Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 693-700

CARMELO TOTARO (*)

Su particolari movimenti di un satellite artificiale (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. – In una mia nota [3] ho scritto le equazioni di prima e seconda approssimazione che governano i movimenti di un satellite artificiale, $\mathscr{C}$, sotto l'ipotesi [2] che la massima dimensione, $2r$, di $\mathscr{C}$ non sia del tutto trascurabile rispetto alla distanza, R, che separa il suo baricentro, G, dal centro di attrazione newtoniana Q. Le incognite fondamentali del problema sono il raggio vettore QG e la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di $\mathscr{C}$.

In [3] si mostra che le equazioni cardinali, cui devono soddisfare i detti vettori incogniti, dipendono dall'omografia d'inerzia σ e si può porre

$$(1.1) \qquad \sigma = \chi\lambda\,, \qquad \text{con} \qquad (1.2) \quad \lambda = \left(\frac{r}{R_u}\right)^2\,,$$

ove R_u è il modulo di QG valutato ad un istante opportunamente prefissato; χ è un'omografia le cui componenti hanno ancora le dimensioni di un momento d'inerzia. Quindi i vettori incogniti dipendono pure da λ. Supposto di potere sviluppare questi in serie di potenze di λ, fermando gli sviluppi ai termini del primo ordine, si ha

$$(1.3) \qquad QG = \boldsymbol{G}_0 + \boldsymbol{G}_1\lambda\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1\lambda\,,$$

ove $\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_1$ sono funzioni del tempo da determinare.

Si dimostra anche che $\boldsymbol{G}_0$ e $\boldsymbol{\omega}_0$ devono essere soluzioni del seguente sistema

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 30-I-1979.

di equazioni

$$
(1.4)\qquad
\begin{aligned}
&\ddot{\boldsymbol{G}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0\wedge\boldsymbol{G}_0 + 2\boldsymbol{\omega}_0\wedge\dot{\boldsymbol{G}}_0 + \boldsymbol{\omega}_0\wedge(\boldsymbol{\omega}_0\wedge\boldsymbol{G}_0) = -\frac{hM}{R_0^2}\boldsymbol{H}_0\,,\\
&\chi\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_0\wedge\chi\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{3hM}{R_0^3}\boldsymbol{H}_0\wedge\chi\boldsymbol{H}_0\,,
\end{aligned}
$$

ove h è la costante di gravitazione universale ed M la massa di Q; si è posto inoltre

$$
(1.5)\qquad \boldsymbol{G}_0 = R_0\boldsymbol{H}_0\,,
$$

essendo R_0 il modulo ed $\boldsymbol{H}_0$ il versore.

Determinati $\boldsymbol{G}_0$ ed $\boldsymbol{\omega}_0$, un secondo sistema di equazioni consente di caratterizzare $\boldsymbol{G}_1$ ed $\boldsymbol{\omega}_1$. Poichè in questo lavoro non intendiamo occuparci di questi ultimi due vettori non trascriveremo le relative equazioni.

È noto che (1.5) è la soluzione di $(1.4)_1$ se

$$
(1.6)\qquad R_0 = \frac{p}{1+e\cos\theta}\,,\qquad R_0^2\,\dot{\theta} = c\,,
$$

con

$$
(1.7)\qquad p = \frac{c^2}{hM}\,,
$$

ove θ è l'ascissa angolare nel piano del moto, c la costante delle aree, che supporremo differente da zero, p il parametro, e l'eccentricità.
Per $\boldsymbol{H}_0$, versore di $QG_0 = \boldsymbol{G}_0$, e per il versore $\boldsymbol{u}$ ortogonale al piano del moto, si hanno le equazioni

$$
(1.8)\qquad \frac{\mathrm{d}_a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0\wedge\boldsymbol{H}_0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}_a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} = 0\,,
$$

ove

$$
(1.9)\qquad \boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{c}{R_0^2}\boldsymbol{u}\,,
$$

è la velocità angolare nel moto di G_0 intorno a Q. Si può supporre sempre $c > 0$ orientando $\boldsymbol{u}$ in verso appropriato. Con $\mathrm{d}_a/\mathrm{d}t$ si indica la derivata temporale assoluta. Come è evidente a priori e come si può pure provare formalmente, (1.5) soddisfa l'equazione $(1.4)_1$ *qualunque* sia il vettore $\boldsymbol{\omega}_0$.

Notiamo incidentalmente che l'equazione dei momenti $(1.4)_2$, nel caso giroscopico, $\chi_2 = \chi_1$, ammette l'integrale primo

$$p_3 = \text{cost.}\,, \tag{1.10}$$

essendo p_3 la componente di $\boldsymbol{\omega}_0$ secondo l'asse giroscopico $G_0\xi_3$.

2. – Nel presente lavoro ci proponiamo di provare che nella classe dei movimenti di $\mathscr{C}$ tali che

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0\,, \tag{2.1}$$

gli *unici* movimenti dinamicamente possibili sono movimenti in cui G_0 si muove di moto circolare uniforme mentre un asse principale d'inerzia di $\mathscr{C}$ conserva costantemente la direzione di $\boldsymbol{H}_0$ ed un secondo asse principale d'inerzia si mantiene sempre ortogonale al piano del moto.

Tale tipo di movimento è stato già caratterizzato da E. Bentsik [**1**] imponendo a priori che il moto di G intorno a Q sia circolare uniforme. Qui invece si perviene allo stesso tipo di movimento imponendo a priori la condizione (2.1) e ricercandolo nella più ampia classe di tutti i moti di $\boldsymbol{G}$ intorno a Q dinamicamente possibili.

Nel caso giroscopico si hanno altri movimenti formalmente un pò più generali e che si riconducono al movimento sopra detto mediante la particolarizzazione di un certo arbitrario angolo costante.

Per la dimostrazione cominciamo con l'osservare che nel caso (2.1) le equazioni (1.8) dànno

$$\dot{\boldsymbol{H}}_0 = 0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{u}} = 0\,. \tag{2.2}$$

Quindi, durante il moto, $\boldsymbol{H}_0$ ed $\boldsymbol{u}$ si devono mantenere invariabili rispetto a $\mathscr{C}$; in altri termini, le componenti $H_1, H_2, H_3, u_1, u_2, u_3$ dei due vettori detti, valutate secondo gli assi principali d'inerzia di $\mathscr{C}$, $G_0\xi_1\xi_2\xi_3$, non dipendono dal tempo e pertanto non possono dipendere neppure da θ perchè

$$\frac{\mathrm{d}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{R_0^2}\,\frac{\mathrm{d}_r}{\mathrm{d}\theta}\,. \tag{2.3}$$

Tenendo conto di (2.1), (1.6) e (1.7) l'equazione dei momenti $(1.4)_2$ diviene

$$(-2e\chi\boldsymbol{u})\sin\theta + (e\boldsymbol{u}\wedge\chi\boldsymbol{u})\cos\theta + (\boldsymbol{u}\wedge\chi\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{H}_0\wedge\chi\boldsymbol{H}_0) = 0\,. \tag{2.4}$$

Dato che questa deve sussistere qualunque sia θ ed i coefficienti non possono dipendere da θ, si ottiene

$$(2.5)\qquad -2e\chi\boldsymbol{u}=0\,,\qquad e\boldsymbol{u}\wedge\chi\boldsymbol{u}=0\,,\qquad \boldsymbol{u}\wedge\chi\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{H}_0\wedge\chi\boldsymbol{H}_0=0\,.$$

Poichè è $\chi\boldsymbol{u}\neq 0$ le prime due equazioni si possono soddisfare solo con

$$(2.6)\qquad e=0\,.$$

Ciò significa che gli eventuali moti soddisfacenti alla condizione (2.1) devono essere ricercati nella classe dei moti circolari di G_0.

Supposto il satellite $\mathscr{C}$ completamente asimmetrico, cioè con l'ellissoide d'inerzia a tre assi, da $(2.5)_3$ segue

$$(2.7)\qquad u_2u_3=3H_2H_3\,,\qquad u_3u_1=3H_3H_1\,,\qquad u_1u_2=3H_1H_2\,,$$

a cui bisogna associare le condizioni

$$(2.8)\quad u_1^2+u_2^2+u_3^2=1\,,\qquad H_1^2+H_2^2+H_3^2=1\,,\qquad u_1H_1+u_2H_2+u_3H_3=0\,.$$

In primo luogo supponiamo $u_1, u_2, u_3, H_1, H_2, H_3$ tutti diversi da zero. Con questa ipotesi, da (2.7) segue

$$(2.9)\qquad u_2=\frac{H_2}{H_1}u_1\,,\qquad u_3=\frac{H_3}{H_1}u_1\,.$$

Sostituiamo queste in $(2.8)_1$

$$(2.10)\qquad \left(1+\frac{H_2^2}{H_1^2}+\frac{H_3^2}{H_1^2}\right)u_1^2=1\,,$$

cioè

$$(2.11)\qquad H_1=\pm u_1\,.$$

Dopo ciò, da (2.9) si ottiene

$$(2.12)\qquad H_2=\pm u_2\,,\qquad H_3=\pm u_3\,.$$

Si riconosce immediatamente che i risultati (2.11) e (2.12) sono incompatibili con le (2.7).

Concludiamo che per un satellite $\mathscr{C}$ con ellissoide d'inerzia a tre assi non sono possibili movimenti con $\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{\Omega}_0$ e con $u_1, u_2, u_3, H_1, H_2, H_3$ tutti diversi da zero.

Supponiamo adesso una sola componente di $\boldsymbol{u}$ uguale a zero; precisamente poniamo

$$u_3 = 0 \,. \tag{2.13}$$

Le (2.7) divengono

$$H_2 H_3 = 0 \,, \qquad H_3 H_1 = 0 \,, \qquad u_1 u_2 = 3 H_1 H_2 \,. \tag{2.14}$$

Segue

(2.15) $\quad H_3 = 0 \,,\quad$ oppure $\quad$ (2.16) $\quad H_1 = H_2 = 0 \,.$

Fissiamo l'attenzione sull'eventualità (2.15). Da $(2.8)_3$ si ottiene

$$u_2 = -\frac{H_1}{H_2} u_1 \,. \tag{2.17}$$

Sostituiamo in $(2.8)_1$,

$$\left(1 + \frac{H_1^2}{H_2^2}\right) u_1^2 = 1 \tag{2.18}$$

da cui si ha

$$H_2 = \pm u_1 \,, \tag{2.19}$$

e quindi la (2.17) diviene

$$H_1 = \mp u_2 \,. \tag{2.20}$$

I risultati (2.19) e (2.20) non soddisfano la $(2.14)_3$.

Concludiamo che anche nel caso $u_3 = H_3 = 0$ non si possono avere movimenti del tipo specificato.

Consideriamo allora l'eventualità (2.16); da $(2.7)_3$ segue

(2.21) $\quad u_2 = 0 \,,\quad$ oppure $\quad$ (2.22) $\quad u_1 = 0 \,.$

Fissando l'attenzione sul caso (2.21) risulta

$$\begin{aligned} u_1 &= \pm 1 \,, & u_2 &= 0 \,, & u_3 &= 0 \,, \\ H_1 &= 0 \,, & H_2 &= 0 \,, & H_3 &= \pm 1 \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Con questi valori si riesce a soddisfare tutte le equazioni (2.7) e (2.8).

Nel caso (2.22), si ha similmente

$$(2.24)\qquad \begin{array}{lll} u_1 = 0\,, & u_2 = \pm 1\,, & u_3 = 0\,, \\ H_1 = 0\,, & H_2 = 0\,, & H_3 = \pm 1\,. \end{array}$$

I casi (2.23) e (2.24), sostanzialmente equivalenti, rappresentano l'unica possibilità che ha il satellite $\mathscr{C}$ di muoversi con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0$ mentre G_0 deve percorrere una traiettoria circolare. Come abbiamo preannunziato, si ha che un asse principale d'inerzia deve avere direzione normale al piano del moto mentre un altro asse principale d'inerzia è diretto costantemente come $\boldsymbol{G}_0$.

Nel caso giroscopico

$$(2.25)\qquad \chi_2 = \chi_1\,,$$

l'equazione $(2.7)_3$ va eliminata. Restano le equazioni $(2.7)_1$, $(2.7)_2$ e le (2.8).

Supposto

$$(2.26)\qquad u_3 \neq 0\,,$$

da $(2.7)_{2,1}$ si ottiene

$$(2.27)\qquad u_1 = \frac{3H_3H_1}{u_3}\,, \qquad u_2 = \frac{3H_2H_3}{u_3}\,.$$

Sostituendo queste in $(2.8)_3$ si ha

$$(2.28)\qquad \frac{3H_3H_1^2}{u_3} + \frac{3H_3H_2^2}{u_3} + u_3H_3 = 0\,.$$

Se $H_3 \neq 0$, segue

$$(2.29)\qquad u_3^2 = -\,3(1 - H_3^2)\,.$$

Poichè il secondo membro è negativo questa espressione non può essere accettata. Bisogna allora supporre

$$(2.30)\qquad H_3 = 0\,.$$

Con questa ipotesi si ha

$$(2.31)\qquad \begin{array}{lll} u_1 = 0\,, & u_2 = 0\,, & u_3 = \pm 1\,, \\ H_1 = \cos\varphi\,, & H_2 = \sin\varphi\,, & H_3 = 0\,, \end{array}$$

ove φ è un angolo costante arbitrario. Si ha un tipo di movimento circolare in cui l'asse giroscopico ξ_3 si mantiene ortogonale al piano del moto. Per $\varphi = 0$ e per $\varphi = \pm\pi/2$ si ha una rappresentazione dei movimenti analoga a quella segnalata nel caso non giroscopico.

Abbandonando l'ipotesi (2.26) osserviamo che si possono soddisfare le $(2.7)_{1,2}$ con

$$u_3 = 0\,, \qquad H_3 = 0\,, \tag{2.32}$$

oppure con

$$u_3 = 0\,, \qquad H_1 = H_2 = 0\,. \tag{2.33}$$

Nella prima eventualità le rimanenti equazioni divengono

$$u_1^2 + u_2^2 = 1\,, \qquad H_1^2 + H_2^2 = 1\,, \qquad u_1 H_1 + u_2 H_2 = 0\,. \tag{2.34}$$

Da $(2.34)_3$ si ha

$$u_2 = -\frac{H_1}{H_2}\,u_1\,. \tag{2.35}$$

Sostituendo in $(2.34)_1$, segue

$$H_2 = \pm u_1\,, \tag{2.36}$$

e pertanto la (2.35) diviene

$$H_1 = \mp u_2\,. \tag{2.37}$$

Abbiamo così la soluzione

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos\varphi\,, & u_2 &= \sin\varphi\,, & u_3 &= 0\,, \\ H_1 &= \mp \sin\varphi\,, & H_2 &= \pm\cos\varphi\,, & H_3 &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.38}$$

ove φ è un angolo costante arbitrario.

Si ha un movimento circolare in cui l'asse giroscopico ξ_3 si mantiene sempre ortogonale al piano $G_0\boldsymbol{u}\boldsymbol{H}_0$.

Consideriamo infine la seconda eventualità (2.33); le (2.8) divengono

$$u_1^2 + u_2^2 = 1\,, \qquad H_3 = \pm 1\,, \qquad u_3 = 0\,. \tag{2.39}$$

Ragionando come prima, si trovano movimenti in cui l'asse giroscopico conserva, in ogni istante, la direzione di $\boldsymbol{H}_0$ mentre ξ_1 forma con $\boldsymbol{u}$ un angolo costante φ.

Anche in questi ultimi due casi (2.38) e (2.39), particolarizzando φ, si ottengono rappresentazioni dei movimenti analoghe a quelle indicate nel caso non giroscopico.

References

[1] E. Bentsik, *Su possibili moti semplici di un satellite artificiale soggetto a forze newtoniane,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 177.

[2] E. Leimanis, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point,* Springer-Verlag, Berlin 1965.

[3] C. Totaro, *Sul movimento dei satelliti artificiali,* Atti Acc. Peloritana dei Pericolanti, Classe I di Sc. Fis. Mat. Natur. **56** (1978).

Summary

The paper concerns with the motion of an artificial satellite considered as a rigid body under the condition that the angular velocity of proper rotation is the same as the angular velocity of revolution. It is proved that the only possible motions, from a dinamical point of view, are circular and uniform with one of the principal axes of inertia having the direction of the line joining the center of force and the center of mass of the satellite; a second principal axis of inertia is perpendicular to the motion's plane.

* * *