ *Fixed point theorems for generalized nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **18** (1974), 265-276.

Summary

In this paper we give a fixed point theorem for mappings of a complete generalized metric space (H-space) into itself, under enough general hypothesis of contraction. Several known theorems in literature can be regarded as particular cases of this.

* * *