Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 725-738

V. E. BONONCINI (*)

Soluzioni periodiche di equazioni differenziali ordinarie (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

Nel presente lavoro consideriamo il problema della ricerca di soluzioni periodiche delle equazioni differenziali della forma

$$(1)\qquad x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) , \qquad 0 \leqslant m \leqslant n-1 , \qquad -\infty < t < +\infty ,$$

ove f è una funzione continua in R^{m+2}, periodica in t di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, e verificante le condizioni di simmetria

$$(2)\qquad \begin{aligned} & f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = -f(-t, -x, x', -x'', \dots, (-1)^{m+1}x^{(m)}) \quad \text{se } n \text{ è pari} \\ & f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = -f(-t, x, -x', x'', \dots, (-1)^{m}x^{(m)}) \quad \text{se } n \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Nel n. **1** dimostriamo un teorema che assicura l'esistenza di almeno una soluzione periodica $x(t)$ di periodo τ dell'equazione (1) [$x(t)$ dispari se n è pari, $x(t)$ pari se n è dispari] e inoltre diamo una stima $|x(t)| \leqslant R$ per il valore assoluto delle soluzioni periodiche di cui proviamo l'esistenza e insieme analoghe stime per le loro derivate fino all'ordine n incluso.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Università, 40126 Bologna, Italy.
(**) Ricevuto: 12-II-1979.

Il teorema di esistenza è basato, come in nostri precedenti lavori $[\mathbf{1}]_{1,2}$, sull'uso del teorema del punto unito di Schauder, sull'uso del metodo alternativo di Cesari, e su precise valutazioni della norma $k_n = \|H^n(I-P)\|$ di opportuni operatori lineari $H^n(I-P)$ nella topologia uniforme. Queste valutazioni sono state ottenute in nostri precedenti lavori $[\mathbf{1}]_{1,2}$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ in connessione con lo stesso problema delle soluzioni periodiche per equazioni differenziali della forma $x'' = f(t, x)$, oppure della forma $x^{(n)} = f(t, x)$. I risultati del presente lavoro riguardante l'equazione (1) estendono quelli dei lavori citati. Riportiamo i valori delle costanti k_n nel n. **1**.

1. - L'esistenza di soluzioni periodiche

Denotiamo con $X = X^{(m)}$ lo spazio di tutte le funzioni $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continue insieme a $x', x'', \ldots, x^{(m)}$ e periodiche di periodo $\tau = 2\pi/\omega$. Ogni elemento $x(t) \in X^{(m)}$ ha quindi la serie di Fourier

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \operatorname{sen} k\omega t)$$

e le serie di Fourier di $x', x'', \ldots, x^{(m)}$ si possono ottenere derivando formalmente. Sia P l'operatore proiezione in $X^{(m)}$ proiettante ogni $x \in X^{(m)}$ nel suo valore medio $m[x] = a_0 = \tau^{-1}\int_0^\tau x(t)\,dt$. Segue che $X_0^{(m)} = PX$ è uno spazio di costanti e $X_1^{(m)} = (I-P)X$ è lo spazio di tutti gli elementi x di cui sopra con $m[x] = 0$, ossia

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \operatorname{sen} k\omega t)\,, \qquad x \in X_1^{(m)}.$$

Denotiamo con H l'operatore che trasforma ogni $x \in X_1^{(m)}$ nell'unica primitiva $y = Hx$ di x che è periodica di periodo τ e a media nulla, ossia $H\colon X_1^{(m)} \to X_1^{(m+1)}$, cioè

$$Hx \sim \sum_{k=1}^{\infty} [-\,b_k(k\omega)^{-1} \cos k\omega t + a_k(k\omega)^{-1} \operatorname{sen} k\omega t]\,,$$

e con $H^h\colon X_1^{(m)} \to X_1^{(m+h)}$ indichiamo la h-ma iterazione di H.

Nei lavori $[\mathbf{1}]_{1,2}$ sono state valutate le norme k_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ degli operatori H^n nella topologia uniforme, ossia le più piccole costanti k_n per le quali

$$\|H^n x\|_\infty \leqslant k_n \|x\|_\infty\,, \qquad x \in X_1^{(0)},$$

ove $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$ e $f \in X_1^{(0)}$, cioè $m[f] = 0$, e $H^n x \in X_1^{(n)}$. I valori trovati per k_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e per $\tau = 2\pi/\omega$ sono i seguenti

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 4^{-1}(2\pi/\omega) = 1{,}5707963\,\omega^{-1},\\
k_2 &= 0{,}032075 \quad (2\pi/\omega)^2 = 1{,}26627\,\omega^{-2},\\
k_3 &= 0{,}0052083 \ (2\pi/\omega)^3 = 1{,}2919\,\omega^{-3},\\
k_4 &= 0{,}0008148 \ (2\pi/\omega)^4 = 1{,}2699\,\omega^{-4},\\
k_5 &= 0{,}0001302 \ (2\pi/\omega)^5 = 1{,}2750\,\omega^{-5},\\
k_6 &= 0{,}00001995(2\pi/\omega)^6 = 1{,}2275\,\omega^{-6}.
\end{aligned}
$$

Assumiamo in $X^{(m)}$ la norma

$$\|x\|_m = \max_{0 \leqslant s \leqslant m} \max_t |x^{(s)}(t)|$$

e quindi $\|x\|_0 = \max_t |x(t)|$, cioè la stessa norma $\|x\|_\infty$ considerata avanti.

Consideriamo la funzione f in (1) e sia $X = X^{(m)}$ il corrispondente spazio. Il problema (1) è ridotto alla forma

$$Ex = Nx\,,$$

dove $Ex = x^{(n)}$, $\mathscr{D}(E) = X^{(n)} \subset X$, $E\colon \mathscr{D}(E) \to Y$ ed N è l'operatore (di Nemitsky) $Nx = f[t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(m)}(t)]$ ossia $N\colon X \to Y$ con $Y = X^{(0)}$. Come è stato provato in $[\mathbf{1}]_{1,2}$ e $[\mathbf{2}]_{1,2,3}$ il problema (1) è equivalente al sistema di equazioni ausiliaria e di biforcazione

$$x = Px + H^n(I - Q)\,Nx\,, \tag{3}$$

$$QNx = 0\,, \tag{4}$$

ove $H^n z$ per $z \in X_1^{(0)} = Y$, $m[z] = 0$, è l'unica funzione periodica a media nulla, di classe $C^{(n)}$, la cui derivata n-ma è z. Inoltre $Q\colon Y \to Y_0$ è l'operazione proiezione definita da $y \to m[y]$ per $y \in Y = X^{(0)}$ esattamente come P. Assoggettiamo X e Y a delle limitazioni. Con $S_p^{(m)}$ e $S_d^{(m)}$ indichiamo le famiglie di tutti gli elementi $x \in X^{(m)}$ rispettivamente pari e dispari, a media nulla, ossia

$$S_p^{(m)} = [x \in X^{(m)} \,|\, x(-t) = x(t),\ m[x] = 0] \subset X^{(m)},$$

$$S_d^{(m)} = [x \in X^{(m)} \,|\, x(-t) = -x(t),\ m[x] = 0] \subset X^{(m)},$$

notando che la condizione richiesta $m[x]=0$ per gli elementi di $S_d^{(m)}$ è una conseguenza della periodicità e della disparità. Le due famiglie $S_p^{(m)}$ e $S_d^{(m)}$ sono spazi di Banach con la stessa norma $\|x\|_m$ che abbiamo scelta per $X^{(m)}$.

Assumiamo $X = S_p^{(m)}$ se n è dispari, $X = S_d^{(m)}$ se n è pari e $Y = S_d^{(0)}$. A causa delle ipotesi (2) $Nx = f[t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(m)}(t)]$ è in ogni caso una funzione continua dispari. In altre parole, se prendiamo $\mathscr{D}(E) = S_p^{(n)}$ per n dispari, $\mathscr{D}(E) = S_d^{(n)}$ per n pari, abbiamo $\mathscr{D}(E) \subset X$, $E\colon \mathscr{D}(E) \to Y = S_d^{(0)}$, $N\colon X \to Y = S_d^{(0)}$, $\mathfrak{R}(E) = Y_1 = Y = S_d^{(0)}$ [$\mathfrak{R}(E)$ è il «range» di E, ossia l'immagine di $\mathscr{D}(E)$ rispetto ad E stesso] e $H^n\colon Y_1 \to \mathscr{D}(E)$ è l'inversa di $E\colon \mathscr{D}(E) \to Y_1$. Inoltre $X_0 = \{0\}$, $Y_0 = \{0\}$, $Qy = 0$, $QNx = 0$ per tutti gli $x \in X$, $y \in Y$ e l'equazione di biforcazione (4) è evidentemente soddisfatta, mentre l'equazione ausiliaria (3) si riduce alla seguente

$$x = H^n(I - Q)Nx\,. \tag{5}$$

Notiamo che la (5) è equivalente a ciascuna delle relazioni $x^{(s)} = H^{n-s}(I - Q)Nx$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (anche per $s = n$ se si prende $H^0 = I$ e $k_0 = 1$).

Dimostriamo il seguente teorema di esistenza.

Teorema. *Se $f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m)})$ è una funzione continua in R^{m+2}, periodica in t di periodo $\tau = 2\pi/\omega$ e verificante le* (2) *e se esistono due costanti positive R, R' tali che $k_nR' \leqslant R$ e $|f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m)})| \leqslant R'$ per tutti i t e per ogni $|x| \leqslant k_nR'$, $|x'| \leqslant k_{n-1}R'$, $|x''| \leqslant k_{n-2}R'$, $\ldots$, $|x^{(m)}| \leqslant k_{n-m}R'$, allora l'equazione* (1) *ha almeno una soluzione $x(t)$ continua con $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, periodica di periodo τ, a media nulla e verificante le condizioni $|x(t)| \leqslant k_nR' \leqslant R$, $|x'(t)| \leqslant k_{n-1}R'$, $|x''(t)| \leqslant k_{n-2}R'$, $\ldots$, $|x^{(m)}(t)| \leqslant k_{n-m}R'$, con $x(t)$ pari se n è dispari, $x(t)$ dispari se n è pari $\big($in ogni caso $x^{(n)}$ è dispari e inoltre $|x^{(n)}(t)| \leqslant R'$, $|x^{(n-1)}(t)| \leqslant k_1R'$, $\ldots$, $|x^{(m+1)}(t)| \leqslant k_{n-m-1}R'\big)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con Δ il sottoinsieme di tutti gli $x \in X$ con $\|x\|_0 \leqslant k_nR'$, $\|x'\|_0 \leqslant k_{n-1}R'$, $\|x''\|_0 \leqslant k_{n-2}R'$, $\ldots$, $\|x^{(m)}\|_0 \leqslant k_{n-m}R'$. Il sottoinsieme Δ è un sottoinsieme chiuso e convesso di X. Con $y = Tx$, ossia $T\colon \Delta \to \Delta$, denotiamo la trasformazione definita da $y = H^n(I-Q)Nx$. Se $x \in \Delta$ allora

$$|x(t)| \leqslant k_nR',\ |x'(t)| \leqslant k_{n-1}R',\ |x''(t)| \leqslant k_{n-2}R',\ \ldots,\ |x^{(m)}(t)| \leqslant k_{n-m}R',$$

quindi $|(Nx)(t)| = |f[t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(m)}(t)]| \leqslant R'$, $\|Nx\|_0 \leqslant R'$ e $k_n\|Nx\|_0 \leqslant k_nR' \leqslant R$. Inoltre $y = H^n(I-Q)Nx$ possiede derivate continue fino a quella di ordine n, cioè $y^{(s)} = H^{n-s}(I-Q)Nx$ ($s = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$) per il modo con cui si è definito H^n. Conseguentemente $|y(t)| \leqslant \|y\|_0 \leqslant k_n R' \leqslant R$, $|y'(t)| \leqslant \|y'\|_0 \leqslant k_{n-1}R'$, $|y''(t)| \leqslant \|y''\|_0 \leqslant k_{n-2}R'$, ..., $|y^{(m)}(t)| \leqslant \|y^{(m)}\|_0 \leqslant k_{n-m}R'$ e pertanto $T: \Delta \to \Delta$. Notiamo che $T: \Delta \to \Delta$ è compatto in X, cioè nella topologia di $X^{(m)}$, ossia $C^{(m)}$. Invero se $\{x_k\}$ è una successione in Δ e $y_k = Tx_k$ allora $|y_k(t)| \leqslant k_n R' \leqslant R$, $|y_k'(t)| \leqslant k_{n-1}R'$, $|y_k''(t)| \leqslant k_{n-2}R'$, ..., $|y_k^{(m)}(t)| \leqslant k_{n-m}R'$ ed anche $|y_k^{(m+1)}(t)| = |H^{n-m-1}(I-P)Nx_k| \leqslant k_{n-m-1}R'$ per ogni t e k poichè $n-m-1 \geqslant 0$. Pertanto $y_k, y_k', y_k'', ..., y_k^{(m)}$ sono non solo continue ma anche equilipschitziane, equilimitate ed equicontinue. Dal teorema di Ascoli (in $C^{(m)}$) segue che vi è una sottosuccessione che indichiamo ancora con $\{y_k\}$ tale che y_k converge a qualche y in $C^{(m)}$, vale a dire $y_k \to y$, $y_k' \to y'$, $y_k'' \to y''$, ..., $y_k^{(m)} \to y^{(m)}$ uniformemente. Dunque la trasformazione $T: \Delta \to \Delta$ è continua e compatta nella topologia $C^{(m)}$ e trasforma l'insieme chiuso e convesso Δ in se stesso. Dal teorema di Schauder, T ha almeno un punto fisso $y = Ty \in \Delta$, ossia

$$y(t) = H^n(I-Q)f[t, y(t), y'(t), ..., y^{(m)}(t)]$$

e quindi $y \in \mathscr{D}(E) \subset C^{(m)}$, $y^{(n)} = (I-Q)f$ con $Qf = 0$, e infine $y^{(n)} = f$, ossia

$$y^{(n)}(t) = f[t, y(t), y'(t), ..., y^{(m)}(t)], \quad -\infty < t < +\infty .$$

Osservazione 1. Nel teorema dimostrato invece di richiedere l'esistenza delle costanti R ed R' come indicato, può essere più comodo supporre l'esistenza di una costante $r > 0$ tale che risulti $|f(t, x, x', x'', ..., x^{(m)})| \leqslant r$ per ogni t e per tutti gli $x, x', x'', ..., x^{(m)}$ verificanti le condizioni $|x| \leqslant k_n r$, $|x'| \leqslant k_{n-1}r$, $|x''| \leqslant k_{n-2}r$, ..., $|x^{(m)}| \leqslant k_{n-m}r$. Nella dimostrazione possiamo semplicemente prendere $X = X^{(m)}$ e definire Δ come il sottoinsieme di tutti gli elementi $x \in X^{(m)}$ con $|x(t)| \leqslant k_n r$, $|x'(t)| \leqslant k_{n-1}r$, $|x''(t)| \leqslant k_{n-2}r$, ..., $|x^{(m)}(t)| \leqslant k_{n-m}\, r$.

Invero basta assumere nel teorema $R' = r$, $R = k_n r$ per ricondursi alle suddette condizioni.

Osservazione 2. Le proprietà delle soluzioni $x(t)$ indicate nel teorema riguardano soltanto le soluzioni delle quali dimostriamo l'esistenza. L'equazione (1) può avere altre soluzioni non verificanti le ipotesi indicate. Per esempio l'equazione $x' = 0$ ha tutte le soluzioni periodiche $x(t) = c$, delle quali soltanto la $x(t) = 0$ ha media nulla. Così l'equazione $x' = -\operatorname{sen} t$ ha tutte le soluzioni periodiche $x(t) = c + \cos t$, delle quali solo la $x(t) = \cos t$ ha media nulla. Analogamente l'equazione $x' = \cos t$ ha tutte le soluzioni periodiche $x = c + \operatorname{sen} t$ con $x'(t)$ pari e pertanto certamente non rientra nel teorema dimostrato. Rileviamo, come del resto è chiaro, che le ipotesi fatte nel teorema sono sufficienti e non necessarie per il verificarsi della tesi (cfr. l'ultimo degli esempi su esposti).

Per $m = 0$ si ha l'equazione $x^{(n)} = f(t, x)$ e dal teorema dimostrato discendono come casi particolari i due seguenti ([**1**]$_2$, n. **2**).

Teorema I. *Se n è pari, se $f(t, x)$ è continua in R^2 con $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, -x) = -f(t, x)$ e se, infine, R ed R' sono due costanti positive tali che $k_n R' \leqslant R$ e $|f(t, x)| \leqslant R'$ per ogni t e per tutti gli $|x| \leqslant R$, allora l'equazione $x^{(n)} = f(t, x)$ ha almeno una soluzione $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continua, periodica di periodo τ, dispari, con $|x(t)| \leqslant R$.*

Teorema II. *Se n è dispari, se $f(t, x)$ è continua in R^2 con $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, x) = -f(t, x)$ e se, infine, R ed R' sono due costanti positive tali che $k_n R' \leqslant R$ e $|f(t, x)| \leqslant R'$ per ogni t e per tutti gli $|x| \leqslant R$, allora l'equazione $x^{(n)} = f(t, x)$ ha almeno una soluzione $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continua, periodica di periodo τ, pari e a media nulla, con $|x(t)| \leqslant R$.*

2. - Esempi

(a) L'equazione

$$x'' = G(x') \operatorname{sen} F(x) + p(t) \,,$$

ove $F(x)$, $G(x')$ sono funzioni continue $R \to R$, $F(x)$ dispari, $|G(x')| \leqslant a$ (costante positiva), $p(t)$ periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, continua e dispari, $|p(t)| \leqslant b$ (costante positiva), ha almeno una soluzione $x(t)$ dispari, periodica di periodo τ e con $|x(t)| \leqslant k_2(a+b)$. Infatti $f(t, x, x') = G(x') \operatorname{sen} F(x) + p(t)$ è una funzione continua $R^3 \to R$, periodica in t di periodo τ, verifica la condizione $f(t, x, x') = -f(-t, -x, x')$, inoltre $|f(t, x, x')| \leqslant a + b$ e pertanto per $r = a + b$ l'equazione considerata ha almeno una soluzione $x(t)$, dispari, periodica di periodo τ, con $|x(t)| \leqslant k_2 r = 1{,}26627\, \omega^{-2}(a+b)$.

Ad esempio per l'equazione

$$x'' = (2/\pi)(\operatorname{arctg} x') \operatorname{sen}(x^{1/3}) + \operatorname{sen} t$$

è $\tau = 2\pi$, $\omega = 1$, $a = 1$, $b = 1$ e quindi essa ammette almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, con $|x(t)| \leqslant 2{,}53254$. Analogamente dicasi per l'equazione

$$x'' = 2x'(1 + x'^2)^{-1} \operatorname{sen}(x^{1/3}) + \operatorname{sen} t \,.$$

Come ulteriore esempio consideriamo l'equazione di cui sopra con $G(x') = a$ (costante reale), ossia l'equazione

$$x'' = a \operatorname{sen} F(x) + p(t) .$$

Noi prendemmo in considerazione questa equazione già nel lavoro [**1**]$_1$, ove mostrammo che essa ha sempre almeno una soluzione periodica dello stesso periodo τ e dispari. Nei termini di cui sopra abbiamo $G(x') = a$, e pertanto $|x(t)| \leqslant k_2(|a| + b) = 1{,}26627\, \omega^{-2}(|a| + b)$.

Come caso particolare, per $a = -1$, $F(x) = x$ si ha l'equazione

$$x'' + \operatorname{sen} x = p(t) .$$

È così dimostrato che per $p(t)$ continua, dispari, e periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, l'equazione delle oscillazioni forzate del pendolo ha sempre almeno una soluzione dispari dello stesso periodo τ della forza esterna.

Quest'ultimo risultato dà così risposta affermativa, almeno per $p(t)$ dispari, al quesito posto da S. Fučík, se cioè tale equazione ha sempre soluzioni periodiche dello stesso periodo della forza esterna (cfr. S. Fučík, Atti del S.A.F.A., III, Bari, Settembre 1978).

(b) L'equazione

$$x'' = ax^3 + bxx'^2 + c \operatorname{sen} t ,$$

con a, b, c reali, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, se si può determinare una costante $r > 0$ tale che risulti

$$|a|(1{,}26627\, r)^3 + |b|(1{,}26627\, r)(1{,}57079\, r)^2 + |c| \leqslant r ,$$

ossia

$$(2{,}03038\,|a| + 3{,}12437\,|b|)r^3 + |c| \leqslant r .$$

Questa condizione è, per esempio, verificata se si assume $a = b = 1$, $c = 1/10$, $r = 1/3$, in quanto risulta $(2{,}03038 + 3{,}12437)(1/27) + 0{,}1 = 0{,}29092 < 1/3 = r$. Pertanto l'equazione

$$x'' = x^3 + xx'^2 + (1/10) \operatorname{sen} t$$

ha almeno una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto con $|x(t)| \leqslant 1{,}26627(1/3) = 0{,}42209$.

Come altro esempio consideriamo l'equazione

$$x'' = (1/5)(x^3 + xx'^2) + (1/4)\,\mathrm{sen}\,t\,,$$

la quale ammette almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, con $|x(t)|\leqslant 1$. Infatti per $r = (k_2)^{-1} = (1{,}26627)^{-1} = 0{,}78972$, $a = b = 1/5$, $c = 1/4$, si ottiene $(1/5)(2{,}03038 + 3{,}12437)(0{,}4925149) + 0{,}25 = 0{,}75776 < 0{,}78972 = r$ ed è $|x(t)|\leqslant k_2 r = k_2(k_2)^{-1} = 1$.

(c) L'equazione

$$x^{(4)} = ax^3 + b\,\mathrm{sen}\,t\,,$$

con a, b reali, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, se si può trovare una costante $r > 0$ tale che risulti $|a|(1{,}2699\,r)^3 + |b|\leqslant r$, ossia $2{,}0479\,|a|r^3 + |b|\leqslant r$. Questa, condizione è, ad esempio, verificata se si assume $a = 1/3$, $b = 1/4$, $r = 1$ e così l'equazione

$$x^{(4)} = (1/3)\,x^3 + (1/4)\,\mathrm{sen}\,t$$

ha almeno una soluzione $x(t)$ del tipo indicato con $|x(t)|\leqslant 1{,}2699$.

(d) L'equazione

$$x''' = ax^2x' + b\,\mathrm{sen}\,t\,,$$

con a, b reali, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, pari e a media nulla, se si può determinare una costante $r > 0$ tale che si abbia

$$|a|(1{,}2919)^2 1{,}26627\,r^3 + |b|\leqslant r\,,$$

ossia $2{,}1134\,|a|r^3 + |b|\leqslant r$. Ciò si verifica, ad esempio, se è $a = 1/4$, $b = 2/5$, $r = 1$ e così l'equazione

$$x''' = (1/4)\,x^2\,x' + (2/5)\,\mathrm{sen}\,t$$

ha almeno una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto con $|x(t)|\leqslant 1{,}2919$.

Un altro esempio è dato dall'equazione

$$x''' = x'[x^3 + (1/2)\cos 2x] + (1/100)\,\mathrm{sen}\,t$$

che ammette almeno una soluzione $x(t)$ del tipo su indicato con $|x(t)| \leqslant 1{,}2919\, r = 0{,}12919$ avendo scelto $r = 1/10$ e notando che

$$0{,}126627[(1{,}2919/10)^3 + 0{,}5] + 1/100 = 0{,}07359 < 1/10 = r\,.$$

(e) L'equazione

$$x^{(6)} = (a + bx')\,\mathrm{sen}\, F(x) + (c + dx''')\,\mathrm{sen}\, G(x'') + e\,\mathrm{sen}\, t\,,$$

con a, b, c, d, e reali, $F(x)$ e $G(x'')$ funzioni continue $R \to R$, dispari, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, se è possibile determinare una costante $r > 0$ tale che risulti

$$|a| + |b|1{,}2750\, r + |c| + |d|\, 1{,}2919\, r + |e| \leqslant r\,.$$

Questa condizione è soddisfatta se si assume $r \geqslant (1 - s)^{-1}(|a| + |c| + |e|)$, $s = 1{,}2750\,|b| + 1{,}2919\,|d| < 1$, con a, c, e arbitrari.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^{(6)} = (1 + 3^{-1}x')\,\mathrm{sen}\,(x^3) + (1 + 3^{-1}x''')\,\mathrm{sen}\, x'' + \mathrm{sen}\, t\,.$$

Si ha $a = c = e = 1$, $b = d = 1/3$ e quindi $s = 1{,}2750\,|b| + 1{,}2919\,|d| = 0{,}8556$. Se si assume, come è lecito, $r = (1 - 0{,}8556)^{-1}3 = 20{,}79$, si può affermare che l'equazione ammette una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto con $|x(t)| \leqslant 1{,}2275\, r = 25{,}52$.

(f) L'equazione

$$x^{(5)} = ax' + bx''' + cF(x)\,\mathrm{sen}\, t\,,$$

con a, b, c reali, $F(x)$ funzione continua e $|F(x)| \leqslant 1$, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, pari e a media nulla, se è possibile trovare una costante $r > 0$ tale che sia

$$|a|1{,}2699\, r + |b|1{,}26627\, r + |c| \leqslant r\,.$$

Questa condizione è soddisfatta se si assume $r \geqslant (1 - s)^{-1} c$, $s = |a|1{,}2699 + |b|1{,}26627 < 1$ e c arbitrario.

Ad esempio l'equazione

$$x^{(5)} = (1/3)(x' + x''') + 2x(1 + x^2)^{-1}\,\mathrm{sen}\, t$$

ammette una soluzione $x(t)$ del tipo indicato. Infatti in questo caso è $a = b = 1/3$, $s = 0{,}8454$ e inoltre prendendo $c = 1$ risulta $r \geqslant (1 - 0{,}8454)^{-1} = 6{,}4683$ e scegliendo $r = 6{,}4683$ si ha $|x(t)| \leqslant 1{,}2750\, r = 8{,}2471$.

(g) L'equazione

$$x^{(5)} = axx' + bx'''(x^2 + x''^2 + x^{(4)^2} + 1) + c \operatorname{sen} t\,,$$

con a, b, c reali, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, pari e a media nulla, se si può determinare una costante $r > 0$ tale che

$$|a|(1{,}2750\, r)(1{,}2699\, r) + |b|\, 1{,}26627\, r \cdot$$

$$\cdot [(1{,}2750\, r)^2 + (1{,}2919\, r)^2 + (1{,}5708\, r)^2 + 1] + |c| \leqslant r\,,$$

ossia

$$1{,}6191\, |a|\, r^2 + 7{,}2963\, |b|\, r^3 + 1{,}26627\, |b|\, r + |c| \leqslant r\,.$$

Ad esempio l'equazione

$$x^{(5)} = (1/4)\, xx' + (1/20)\, x'''(x^2 + x''^2 + x^{(4)^2} + 1) + (1/10) \operatorname{sen} t$$

ammette una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto. Infatti per essere $a = 1/4$, $b = 1/20$, $c = 1/10$, scegliendo $r = 1$ risulta $1{,}6191(1/4) + 7{,}2963(1/20) + 1{,}26627(1/20) + 1/10 = 0{,}932928 < 1 = r$ ed è $|x(t)| \leqslant 1{,}2750$.

3. - Una nuova valutazione di k_2 per funzioni dispari

Notiamo che le costanti k_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ determinate in $[\mathbf{1}]_{1,2}$ e i cui valori sono stati riportati nel n. **1**, si riferiscono a funzioni $x(t)$ continue, periodiche di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, a media nulla, ma non necessariamente pari o dispari. La questione che si presenta è quella di stabilire se le suddette costanti si possono prendere più piccole quando si sappia che $x(t)$ è dispari. Questa circostanza si presenta nelle applicazioni (n. **2**) del teorema del n. **1** e dei suoi casi particolari $[\mathbf{1}]_{1,2}$. Noi ci limitiamo ad osservare che si ha

$$k_2 = 0{,}032075(2\pi/\omega)^2 = 1{,}26627\, \omega^{-2} \qquad \text{se } x(t) \text{ è pari}\,,$$

$$k_2 = 0{,}03125\ (2\pi/\omega)^2 = 1{,}2337\, \omega^{-2} \qquad \text{se } x(t) \text{ è dispari}$$

e quindi nelle applicazioni dei teoremi su ricordati siamo in grado di usare costanti più piccole di quelle indicate.

Se $x(t)$ è una funzione continua, periodica di periodo $1(\omega = 2\pi)$ e ha media nulla, allora la sola funzione continua $y(t)$, periodica di periodo 1, a media nulla e tale che $y'' = x(t)$, è data da

$$y(t) = \int_0^1 K_2(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \text{ (1)} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)\,,$$

dove

$$K_2(t, s) = \begin{cases} -12^{-1} + 2^{-1}(t-s) - 2^{-1}(t-s)^2 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ -12^{-1} + 2^{-1}(s-t) - 2^{-1}(s-t)^2 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Se $x(s)$ è dispari anche $y(t)$ è dispari e per $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ si ha $x(1-t) = -x(t)$. Si può scrivere

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{1/2} K_2(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s + \int_{1/2}^1 K_2(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{1/2} K_2(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s + \int_{1/2}^0 K_2(t, 1-s)\, x(1-s)\, \mathrm{d}(1-s) \\ &= \int_0^{1/4} K_2(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s - \int_0^{1/2} K_2(t, 1-s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{1/2} [K_2(t, s) - K_2(t, 1-s)]\, x(s)\, \mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

ove

$$K_d(t, s) = K_2(t, s) - K_2(t, 1-s)$$

$$= -12^{-1} + 2^{-1}(t-s) - 2^{-1}(t-s)^2 - [-12^{-1} + 2^{-1}(1-s-t) - 2^{-1}(1-s-t)^2]$$

$$= -s + 2st \qquad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1/2\,,$$

$$K_d(t, s) =$$

$$= -12^{-1} + 2^{-1}(s-t) - 2^{-1}(s-t)^2 - [-12^{-1} + 2^{-1}(1-s-t) - 2^{-1}(1-s-t)^2]$$

$$= -t + 2st \qquad \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1/2\,.$$

Segue che per ogni t, $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, la funzione $K_d(t, s)$ della sola s, $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, si annulla per $s = 0$ e $s = 1/2$, è lineare in $0 \leqslant s \leqslant t$ e $t \leqslant s \leqslant 1/2$ ed ha valore

---

(1) $K_2(t, s)$ è la funzione che nel n. **4** di [**1**]$_1$ è stata indicata con $K_0(t, s)$.

$-t+2t^2$ per $s=t$, pertanto

$$\int_0^{1/2} |K_d(t,s)|\,ds = (1/4)(t-2t^2) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1/2)\,.$$

Il massimo della funzione $(1/4)(t-2t^2)$ si ha per $t=1/4$ ed è

$$\max_t \int_0^{1/2} |K_d(t,s)|\,ds = 1/32 = 0{,}03125$$

e pertanto

$$\max_t |y(t)| \leqslant 0{,}03125 \max_t |x(t)|$$

per funzioni $x(t)$, $y(t)$ come indicato, periodiche di periodo 1. Conseguentemente per funzioni $x(t)$, dispari, periodiche di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, a media nulla e $y(t)$ anch'esse dispari, a media nulla, periodiche di periodo τ e con $y'' = x(t)$, si ha

$$|y(t)| \leqslant 0{,}03125(2\pi/\omega)^2 = 1{,}2337\,\omega^{-2},$$

ossia, per funzioni dispari,

$$k_2 = \|H(I-P)\| = 1{,}2337\,\omega^{-2}.$$

Per funzioni $x(t)$ pari la costante k_2 è quella stessa che si ha per funzioni arbitrarie, ossia $k_2 = 0{,}032075$ per $\tau = 1$ e $k_2 = 0{,}032075(2\pi/\omega)^2 = 1{,}26627\omega^{-2}$ per $\tau = 2\pi/\omega$. Invero, denotata con k_2' la nuova costante, si ha intanto $k_2' \leqslant k_2$ e d'altra parte il particolare esempio $x(t)$ che abbiamo usato in [**1**]$_2$ per provare che $k_2 \geqslant 0{,}032075$, era pari. Segue $k_2' = K_2 = 0{,}032075$ per $\tau = 1$ come affermato.

4. - L'equazione $x'' = a\,x^3 + b\,\mathrm{sen}\,t$

In questo caso è $n=2$, $f(t,x) = ax^3 + b\,\mathrm{sen}\,t$, $\omega = 1$, $\tau = 2\pi$ e quindi l'equazione considerata ammette almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, se si può determinare una costante $R > 0$ tale che risulti $1{,}2337(|a|R^3 + |b|) \leqslant R$.

Ad esempio per $|a| \leqslant 1$, avendosi $1{,}2337(|a|R^3 + |b|) \leqslant 1{,}2337(R^3 + |b|)$, è sufficiente determinare b in modo tale che si abbia $1{,}2337(R^3 + |b|) \leqslant R$. Da questa relazione si deduce $|b| \leqslant 0{,}81057R - R^3$ e la migliore scelta di R è $R = 0{,}519797$, conseguentemente si ha $|b| \leqslant 0{,}28$.

Terminiamo ricordando che $[2]_2$ l'equazione $x'' = ax^3 + b \operatorname{sen} t$ ha soluzioni periodiche pari per $a = b = 1$.

Osservazione 1. Sia detto esplicitamente che le restrizioni che abbiamo date per le equazioni (a)-(g) del n. **2**, come per la presente equazione, sono soltanto sufficienti per l'esistenza delle soluzioni che ci interessano. Per esempio in questo n. **4**, noi abbiamo concluso che per $|a| \leq 1$, $|b| \leq 0{,}28$ l'equazione $x'' = ax^3 + b \operatorname{sen} t$ ha sempre almeno una soluzione dispari e periodica $x(t)$ di periodo 2π. Naturalmente questa equazione può avere soluzioni dispari e periodiche di periodo 2π anche per valori di a e b in un dominio più largo. Ad esempio Cesari dimostrò, in $[2]_2$, sempre mediante il metodo alternativo, ma con un ragionamento più elaborato, che l'equazione $x'' + x^3 = \operatorname{sen} t$ (cioè per $a = -1$, $b = 1$) ha almeno una soluzione dispari e periodica di periodo 2π.

Osservazione 2. Circa il problema dell'unicità delle soluzioni di cui abbiamo dimostrato l'esistenza, o quello della determinazione del numero di soluzioni, la letteratura è assai vasta. Citiamo qui, solo come indicativi, i seguenti lavori: V. Maric - M. Tomic, J. Math. Anal. Appl. **5** (1962), 147-149; D. Willet, SIAM Review **9** (1967), 726-728. Si veda anche, in proposito, il libro: L. Bieberbach, *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen in Reellen Gebiete*, Springer 1956, ove tra l'altro è presentato uno studio del problema $x'' + f(x) = p(t)$, $f(x)$ e $p(t)$ dispari e periodiche di periodo 2π ed $f(x)$ limitata e lipschitziana. Per quanto riguarda il problema generale delle soluzioni di equazioni differenziali non lineari e del loro comportamento si veda ad esempio il libro citato e l'altro di L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, 3ª ed., 1971.

Bibliografia

[1] V. E. Bononcini: $[\cdot]_1$ *Soluzioni periodiche di equazioni differenziali del secondo ordine*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 391-399; $[\cdot]_2$ *Soluzioni periodiche di equazioni differenziali della forma $x^{(n)} = f(t, x)$*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 449-458.

[2] L. Cesari: $[\cdot]_1$ *Existence theorems for periodic solutions of nonlinear lipschitzian differential systems and fixed point theorems*, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Ann. Math. Stud. Princeton, New York **5** (1960), 115-172; $[\cdot]_2$ *Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations*, Contributions to differential equations, Ed. Wiley **1** (1963), 149-187; $[\cdot]_3$ *Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method*, 1-197 (dal libro: L. Cesari, R. Kannan, J. D. Schuur, *Nonlinear functional analysis and differential equations*, Ed. Dekker, New York 1976).

Summary

This paper is devoted to the proof, under suitable conditions, of the existence of at least one periodic solution to differential equations of the kind $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m)})$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$. *The theorem of existence is based on the use of Schauder's fixed point theorem, on the use of the alternative method of Cesari, and on the exact evaluations of the norm of suitable linear operators. The results of this paper are an extension of previous ones obtained by the Autor.*

* * *